经济学中的分析方法

Analytical Methods in Economics

[美] 高山晟 著
Akira Takayama

中国人民大学出版社



经济科学译丛

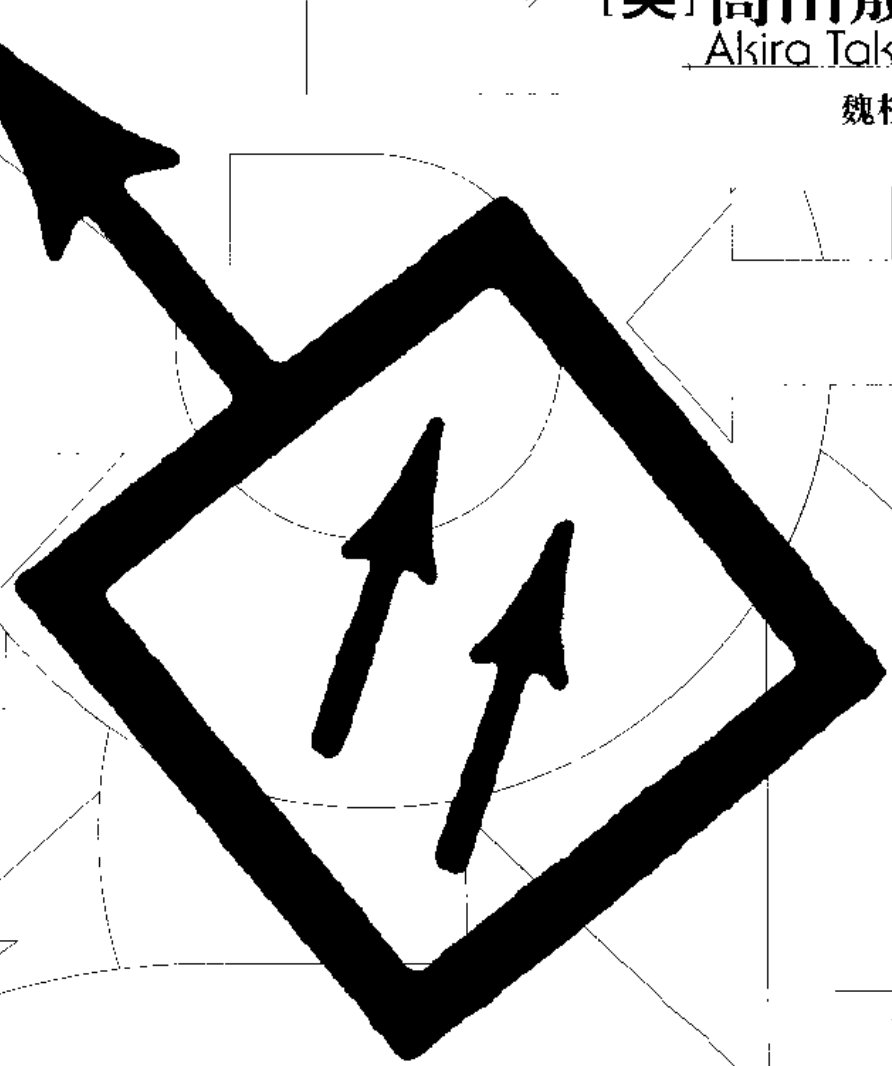
经济学中的分析方法

Analytical Methods in Economics

[美] 高山晟 Akira Takayama 著

魏权龄 成世学 校

刘振亚 译



经济科学译丛

中国人民大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

经济学中的分析方法/［美］高山晟著；刘振亚译；魏权龄，成世学校.
北京：中国人民大学出版社，2001
（经济科学译丛）

ISBN-7-300-03876-X/F·1170

Ⅰ.经…

Ⅱ.①高…②刘…③魏…④成…

Ⅲ.经济学－分析方法

Ⅳ.F0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 059952 号

经济科学译丛

经济学中的分析方法

［美］高山晟　著

魏权龄　成世学　校

刘振亚　译

出版发行：　中国人民大学出版社
（北京中关村大街 31 号　邮编 100080）
邮购部：62515351　门市部：62514148
总编室：62511242　出版部：62511239
E-mail：rendafx@public3.bta.net.cn

经　　销：新华书店

印　　刷：涿州市星河印刷厂

开本：787×1092 毫米 1/16　印张：34　插页 5

2001 年 10 月第 1 版　2001 年 10 月第 1 次印刷

字数：696 000

定价：59.00 元

（图书出现印装问题，本社负责调换）

谨献给

我的经济学启蒙老师

卡尔·克赖德尔（Carl Kreider）

和莱昂内尔·麦肯齐（Lionel Mckenzie）

《经济科学译丛》
编辑委员会

学术顾问 高鸿业 王传纶
胡代光 范家骧
朱绍文 吴易风

主　　编 陈岱孙

副 主 编 梁　晶 海　闻

编　　委 王一江 王利民
王逸舟 贝多广
平新乔 白重恩
刘　伟 朱　玲
许成钢 张宇燕
张维迎 李　扬
李晓西 李稻葵
杨小凯 汪丁丁
易　纲 林毅夫
金　碚 姚开建
徐　宽 钱颖一
高培勇 梁小民
盛　洪 樊　纲

（按姓氏笔画排列）

《经济科学译丛》总序

中国是一个文明古国，有着几千年的辉煌历史。近百年来，中国又由盛而衰，一度成为世界上最贫穷、落后的国家之一。1949年中国共产党领导的革命，把中国从饥饿、贫困、被欺侮、被奴役的境地中解放出来。1978年以来的改革开放，使中国真正走上了通向繁荣富强的道路。

中国改革开放的目标是建立一个有效的社会主义市场经济体制，加速发展经济，提高人民生活水平。但是，要完成这一历史使命决非易事，我们不仅需要从自己的实践中总结教训，也要从别人的实践中获取经验，还要用理论来指导我们的改革。市场经济虽然对我们这个共和国来说是全新的，但市场经济的运行在发达国家已有几百年的历史，市场经济的理论亦在不断发展完善，并形成了一个现代经济学理论体系。虽然许多经济学名著出于西方学者之手，研究的是西方国家的经济问题，但他们归纳出来的许多经济学理论反映的是人类社会的普遍行为，这些理论是全人类的共同财富。要想迅速稳定地改革和发展我国的经济，我们必须学习和借鉴世界各国包括西方国家在内的先进经济学理论与知识。

本着这一目的，我们组织翻译了这套经济学教科书系列。这套译丛的特点是：第一，全面系统。除了经济学、宏观经济学、微观经济学等基本原理之外，这套译丛还包括了产业组织理论、国际经济学、发展经济学、货币金融学、公共财政、劳动经济学、计量经济学等重要领域。第二，简明通俗。与经济学的经典名著不同，这套丛书都是国外大学通用的经济学教科书，大部分都已发行了几版或十几版。作者尽可能地用简明通俗的语言来阐述深奥的经济学原理，并附有案例与习题，对于初学者来说，更容易理解与掌握。

经济学是一门社会科学，许多基本原理的应用受各种不同的社会、政治或经济体制的影响，许多经济学理论是建立在一定的假设条件上的，假设条件不同，结论也就不一定成立。因此，正确理解掌握经济分析的方法而不是生搬硬套某些不同条件下产生的结论，才是我们学习当代经济学的正确方法。

本套译丛于 1995 年春由中国人民大学出版社发起筹备并成立了由许多经济学专家学者组织的编辑委员会。中国留美经济学会的许多学者参与了原著的推荐工作。中国人民大学出版社向所有原著的出版社购买了翻译版权。北京大学、中国人民大学、复旦大学以及中国社会科学院的许多专家教授参与了翻译工作。在中国经济体制转轨的历史时期，我们把这套译丛献给读者，希望为中国经济的深入改革与发展作出贡献。

《经济科学译丛》编辑委员会

1996 年 12 月

序 言

本书旨在提供经济学的分析方法。它将阐释我所认为的当今经济学的基本分析工具（非线性规划理论、不确定性、微分方程和最优控制论）及其在某些经济问题中的应用。这些应用涉及微观经济学和宏观经济学两部分（尽管这种二分法未必恰当）。我希望能以此阐明经济理论统一的分析结构及其所需的基本数学工具。经济学曾被说成是诗歌、精确的逻辑（分析）和广博事实的融合。即使如此，经济研究的分析方法也只是在最近的四五十年才变得非常重要。

本书是为经济学家、经济学研究生和高年级的本科生而写的，他们需要通过具体的经济应用了解经济学分析的基础知识。本书强调缘由、解说和经济实例，避免“定义—公理—定理”的方法，尽管作者完全清楚这种方法的重要性。本书并不打算成为一本研究人员最新的参考手册。因此，一些重要的专题被遗憾地省略了。另外，我的重点并不是陈述最通用的定理和命题，而是要努力使本书的解说尽可能简单和使阅读此书的前提条件尽可能减至最少，但仍能使读者接近当前经济学基本分析工具的前沿。遗憾的是，在经济学中，经常会出现这样的情况，即即便是在那些对某个问题有所著述的人们中间，也有人没弄清楚该问题的分析结构。而一旦弄清了这种分析结构，将它扩展到更一般的情况通常是直截了当的。因此，在讨论经济问题时我的重点在于理清它们的分析结构。同样，本书也不像强调“如何做”的那种典型“工程数学”课本，尽管这种书常常是有用的，而本书则力图讲解“为什么”

的问题。

就本书的准备知识而言，二三年级本科所学的经济理论应能为读者提供足够的经济学背景来着手本书学习。两三个学期的微积分和线性代数的基本理论（诸如矩阵乘法规则）应能为读者提供足够的数学基础。为方便读者，附录 A 收录了线性代数简介。

本书在很大程度上是多年来我在普渡大学、德克萨斯 A&M 大学、东京大学、澳大利亚国立大学、京都大学、同志社大学、土伦大学和卡本代尔南伊利诺伊大学为本科生和一二年级研究生所作的有关各种问题的讲课笔记。本书同样展示了本人在专业期刊上发表的一些研究成果，诸如《美国经济评论》、《经济学通信》、《经济理论期刊》、《宏观经济学杂志》、《中观经济学》、《经济学季刊》、《南方经济杂志》、《经济学研究季刊》、《政治学综合期刊》、《大阪经济论文集》、《庆应经济研究》和《国际经济一体化杂志》，还有《新帕尔格雷夫：经济学词典》（伦敦，麦克米兰，1987）。本书也作为我的《数理经济学》（第 2 版，纽约，剑桥大学出版社，1985）的配套书。感谢这些杂志和“新帕尔格雷夫”允许在此书中收入作者最初在上述刊物和书籍中出版的资料。我还感谢剑桥大学出版社准许我使用发表在《数理经济学》上的一些资料。约翰·威利父子公司也慷慨地允许我使用《优化过程的数学理论》一书中的图表，其作者是 L.S.Pontryagin、V.G.Boltyanskii、R.V.Gamkrelidze 和 E.F.Mishchenko，写于 1962 年。这些确切的文献来源都被放到各自恰当的位置。

我受益于许多著名的同行，其中我要特别提到 Carl Kreider、Lionel W.Mckenzie、Ronald W.Jones、Richard N.Rosett、Edward Zabel、Alan Gleason、Kiyoshi Kojima、Masao Hisatake、Yasukichi Yasuba、the late David Bryn-Jones、S.C.Tsiang、Takao Fukuchi、Miyohei Shinohara、Hugo Sonnenschein、Takashi Negishi、William a.Brock、Edward Sieper、Sydney Afriat、John D.Pitchford、James W.Friedman、Seiji Naya、Robert L.Basmann、Murray C.Kemp、Maurice McManus、James P.Quirk、Mohamed El-Hodiri、Yasuo Uekawa、Koichi Hamada、Winston W.Chang、Takeshi Amemiya、James B.McDonald、Michihiro Ohyama、Yashuhiro Sakai、Masayoshi Hirota、Yutaka Horiba、John Z.Drabicki、Richard K.Anderson、Tatsuo Hatta、David Kleykamp 和 Chi-Chur，他们不断给我智慧的启迪。

能与许多优秀的经济学家生活在同一时代我也感到荣幸，如已故的 John R.Hicks、Paul A.Samuelson、Kenneth J.Arrow、Lionel W.Mckenzie、Leonid Hurwicz、Gerard Debreu、James Tobin、Franco Modigliani、Robert M.Solow、Takuma，在现有的理论框架进一步完善时，Marshall、Walras、Keynes 和 von Neumann 的经济学理论仍有活力。因此，我还没有感到迫切需要对“理论框架”或“研究程式”进行“突破性”改变。至少，到目前为止一些断提出的“理论框架”还没有清楚地展示出其巨大的优越性。

本书的某些部分是基于 John Z.Drabicki（亚利桑那大学）和 Richard K.Anderson（德克萨斯 A&M 大学）和 Toyonari Ide（福冈大学）合著的一

些文章。我感谢他们允许我利用那些合写的材料。同样，我也感谢 John、Toyo 和 Jess Benhabib（纽约大学），Christopher Bliss（牛津大学），Yasuhiro Sakai（群马大学），Jake Meyer（密歇根州立大学），Rulon Pope（布莱翰·扬大学），Myoungjae Lee（宾州州立大学）和 Peter Coughlin（马里兰大学）对我部分和全部手稿所给予的有价值的评论。特别地，John 像往常一样不吝赐教，可谓字字珠玉。最后，我要感谢在各大学学习过我课程的学生们，他们对内容给予了许多有益的建议，而且在我冗长的课程之后仍兴趣盎然。勿庸讳言，以上所提到的人都不对本书的不足之处负责。

在准备这本书的过程中，我要对 Gertrudes Castillo-Holder、Toyonari Ide 和 Doh－Joon Bhak 出色的研究协助工作表示敬意。感谢 Kathy Elders 在打印全部手稿中出色的速记服务和 Don Stribling 在用排版程序进行印制过程中所表现的教力。同样，我也深深敬佩 Don 和 Doh-Joon 在出版中所做的最后努力。同时，我也感谢热情打印部分首稿的 Mary Mertz 和为我们的计算机建立文字处理程序和打印系统的 T.C.Lin 博士。没有所有这些人在进行无数次修改中所表现出的耐心，这本书是不可能出版的（在这方面，还有其他没有特别提到的本校同事）。

所有这些帮助无疑受益于南伊利诺伊大学（卡本代尔）经济学 Vandeveer 主任（Vandeveer Chair of Economics）的资助。同样，我要对密歇根大学出版社的 Colin Day 及其同事在出版本书过程中所给予的帮助和耐心表示谢意。

A.T.

1993 年 5 月

目 录

第1篇

引言 …… 1

预备知识 …… 5

第1章 一些数学基础 …… 7

§1.1 基本概念与符号 …… 8

1.1.1 集合 …… 8

1.1.2 逻辑命题 …… 11

1.1.3 函数 …… 13

1.1.4 实数 …… 15

§1.2 欧几里得空间 …… 15

§1.3 拓扑学点滴 …… 22

1.3.1 收敛性 …… 22

1.3.2 连续性 …… 25

1.3.3 一些拓扑学的概念和结论 …… 27

§1.4 二次型 …… 30

§1.5 微分、凹函数和拟凹函数 …… 33

1.5.1 微分 …… 33

1.5.2 一些重要结论 …… 37

1.5.3 高阶导数和海赛矩阵 …… 40

1.5.4 凹函数和凸函数 …… 42

1.5.5 拟凹函数 …… 47

练习题 …… 50
注释 …… 54
参考文献 …… 58
第 2 第 非线性规划与微观经济学 …… 59
第 2 章 非线性规划 …… 61
§2.1 引言 …… 61
§2.2 一阶条件下的最优解特征 …… 68
§2.3 最优解的鞍点特征 …… 79
§2.4 古典最优化与非线性规划 …… 85
2.4.1 古典最优化 …… 85
2.4.2 与非线性规划的比较 …… 88
练习题 …… 90
注释 …… 91
参考文献 …… 95
第 3 章 灵敏性分析与微观经济学基础 …… 97
§3.1 比较静态：常规过程 …… 97
§3.2 包络线定理 …… 101
§3.3 微观经济理论的基础 …… 107
§3.4 要素替代弹性及其估计 …… 113
§3.5 关于规模收益的概念 …… 117
§3.6 Le Châtelier-Samuelson 原则 …… 120
练习题 …… 126
注释 …… 133
参考文献 …… 139
第 4 章 微观经济理论中的其他问题 …… 145
§4.1 劣等投入、边际及平均成本 …… 145
4.1.1 劣等投入 …… 145
4.1.2 要素价格与平均成本曲线的移动 …… 149
§4.2 边际成本定价 …… 151
§4.3 要素价格与平均成本曲线的形状 …… 154
§4.4 劳动力供给：收入—闲暇选择 …… 157
4.4.1 无非工资收入的情形 …… 157
4.4.2 有非工资收入的情形 …… 161
§4.5 管制约束下的公司行为 …… 162
§4.6 满负荷问题 …… 166
4.6.1 引言 …… 166
4.6.2 一个福利最大化的垄断者的情形 …… 167
4.6.3 一个利润最大化的垄断者的情形 …… 173
§4.7 关于科斯定理 …… 176
4.7.1 引言 …… 176

4.7.2 外在性和庇古方案 …… 177
4.7.3 科斯定理 …… 180
注释 …… 183
参考文献 …… 189
第3篇 不确定性经济学 …… 197
第5章 不确定性经济学 …… 199
§5.1 期望效用假设 …… 199
§5.2 期望效用与风险行为 …… 208
5.2.1 风险行为 …… 208
5.2.2 风险厌恶的 Arrow-Pratt 度量 …… 210
5.2.3 例子 …… 213
5.2.4 无差异曲线 …… 214
§5.3 应用 …… 215
5.3.1 保险 …… 215
5.3.2 公司理论 …… 218
5.3.3 资产组合选择 …… 221
5.3.4 消费与储蓄决策 …… 225
§5.4 信息经济学 …… 231
5.4.1 信息不对称、Lemon 法则和信号传递 …… 231
5.4.2 保险中的防范措施与信息不对称 …… 232
5.4.3 逆向选择 …… 234
§5.5 结束语 …… 236
注释 …… 237
参考文献 …… 244
第4篇 微分方程与经济分析 …… 249
第6章 微分方程基础与经济应用 …… 251
§6.1 基本概念及解的存在 …… 251
§6.2 稳定性 …… 256
§6.3 经济应用 …… 264
6.3.1 竞争性均衡的稳定性：瓦尔拉斯过程 …… 264
6.3.2 宏观经济均衡的稳定性 …… 266
6.3.3 新古典增长模型 …… 269
6.3.4 关于 Phillips 曲线 …… 271
6.3.5 Tobin 的“Walras－Keynes－Phillips”模型：
Routh－Hurwitz 定理的一个应用 …… 275
§6.4 三种商品情况下的竞争均衡 …… 277
注释 …… 281
参考文献 …… 288
第7章 平面线性微分方程组和非线性系统基础 …… 293
§7.1 线性系统 …… 293

§7.2 平面齐次线性系统 …… 295
§7.3 平面解的动态行为 …… 301
§7.4 非线性系统 …… 310
7.4.1 平面轨道的局部行为 …… 310
7.4.2 非线性系统的稳定性：Liapunov 直接法 …… 312
7.4.3 局部渐近稳定性 …… 314
练习题 …… 314
注释 …… 315
参考文献 …… 317
第8章 宏观均衡和新古典增长模型 …… 319
§8.1 静态宏观均衡及其稳定性 …… 319
§8.2 货币与增长——第一部分 …… 322
8.2.1 模型 …… 322
8.2.2 定态 …… 325
8.2.3 稳定性与不稳定性 …… 326
8.2.4 不稳定性的来源 …… 329
§8.3 货币与增长——第二部分 …… 330
8.3.1 引言 …… 330
8.3.2 模型与瞬时均衡 …… 332
8.3.3 长期分析 …… 333
8.3.4 稳定性的来源 …… 336
8.3.5 8.3 节附录 …… 336
注释 …… 337
参考文献 …… 340
第5篇 最优控制论及其应用 …… 343
第9章 最优控制论基础及应用 …… 345
§9.1 Pontryagin 的最大化原理 …… 345
§9.2 各种情况 …… 351
§9.3 两个具体说明 …… 356
9.3.1 变分法 …… 356
9.3.2 Pontryagin 等人说明的一个问题 …… 359
§9.4 最优增长问题 …… 361
注释 …… 369
参考文献 …… 373
第10章 无限期界最优控制问题与应用 …… 377
§10.1 一般定理 …… 377
§10.2 最优货币政策 …… 381
§10.3 储蓄：持久收入假设 …… 385
§10.4 投资 …… 391
10.4.1 “新古典”理论 …… 391

10.4.2 调整成本方法 …… 395
10.4.3 Tobin q、公司的价值和 keynes 的资本边际效率原则 …… 397
注释 …… 404
参考文献 …… 407
第 11 章 最优控制论的扩展 …… 413
§11.1 主要定理 …… 413
§11.2 消费者终身分配过程：有限期界的情形 …… 417
§11.3 等周长问题 …… 421
§11.4 空间定价问题 …… 423
11.4 节附录：空间定价问题与非线性规划 …… 428
注释 …… 431
参考文献 …… 433
附录A 线性代数的基本原理 …… 435
§A.1 矩阵和基本运算 …… 435
§A.2 转置、向量、联立方程组和非奇异矩阵 …… 438
§A.3 线性无关、秩和线性子空间 …… 441
§A.4 作为线性变换的矩阵 …… 443
§A.5 行列式和分块矩阵 …… 446
A.5.1 行列式、拉普拉斯展开和克莱姆法则 …… 446
A.5.2 分块矩阵和行列式 …… 450
§A.6 特征值、特征向量和对称矩阵 …… 451
§A.7 负定矩阵或正定矩阵 …… 453
注释 …… 456
参考文献 …… 457
附录B 七种类型的凹函数和拟凹规划：对一些结果及扩展的概述 …… 459
§B.1 七种凹性 …… 459
§B.2 非零梯度的作用 …… 463
§B.3 拟凹规划 …… 466
注释 …… 469
参考文献 …… 470
附录C 消费者剩余 …… 473
§C.1 引言 …… 473
§C.2 一些基础知识 …… 476
§C.3 计算 Hicks 标准 …… 477
§C.4 正确的福利标准 …… 478
§C.5 收入边际效用不变情况下的 Hicks 标准 …… 483
结束语 …… 485
注释 …… 485
参考文献 …… 490
索引 …… 495

引 言

本书包括五个部分.第1篇(第1章)为阅读本书和进一步研究经济学提供了必要的数学背景知识.第2、3、4篇是本书的核心.第2篇(第2章到第4章)介绍非线性规划及其在经济学中的应用,特别是在微观经济学中的许多应用.第3篇(第5章)介绍不确定性经济学.第4篇(第6章到第8章)以大量经济应用的实例来介绍微分方程和最优控制论.第5篇(第9章到第11章)讲解最优控制论及其在经济理论中的应用.本书最后还包含三个附录.

第2章概述了非线性规划理论的主要结论.第3章讨论敏感性分析及其应用.在这里,我首先阐述由希克斯和萨缪尔森喜爱的比较静态学的传统方法.然后论述包络线定理,该定理使得到某些问题的敏感性结论容易得多.作为例证,本书将指出许多基础微观理论的主要结论可以作为这一定理的简单应用而得到.本书还将通过对成本函数的限定,讨论要素替代的艾伦弹性及其估计.第3章将以澄清规模收益和卡特里尔—萨缪尔森(Le Chaterlier-Samuelson)原则的一些重要概念而结束.本章还对文献中关于规模收益的一些含混不清之处做了纠正.第4章讨论微观经济学中其他一些专题.在这一章里,将考察劣等投入、边际成本定价,以及平均成本曲线相对要素价格变动的敏感性、收入—闲暇选择问题、规章约束问题(Averch-Johnson效应)、满负荷问题和科斯定理.在应用部分,重点将放在澄清这些问题的基本分析结构上,而不是扩展已知的结论;因为一旦分析结构搞清了,对已知结论的扩展应该是容易的.实际上,这正是本书的一个重要特色.另外,我们在3.3节关于平均成本

曲线的形状对要素价格变动非常敏感的结论，使得对文献中常见的根据这种曲线进行分析的合理性提出某种(甚至是严肃的)质疑.

第3篇只包括第5章.在这部分，将讨论不确定性经济学与信息经济学，它们自70年代以来吸引了人们大量的注意力，同时本书试图对期望效用假设及其应用提供一个完整的清楚说明.

第6、7、8章构成了第4篇.这些章节将讨论微分方程这个专题.第6章讨论了基本概念、微分方程理论中的稳定性特征及其在经济中的应用.应用部分包括竞争均衡的稳定性、宏观均衡的稳定性、新古典总量增长模型、菲利浦斯曲线和托宾对"瓦尔拉斯—凯恩斯—维克塞尔"模型的讨论.在这一章的最后一节，通过讨论三种商品情况下竞争均衡的稳定性问题，解释相位图技术.第7章阐述了平面线性微分方程理论.这为已经被广泛应用于经济学中的二维动态情况的讨论提供了背景材料.即使是线性的，从一维向二维的扩展也会产生各种形态的轨迹.庞克尔定理提供了以对应的线性系统来近似描述二维非线性系统行为的理由.第8章给出微分方程理论在宏观经济学上的一些应用.在8.1节中，我将描述导致IS—LM曲线均衡的轨迹：均衡是一个结点或螺线极点，这取决于是倾向于凯恩斯学派还是倾向于货币学派.8.2节阐述托宾的"货币与增长"模型，已有许多论文研究这个课题，尤其在20世纪的60年代和70年代. 8.3节扩展了(该文献中)通常的假设，即在经济中仅存在两种资产：货币与实物资产.本书引入了第三种资产，即生息证券.由于定态是一个鞍点，它对于常见的两种资产的经济是不稳定的，但本书证明定态对于具有三种资产的经济可以是稳定的.

第9、10、11章构成了第5篇.这些章节介绍最优控制论及其应用.第9章阐述了最优控制理论的基本结论.本书发展了由庞梓尔金(Pontryagin)及其同事得到的许多成果.本书还用一些应用和例证帮助读者理解这些定理.经济应用包括投资的区域配置和最优增长问题.第10章讨论无限期最优控制问题的一个数学定理，这在10.1节中得以展开.在接下来的部分，将介绍它在一些经济问题中的应用.10.2节中考察经济增长的最优货币政策问题.尽管常见的最优增长文献讨论未明确引入货币概念的中央计划经济体制，本书在此将货币引入非中央计划体制.此外，指出一般的Coss-Koopmans规则在有货币的非中央计划经济中成立.10.3节使用最优控制框架来讨论永久性收入假说.这个假说是目前宏观经济学中有关居民消费—储蓄动态行为的一个经典命题.10.4节部分涉及到公司的动态行为，或受调整成本影响的投资理论.托宾的"q"也在此予以讨论.第11章阐述有限期情况的最优控制论.11.1节导出一个重要的具有很多应用的数学定理.11.2节再次提到了生命有限下的居民消费储蓄行为.11.3节和11.4节说明最优控制论对"t"不代表"时间"情况时的应用.11.3节将讨论一个古典的变分法问题，或更确切地说等周长问题.11.4节处理空间定价问题.

本书以三个附录结束.附录A概述线性代数的主要结果.附录B介绍拟凹性的7个概念，阐明它们之间的关系，并得到有关拟凹规划的一个重要定理.附录C讨论消费者剩余的概念，这是一个文献中有很大争论并产生许多

迷惑的题目.附录 A、B、C,在某种意义上,可分别看成是1、2、3 章的附录.另一方面,在这三个附录中讨论的每个议题就其自身而言也很重要,它们同样也可被当成独立的章节来阅读.本书省略了博弈论和非线性动态学(如混沌理论)的最新发展,有关方面的出色论述可在其他地方获得.

第1篇
预备知识

第 1 章　一些数学基础

3　这一章给出在经济分析中被广泛应用并经常认为是理所当然的一些数学方面的基本知识.这里讲解的一些内容在本书随后的讨论中将用到.某些专题,即使在以后的章节中没用到,但由于其本身十分重要,也在本章作了讨论.希望那些不熟悉这里所讨论的某些材料或所有材料的读者,会发现本章有助于理解当前的经济分析文献.这里编入的材料通常被涵盖在几门数学课程之中.我们力图简化本章的陈述,使得即使是从未见过这些材料的读者理解起来也不很困难.我们的重点不在于证明提出的所有结论,而在于帮助理解这些结论及帮助读者应用它们.

另一方面,至少在美国,要求进入经济学专业学习的研究生具备一些矩阵代数、高等微积分等方面的知识已变得日益普遍了.我们希望即便那些已具备这方面背景知识的学生也会发现,本章通过总结基本的数学材料也有助于他们重拾记忆.(矩阵代数基础包含在附录 A 中.)尽管这样的学生可以很快地浏览这些材料,他们也能发现材料的讲解对他们是有益的.

最后,尽管这里给出的材料是基础的(在一定程度上甚至是初级的),并且我们的陈述有时强调对材料的直观理解,我们仍力图传递一些现代数学的氛围,如将一些基本概念归纳为公理,这反过来有助于严格的逻辑演绎.了解这
4　样一种方法对于学生学习更复杂的经济学分析方法将是有用的.因此,本章的目的不仅仅是简单收集数学材料.

§1.1 基本概念与符号

1.1.1 集合

直观地，一个集合就是(任何种类的)对象的集体.例如，地球上所有人(比如说，今天仍活着的人)的集是一个集合，所有1992年日本制造的膝上电脑是一个集合，所有实数的集是一个集合，所有正整数的集是一个集合.我们将假定一个集合所表示的含义在直观上是清楚的，而不用公理式地定义"集合"这个词.像族、集和类这样的词经常作为"集合"这个词的同义词.如果 x 是一个集合 S 的成员，我们记作 $x\in S$，这里"$\in$"是表示"是……的一个元素"的符号.如果 x 不是 S 的一个成员，我们记作 $x\notin S$.集合通常用括号{}表示.集合可以通过列举其成员来加以描述.例如，包含了三个数的集合，比如，1,6和28，可以写作{1,6,28}.集合还可以用

$$\{x:P(x)\},\text{或}\{x\mid P(x)\}$$

来表示。这里，冒号或竖线把两个描述分隔开：第一部分表示集合的一个典型元素 x；第二部分 $P(x)$ 表示属于这个集合的一个典型元素所必须满足的属性.(为了一致，在这本书中我们用冒号而不用竖线.)任何能够用这种形式写出的集合，有时称为**区分公理**.在这本书中，我们用 R(若按我国国家标准，此处 R 应排黑正体，但因本书为译著，为尊重原书，书中多处公式与我国国家标准不一致的，均沿用了原书的表示方式。——编者注)表示所有实数的集合.因此

$$R\equiv\{x:x\text{ 是一个实数}\}$$

在二维平面中的单位圆上点的集合可以用

$$\{(x,y):x\in R,y\in R,x^2+y^2=1\}$$

来表示.集合中的一个元素也常被称为集合的一个"点".当集合中元素的个数是有限的，就称它为有**限集合**，否则称为**无限集合**.

5 给定两个集合 A 和 B，如果 A 的每个元素都是 B 的一个元素，我们称 A 是 B 中的一个集合，或 A 是 B 的一个**子集**，我们将其记为

$$A\subset B$$

注意，$A\subset A$.如果两个集合有**相同**的元素，我们称它们是相等的，记作 $A=B$ 或 $B=A$.(这通常被称作**外延公理**.)(类似地，我们用 $x=y$ 表示 x 和 y 是相同对象的符号.)注意 $A\subset B$，A 是 B 的一个子集，不排除 $A=B$ 的可能性.实

际上，如果 $A=B$，则 $A\subset B$ 和 $B\subset A$ 都成立；反之，如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则 $A=B$. 如果 $A\subset B$ 且 $A\neq B$，那么 A 称作是 B 的一个**真子集**.

给定两个集合 A 和 B，既属于 A 又属于 B 的所有元素的全体称作 A 和 B 的交集，记作 $A\cap B$.

$$A\cap B\equiv\{x:x\in A,\text{并且 } x\in B\}$$

两个集合 A、B 没有公共元素也是可能的，在这种情况下集合 $A\cap B$ 没有元素. 考虑到这种情况，我们引进一个特殊的规定，我们称“没有元素的集合”为**空集**，并将其记作 $\emptyset$. 因此，当 $A\cap B$ 没有公共元素时，$A\cap B=\emptyset$，对这种情况，A 和 B 称作是**不相连**或**不相交**的. 给定两个集合 A 和 B，A 和 B 之间的差（记作 $A\setminus B$），定义为

$$A\setminus B\equiv\{x:x\in A,\text{并且 } x\notin B\}$$

$A\setminus B$ 仍可以是空集.

给定两个集合 A 和 B，属于集合 A **或**集合 B 的元素的集体称作 A 和 B 的并集，记作 $A\cup B$.

$$A\cup B\equiv\{x:x\in A,\text{或 } x\in B\}$$

这里，根据约定，“或”包括 $x\in A$ 和 $x\in B$ 的可能性（也包括 $x\in A$ 但 $x\notin B$，$x\in B$ 但 $x\notin A$ 的可能性）. 由于空集只是一种规定，我们进一步作出规定，对每个对象 x，关系“$x\in\emptyset$”不成立. 类似地，我们有

$$A\cap\emptyset=\emptyset,\text{和 } A\cup\emptyset=A$$

当 S 是集合 X 的一个子集时，属于 X 但不属于 S 的元素的集合称作 S 的**补集**，记作 S^c.

$$S^c\equiv\{x:x\in X,x\notin S\}$$

并（或交）能被推广到有限或无限个集合的集. 例如，如果 $S_1,S_2,\cdots,S_k,\cdots$，是集合，我们可以考虑

$$\bigcup_{i=1}^{k}S_i\text{ 或 }\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i$$

事实上，符号 i 不必是个整数. 例如，令 T 是 0 和 1 之间所有实数的集合（包括 0 和 1），我们可以考虑并

$$\bigcup_{t\in T}S_t$$

如果 S_t 是在时刻 t 地球上所有人的集合，$\bigcup_{t\in T}S_t$ 就是在 T 时期地球上所有人的集合. 类似地，读者应该能够容易理解符号

$$\bigcap_{i=1}^{k}S_i,\bigcap_{i=1}^{\infty}S_i\text{ 和 }\bigcap_{t\in T}S_t$$

给定两个集合 X 和 Y，考虑一个有序对 (x,y)，这里 $x\in X$ 且 $y\in Y$. 所有这些有序对的全体称作 X 和 Y 的**笛卡尔积**，记作 $X\times Y$. 通常的二维平面被记作 $R\times R$，简写为 R^2. 类似地，R^n 表示 n 元实数的集合.

$$R^n\equiv\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):x_i\in R,i=1,2,\cdots,n\}$$

一般地，假设 $\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 是以正整数 1 到 n 为下标集合的集，令

$$X\equiv X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_n$$

这些带下标的集合的笛卡尔积，记作

$$X_1\times X_2\times X_3\times\cdots\times X_n \text{ 或 } \overset{n}{\underset{i=1}{\times}}X_i$$

定义为所有 n 元组元素 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的集合，使得对每一个 i 均有
7 $x_i\in X_i$，即

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\overset{n}{\underset{i=1}{\times}}X_i$$

x_i 称作点 x 的第 i 个**坐标**，集合 X_i 称为第 i 个**坐标集**. 指标的集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 称为**指标集**. 指标集不一定是有限集，它可以是无限集 $\{1,2,3,\cdots,n,\cdots,\infty\}$，或是连续统集，比如 $T=[0,1]$ 或 $T=[0,\infty]$ 等.

它们的笛卡尔积可以记作

$$\overset{\infty}{\underset{i=1}{\times}}X_i \text{ 和 } \underset{t\in T}{\times}X_t$$

给定 R 中的两点 a 和 b，$a<b$，符号 (a,b) 也用来表示

$$(a,b)\equiv\{x:x\in R,a<x<b\}$$

称为**开区间**（这与一个 a 和 b 有序对之间的区别可以明显地从上下文中看出）. 类似地，集合 $[a,b]$ 定义为

$$[a,b]\equiv\{x:x\in R,a\leqq x\leqq b\}$$

称为**闭区间**. 类似地，我们可以定义

$$(a,b]\equiv\{x:x\in R,a<x\leqq b\}$$

和

$$[a,b)\equiv\{x:x\in R,a\leqq x<b\}$$

同样，我们可定义集合 (a,∞) 和 $[a,\infty)$ 为

$$(a,\infty)\equiv\{x:x\in R,x>a\}$$
$$[a,\infty)\equiv\{x:x\in R,x\geqq a\}$$

以下这些例子对说明集合的交和并的概念是很有用的：

$$[0,2]\cap(1,2)=(1,2),\ (0,1)\cap(1,2)=\varnothing$$

$$[0,2]\cup(1,2)=[0,2],\ [0,1]\cup[1,2]=[0,2]$$

8 $$\bigcap_{i=1}^{\infty}(0,1/i)=\emptyset,\ \bigcap_{i=1}^{\infty}(-1/i,1/i)=\{0\}.$$

1.1.2 逻辑命题

令 P 和 Q 是两个命题. 那么命题"如果 P,则 Q"意指如果 P 为真,那么 Q 为真,并且这就是其全部含义. 注意,如果 P 是假的,Q 可以是真或假. 在日常英语中,"如果 P,则 Q"的意义是模棱两可的. Munkres(1975,第 7 页)给出下面这个例子:

"Jones 先生,如果你在期末考试中得分低于 70 分,你的这门功课将会不及格."

在此例中,Jones 先生知道如果他得分低于 70 分,这门课他会不及格,他也知道如果得了至少 70 的分数,他就通过了. 即在这个例子中,"如果 P,则 Q"不仅意味着"如果 P 是真,则 Q 是真的",而且还意味着"如果 P 不成立,则 Q 不成立". 在数学里,后面这种可能性是不容许的.

作为"如果 P,则 Q"的速记符号,下面的符号经常使用:

$$P\Rightarrow Q$$

读作"P 推出 Q". 因此上面的讨论可以总结为

$$(P\Rightarrow Q)\text{不一定推出}(\text{非 }P\Rightarrow\text{非 }Q)$$

如果一个数可被表示为两个整数之比,它就被称作一个**有理数**. 因此命题"如果 x 是一个正整数,那么 x 是有理数"是正确的,但是命题"如果 x 不是一个正整数,那么 x 不是一个有理数"是不正确的(例如,考虑 $x=-1,\frac{1}{2}$,等等). 在命题($P\Rightarrow Q$)中,P 称作是命题的**假设**,Q 称作是命题的**结论**. 有可能在命题($P\Rightarrow Q$)中,假设 P 在所有情况下都不成立,这种情况下命题($P\Rightarrow Q$)称作是**空的真**. 作为这样的 P 的例子,考虑"$x\in R$,且 $x^2<0$",在这种情况下任何有关于 $x\in R$ 的命题 Q 都是空的真.

9 给定命题($P\Rightarrow Q$),我们可以形成另一个命题

$$(Q\Rightarrow P)$$

它称作($P\Rightarrow Q$)的**逆命题**. 即使命题($P\Rightarrow Q$)是真的,它的逆命题可能为真或不为真. 例如,命题"如果 x 是一个正整数,那么 x 是个有理数",其逆命题"若 x 是个有理数,则 x 是个正整数"是不正确的.

如果命题$(P\Rightarrow Q)$为真,那么P叫做Q的**充分条件**,Q叫做P的**必要条件**.或更简单一些,P对Q是充分的,Q对P是必要的.如果命题$(P\Rightarrow Q)$和$(Q\Rightarrow P)$都为真,那么P称作Q的**充分必要条件**,Q称作P的**充分必要条件**.我们用

$$P\Leftrightarrow Q(\text{或 } Q\Leftrightarrow P),\text{或 } P \text{ iff } Q$$

来表示这种情况,这里"iff"是"当且仅当"(if and only if)的缩写.这种情况下两个命题P和Q被称作是**(逻辑上)等价**的.

已知命题$(P\Rightarrow Q)$,我们可以形成如下命题:

$$\text{非 } Q\Rightarrow \text{非 } P$$

它称为$(P\Rightarrow Q)$的**逆否命题**.例如,命题"如果x是一个正整数,那么x是一个有理数"的逆否命题是"如果x不是一个有理数,那么x就不是一个正整数."如果命题$(P\Rightarrow Q)$是真,它的逆否命题(非$Q\Rightarrow$非P)总是真的.反之,如果命题(非$Q\Rightarrow$非P)是真的,那么它的逆否命题$(P\Rightarrow Q)$也为真.因此,一个命题和它的逆否是同一件事的两种表达方式,它们逻辑上是等价的,也就是

$$(P\Rightarrow Q)\Leftrightarrow(\text{非 } Q\Rightarrow \text{非 } P)$$

以上这个关系经常用于证明某些特定的命题.即为了证明命题$(P\Rightarrow Q)$,我们可以等价地证明(非$Q\Rightarrow$非P).更确切地,假设Q不成立.然后,假定P成立,我们得到当且仅当命题$(P\Rightarrow Q)$成立时的一个矛盾.这种用矛盾来证明一个命题的方法叫做**逆否论证**.这样的论证经常用来证明一个"直觉上明显"的命题.

10 为了利用逆否论证,我们必须要知道如何形成称作P的**逆否命题**(即"非P").在许多情况下这是没有困难的.但是,如果P是一个涉及"对所有"或"对某些"的命题,可能会发生混淆.短语"对所有"和"对某些"可以分别被"对每一个"和"对至少一个"代替,这些短语称作**逻辑修饰量词**或简称为**修饰量词**.命题

$$\text{"对所有 } x\in X,P \text{ 成立"}$$

的否定为

$$\text{"对某些 } x\in X,P \text{ 不成立"}$$

这里的修饰量词"对所有"被"对某些"代替.命题

$$\text{"对某些 } x\in X,P \text{ 成立"}$$

的否定是

$$\text{"对所有 } x\in X,P \text{ 不成立"}$$

1.1.3 函 数

给定两个集合 X 和 Y，如果我们能把 X 的每一个成员都和 Y 的一个元素以一定方式联系起来，那么我们称 f 是从 X 到 Y 的一个函数. 这用

$$f: X \to Y$$

来表示，把 X 的一个元素与 Y 中的一个元素联系起来的规则记作 $f(x)$. 下面是函数 $f: R \to R$ 的一些常见例子：

$$f(x) = x^3, f(x) = e^x \text{ 和 } f(x) = \sin x$$

当 $Y \subset R$ 时，函数称为**实值函数**. 给定函数 $f: X \to Y$，X 称作 f 的**定义域**，集合 $f(X)$ 定义为

$$f(X) \equiv \{f(x): x \in X\}$$

称为 f 的**值域**，这里 $f(x)$ 被称为 x 在 f 下的**值**或**象**. 当 $f(X) = Y$，函数 f 被称为是**映上的**. 函数 $f(x) = x^3$ 是**映上的**，而函数 $f(x) = e^x$ 和 $f(x) = \sin x$ 不是映上的. e^x 的值域是 $(0, \infty)$，$\sin x$ 的**值域**是 $[-1, 1]$. 术语**映射**、**变换**、**算子**和**函数**经常被用作同义词. 因此，“$f: X \to Y$”也可以读作“f 是从 X 到 Y 的一个映射”，“f 把 X 映射到 Y”，等等.

11

如果我们能把 X 中的每个 x 在函数 f 下与 Y 中的不止一个点联系起来，即如果 $f(x)$ 是 Y 中的一些点，那么 f 称为**多值函数**或**集值函数**. 当 X 中的每个点只与 Y 中的一个点相联系，我们称其为**单值函数**或简称为**函数**. 在这本书中，除非另外特别说明，“函数”总是指单值函数. 即使函数是单值的，也可能在这个函数下 X 中的一个以上的点与 Y 中的一个相同的值相联系. 一个简单的例子是

$$f: R \to R, \text{对所有 } x \in R, f(x) = a (a \text{ 为常数})$$

这个函数叫做**常函数**. 除非定义域是受限制的，例如限制在 $[0, \frac{\pi}{2}]$，函数 $f(x) = \sin x$ 提供了另一个这样的例子. 给定函数 $f: X \to Y$，由

$$\{(x, y): (x, y) \in X \times f(X), y = f(x)\}$$

定义的集合称为 f 的**图**. 在 R^2 上的图有助于方便地用图形解释特定的实值函数，如 $f(x) = a$，$f(x) = x^2$，$f(x) = x^3$，$f(x) = \log x$，$f(x) = \sin x$ 等.

给定一个函数 $f: X \to Y$，这里 $y = f(x)$，我们可以定义函数 f^{-1} 为

$$f^{-1}: Y \to X, \text{这里 } x \in f^{-1}(y), \text{当且仅当 } y = f(x)$$

函数 f^{-1} 称作是 f 的**反函数**. 注意，如此定义的函数 f^{-1} 可以是单值的或多值

的(即使在 f 是单值的假设下).例如,如果 $f:R\to R$ 和 $f(x)=x^2+1$,那么 $f^{-1}(2)=\{-1,1\}$.当函数 f 和 f^{-1} 都是单值的,f 称为是**一对一**或是一个**单射**.进一步,如果 $f(X)=Y$,也就是说如果 f 是映上的,又是一对一的,就称之为**一一对应**或简称为**双射**.

给定一个函数 $f:X\to Y$,并给定 X 的一个子集 A,集合 $f(A)$ 定义为

$$f(A)\equiv\{y:y=f(x),x\in A\}$$

称为在函数 f 下 A 的**象**.另一方面,如果 B 是 Y 的一个子集,集合 $f^{-1}(B)$ 定义为

$$f^{-1}(B)\equiv\{x:x\in X,f(x)\in B\}$$

称为 B 在函数 f 下的**原象**,它与 B 在反函数 f^{-1} 下的象是相同的.

如果 B 仅包含一个点,那么 B 的原象是一个点,即,如果 $B=\{y\}$,那么在 f 下 B 的原象可简单地用 $f^{-1}(y)$ 来表示.例如,如果 f 定义为

$$f:R\to R,\text{这里对所有 } R \text{ 中的 } x,f(x)=3$$

那么 $f^{-1}(3)=R$.另外,如果 $f(x)=x^2+1$,那么如上所提,$f^{-1}(2)=\{-1,1\}$.

注意,

$$f^{-1}[f(A)]=A \text{ 和 } f[f^{-1}(B)]=B$$

并不是总为真.例如,考虑函数 f,

$$f:R\to R,\text{这里 } f(x)=x^2+1$$

则我们可以发现

$$f^{-1}(f([0,1]))=f^{-1}([1,2])=[-1,1]\neq[0,1]$$
$$f(f^{-1}([0,2]))=f([-1,1])=[1,2]\neq[0,2]$$

给定函数 f 和 g

$$f:X\to Y,g:f(X)\to Z,\text{这里 } f(X)\subset Y$$

我们可以定义一个函数 h 为

$$h:X\to Z,\text{这里 } h(x)\equiv g[f(x)]$$

函数 h 是先施用 f,然后施用 g 而得到的,我们称 h 为 f 和 g 的**复合函数**,并记作 $h\equiv g\circ f$.例如,令 f 和 g 定义为

$$f:R\to R,f(x)=x^2+1$$
$$g:R\to R,g(x)=2x$$

那么复合函数 $h(x)=(g\circ f)(x)=2(x^2+1)$.注意,它与 $(f\circ g)(x)=(2x)^2+$

1 很不相同.

1.1.4 实 数

13

考虑所有实数的集合 R,令 S 是 R 的一个子集.如果存在一个实数 b,使得 $x\leqq b$ 对所有 $x\in S$ 都成立,那么 S 称为是**上有界**,b 称作是一个**上界**.一般地,S 可以没有上界.但是如果它有一个上界,那么它就有无穷多个上界.例如,区间$(0,\infty)$没有上界,而$(0,1)$有一个上界 1(并且,实际上任何 $x\geqq 1$ 都是$(0,1)$的一个上界).令 S 是 R 的一个有上界的子集.S 的一个上界被称作是 S 的一个**上确界**或一个**最小上界**($l.u.b$),如果它比 S 的任何其他的上界都小.S 的上确界记为 $\sup S$ 或 $l.u.b.S$.实数系的一个基本性质是每一个有上界的实数非空子集也有一个上确界(这称作**上确界原理**).

类似的,R 的一个子集 S 称作是**下有界**的,如果存在一个实数 a,使得对所有 $x\in S$ 都有 $a\leqq x$.这样一个数 a 称作是 S 的一个**下界**.(如果 S 既是上有界的又是下有界的,那么 S 简称为**有界的**;如果 S 没有上界或下界,就称为是**无界的**).如果它大于任何其他的 S 的下界,那么就称之为 S 的一个**下确界**或是 S 的**最大下界**($g.l.b$).S 的下确界用 $\inf S$ 或 $g.l.b.S$ 表示.与上确界原理一样,我们可以说每个有一个下界的实数非空子集也有一个下确界.

给定 R 的一个有界子集 S,$\sup S$ 与 $\inf S$ 都总是存在的.但是,$\sup S$ 可以在或不在 S 中.类似地,$\inf S$ 也可以在或不在 S 中.例如,令 S 是开区间$(0,1)$,那么 $\inf S=0$,$\sup S=1$,因此 $\inf S$ 和 $\sup S$ 都不在集合 S 中.给定 R 的任一子集 S(可以不是有界的),如果 $\sup S$ 存在,并且在 S 内,那么它就称为 S 的**最大元**,记作 $\max S$.类似地,如果 $\inf S$ 存在,并且在 S 中,那么它称为 S 的**最小元**,我们把它记作 $\min S$.即

$$\alpha=\min S \text{ 表示 } \alpha\in S \text{ 且对所有 } x\in S \text{ 有 } \alpha\leqq x$$
$$\beta=\max S \text{ 表示 } \beta\in S \text{ 且对所有 } x\in S \text{ 有 } x\leqq\beta$$

§1.2 欧几里得空间

14

令 R 是所有实数的集合,那么实数的一个有序 n 元组 x,$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,称为一个**向量**,数 n 是 x 的**维数**.如前面所提到的,R^n 表示所有(有序)实数 n 元组的集合,$R^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):x_i\in R,i=1,2,\cdots,n\}$.$x\in R^n$ 的第 i 个元素 x_i 称作是 x 的**第 i 个坐标**.当 $n=1$ 时,x 显然是一个实数,也称为**标量**.两个 n 维向量 x 和 y 的**加法**定义为对应坐标相加,即

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n) \tag{1}$$

显然，$x+y$ 也在R^n中. 换句话说，在上面的加法运算下，R^n是“封闭的”. 给定一个任意标量 $\alpha\in R$，一个向量 $x\in R^n$与α 的乘积(称作**数乘**)定义为 α 与x 相应坐标的乘积，即

$$\alpha x=(\alpha x_1,\alpha x_2,\cdots,\alpha x_n) \tag{2}$$

(2)中的 αx 也可写作$x\alpha$. 显然 $x\in R^n$且$\alpha\in R$ 推出$\alpha x\in R^n$. 也就是说，R^n在数乘下也是封闭的. 两个向量 x 和y 的差用$x-y$ 表示，定义为 $x+(-1)y$. 因此，由(1)和(2)，我们有

$$x-y=(x_1-y_1,x_2-y_2,\cdots,x_n-y_n)$$

注意，除非 x 和y 是同维向量，否则不能定义 $x+y$ 和$x-y$. 假设 $n=2$，我们可以在图 1.1 中图示说明坐标、加法和数乘的概念. 读者应对此图很熟悉. 从此图中，读者也可以很容易地看到，一般地，(x_1,x_2)与(x_2,x_1)不同. 类似地，R^n是所有有序实数n 元组的集合. 在R^n中给定上述加法和数乘规则，我们可以很容易检验下面八条性质，对R^n中任意元素x,y,z 和标量$\alpha,\beta\in R$，都是成立的：[1]

(L1) $x+(y+z)=(x+y)+z$

(L2) 存在一个称为 0 的元素，使得 $x+0=0+x$

(L3) 对每个 x，存在一个元素$(-x)$，使得 $x+(-x)=0$

15 (L4) $x+y=y+x$

(L5) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$

(L6) $1x=x$

(L7) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$

(L8) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$

关于符号 0 有一点值得注意，它可以表示标量 0 或是 0 的 n 元组，后者称为**零向量**或**原点**(这是由于明显的几何原因，见图 1.1).

给定任一集合 X(不必是R^n)，如果定义了“加法”和“数乘”，且 x 在这两种运算下是封闭的，并满足性质(L1)到(L8)，则 X 叫做一个(实)**线性空间**或(实)**向量空间**，X 的一个元素称为一个**向量**.

性质(L1)到(L8)提供了定义线性空间的性质，因此它们有根本的重要

16 性. [2]显然，有加法与数乘规则(等式 1 和 2)的R^n是线性空间的一个例子，但在线性空间还有的许多其他例子. 下面给出这样一个例子.

【例 1.1】 考虑定义在区间$[0,1]$上的所有实值函数的集合 S. 对 S 中所有f,g 定义“加法”$f+g$ 为：对$[0,1]$中的每个 x 有 $f(x)+g(x)$，且对所有$x\in[0,1]$，定义“数乘”为 $\alpha f(x)$. 那么在这两个运算下 S 是一个线性空间.

在线性空间理论中，具有基本重要性的概念是“基”的概念. 由于其重要

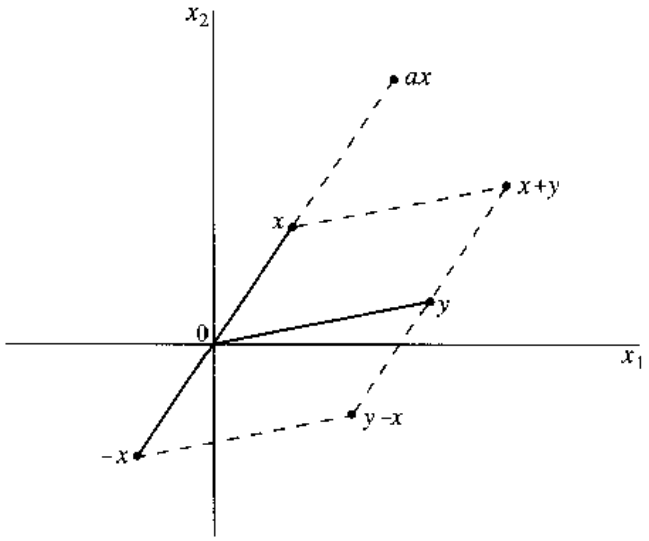


图 1.1　加法和数乘的图示

性，我们简要阐述此理论的核心内容.它也与在附录 A 阐述的线性代数有关.令 X 是任一线性空间(可以不是 R^n)，因此加法和数乘定义在 X 中，且 X 在这些运算下是封闭的.给定 X 中的 k 个向量，$x^1, x^2, \cdots, x^k$，由

$$z=\sum_{j=1}^{k}\alpha_j x^j,\ \alpha_j\in R,\ j=1,2,\cdots,k$$

定义的向量 z 称为这 k 个向量的一个**线性组合**.线性空间中的 k 个向量 $x^1, x^2, \cdots, x^k$ 称作是**线性无关的**，如果对 $\alpha_j\in R, j=1,2,\cdots,k$，

$$\sum_{j=1}^{k}\alpha_j x^j=0 \quad \text{推出} \quad \text{对每个 } j, \text{有 } \alpha_j=0$$

则(有限或无限)任意一个向量的集合 S 称作是**线性无关的**，如果每一个有限子集都是线性无关的.

向量集 S 称作是**线性相关的**，如果它不是线性无关的.因此，S 是线性相关的，当且仅当 S 中存在一个有限数量的向量，比如说向量 $x^1, x^2, \cdots, x^k$，[3] 使得

17

$$\text{对某一 } \alpha_j\neq 0,\ j=1,2,\cdots,k,\ \text{有}\sum_{j=1}^{k}\alpha_j x^j=0$$

令 X 是一个线性空间，X 中的一个线性无关集 S 有性质：X 中的每一个向量 x 都可以表示为 S 中向量的线性组合，则称 S 为 X 的一个**基**.一个基 S 可由有限或无限多个元素组成.如果它是有限的，X 称作是**有限维的**；否则 X 称作是**无限维的**，如上面例 1.1 就是无限维的情况.对一个给定的线性空间 X 可以有很多基.但是，可以证明一个给定线性空间的任何两个基都可以通过一一对应联系起来.因此一个有限维空间任何一个基的元素数目和该空间其他基的数目都是相等的.于是我们可以定义一个有限维空间的基的元素数目为

这个空间的**维数**.

18 对R^n,通常使用的笛卡尔坐标系,即 n 个向量,$(1,0,\cdots,0),(0,1,\cdots,0),\cdots,(0,0,\cdots,1)$,每个向量由 n 个元素构成,构成R^n的一个基,因为R^n中的任一个向量能表示成这 n 个向量的线性组合.因此R^n的维数等于 n.这证实了我们前面的R^n的维数等于 n 的定义是合理的.基理论中的基本结论是**每个线性空间有基存在**.[4]没有这个结论,讨论基是没有意义的.

为简化叙述,现在我们回到R^n.给定R^n的任意两个成员 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$和 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$,我们可以定义 x 和 y 的乘法规则如下:

$$x\cdot y=\sum_{i=1}^{n}x_i y_i \tag{3}$$

这称作是**(欧几里得)内积**,或 x 和 y 的点积.[5]这里 $x\cdot y$ 是一个实数并且对任意元素 x,y,z,定义了如上乘法规则,有如下性质的实值函数:

(I1) $x\cdot y=y\cdot x$

(I2) 对任何 $\alpha,\beta\in R$,$(\alpha x+\beta y)\cdot z=\alpha(x\cdot z)+\beta(y\cdot z)$

(I3) $x\cdot x\geqq 0$,和 $x\cdot x=0$,当且仅当 $x=0$

一般地,如果我们能在 $X\times X$ 上定义实值函数$f(x,y)=x\cdot y$,这里 X 是一个具备性质(I1)、(I2)和(I3)的**线性空间**,则 X 称为内积空间.也就是说,性质(I1)到(I3)是内积空间的定义性质.具有向量乘法规则(3)的R^n只是内积空间的一个例子.要求 X 是一个线性空间(而不是任意集合)源自与加和数乘有关的法则.一个内积的选择不必是惟一的.

在R^n中,欧几里得内积可以用来定义我们所熟悉的几何概念"距离".更精确地,对R^n中的任何两个元素$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$和 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$,我

19 们定义 $d(x,y)$为:

$$d(x,y)\equiv[(x-y)\cdot(x-y)]^{1/2}=[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2]^{1/2} \tag{4}$$

量 $d(x,y)$称作 x 和 y 之间的**(欧几里得)距离**.对 $n=2$,由(4)定义的 $d(x,y)$符合图 1.2 所示的通常的距离概念.我们可以证明如上所定义的欧几里得距离是实值函数,并对所有 x,y 满足如下性质:

(M1) $d(x,y)=0$,当且仅当 $x=y$

(M2) $d(x,z)\leqq d(x,y)+d(y,z)$ **[三角不等式]**

由(M1)和(M2),如下性质也成立:

(M3) $d(x,y)\geqq 0$

(M4) $d(x,y)=d(y,x)$ **[对称性]**

20 任给一个集合 X,对 X 中的任何 x 和 y,如果我们能定义一个有性质(M1)和(M2)的实值函数,那么 X 叫做一个**度量空间**(且 d 称作一个**度量**).

因此，性质(M1)和(M2)是一个度量空间的定义性质．具有由(4)定义的欧几里得距离的集合R^n只是度量空间的一个例子．注意性质(M1)和(M2)定义的"度量空间"的抽象概念不必是线性空间，因为这两个性质没有用到向量加法及数乘．下面这个度量空间的例子经常用来证明在(有欧几里得距离的)R^n中成立的某些性质，这些性质在有着不同距离概念的一个任意的度量空间中不一定成立．

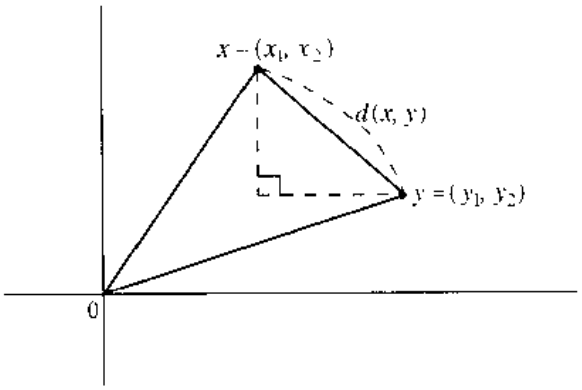


图 1.2　欧几里得距离的图示

【例 1.2】　考虑任意非空集合 X，并对 X 中任意元素 x, y 定义 $d(x,y)$ 为

$$\text{如果 } x=y, \text{那么 } d(x,y)=0; \text{如果 } x\neq y, \text{那么 } d(x,y)=1$$

容易证明这样定义的 $d(x,y)$ 满足性质(M1)和(M2)，因此 X 是一个度量空间．勿庸多说，X 没必要一定是线性空间．

我们现在回到R^n．给定R^n中的一个点$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，x 和原点间的欧几里得距离$d(x,0)$，称作 x 的(**欧几里得**)**范数**，记作 $\|x\|$．即

$$\|x\|=d(x,0)=(x\cdot x)^{1/2}=\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right]^{1/2} \tag{5}$$

类似地，$d(x,y)=\|x-y\|$．可以证明，对所有 x 和 y，欧几里得范数满足下面三个性质：

(N1) $\|x\|\geqslant 0$，且 $\|x\|=0$，当且仅当 $x=0$

(N2) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$　　**[三角不等式]**

(N3) 对任意 $\alpha\in R$，$\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$

给定任一线性空间 X(不必是R^n)，如果我们定义一个实值函数，称为**范数**，满足性质(N1)到(N3)，则称 X 为**赋范线性空间**(或**赋范向量空间**)．性质(N1)到(N3)是一个赋范线性空间的定义特征．要求 X 是一个线性空间(而非一个任意集合)同样来自于性质(N2)和(N3)中用到的向量加和数乘的法则．[6]范数的选择不一定是惟一的，例如R^n是一个有欧几里得范数的赋范线性空间，但它也是有如下范数的赋范线性空间：

21

$$\| x \| \equiv \max |x_i|, 1 \leqq i \leqq n \text{ 或 } \| x \| \equiv \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

在R^n中,欧几里得内积引出了欧几里得距离和欧几里得范数的概念.后者是一个点和原点的距离,因此我们有

$$\| x \| = (x \cdot x)^{1/2} = d(x,0)$$
$$\| x - y \| = [(x-y)\cdot(x-y)]^{1/2} = d(x,y) \tag{6}$$

这里$d(x,y)$表示x和y间的欧几里得距离.记住这点,并把我们的注意局限于二维的情况R^2,我们可以回想起三角学的余弦定理,它可表示成

$$\| x - y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2 - 2 \| x \| \| y \| \cos\theta, 0 \leqq \theta \leqq \pi \tag{7}$$

其中,θ表示两个向量x,y间的夹角,π表示180°.这个关系可用图1.3说明.两个向量$x=(x_1,x_2)$和$y=(y_1,y_2)$由OA和OB表示,这里,设点A代表坐标(x_1,x_2).$\| x \| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$由$OA$来度量.类似地,$\| y \|$由$OB$度量.线段$AB$度量$\| x - y \|$,这里$x - y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2)$.向量$x-y$由$OC$代表.$OC$的长度等于$\| x - y \|$,也等于$AB$的长度.从(7)我们可以很容易得到如下关系:

$$x \cdot y = \| x \| \| y \| \cos\theta, 0 \leqq \theta \leqq \pi, \tag{8}$$

这里θ表示两个向量x和y间的角度.

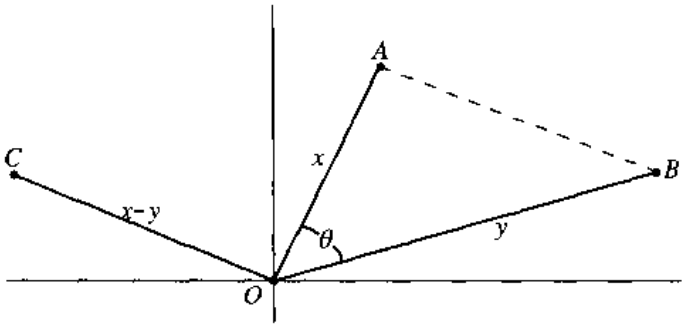


图1.3 三角学的余弦定律

22 方程(7)和(8)得自二维情况.对n维的情况,我们可以证明

$$\text{对 } x,y \in R^n, \text{有 } \| x - y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2 - 2(x \cdot y) \tag{9}$$

由(8)定义R^n中x和y的**夹角**θ.由(9)易看出,如果对于任意的n(不一定等于2)(7)成立,则对于这样的n,(8)也成立,反之亦然.[7]R^n中x和y之间的**夹角**θ的定义可以更准确地定义为

$$\cos\theta \equiv (x \cdot y) / (\| x \| \| y \|)$$

或
$$\theta \equiv \cos^{-1}[(x \cdot y)/(\| x \| \| y \|)] \tag{8'}$$

这里的(8),二维情况下的定理,现用作 n 维情况下的定义.由于 $\cos\theta$ 的值域从 -1 到 1,为了使(8′)中 θ 的定义有意义,必须证明

$$\text{对任意 } x,y\in R^n,(x\cdot y)^2\leqslant \|x\|^2\|y\|^2 \tag{10}$$

不等式(10)称为 **Cauchy－Schwartz** 不等式.为证明这点,令 α 为任何实数,观
23 察

$$\|x-\alpha y\|^2=\|x\|^2-2\alpha(x\cdot y)+\alpha^2\|y\|^2$$

既然当 $\|y\|=0$(推出 $y=0$)时,(10)显然成立,故我们可以假定 $\|y\|\neq 0$.那么在上面等式的右边,令 $\alpha=(x\cdot y)/\|y\|^2$,我们得到

$$0\leqslant\|x-\alpha y\|^2\leqslant[\|x\|^2\|y\|^2-(x\cdot y)^2]/\|y\|^2$$

可使(10)成立.[8]

在二维的情况,向量 x 和 y 有明显的几何表示.因此对这种情况,我们从(7)可以容易断言:

(a) $x\cdot y>0$,如果 x,y 间的角是尖的(锐角,即小于 90°);

(b) $x\cdot y=0$,如果 $\theta=\frac{\pi}{2}$,也就是说 x 和 y 是正交(即等于 90°);

(c) $x\cdot y<0$,如果 x 与 y 之间的角是钝角(即在 90°与 180°之间).

一般地,我们说 R^n 中两个向量 x,y **是正交的**,如果 $x\cdot y=0$.下面是 R^3 中两个向量正交的例子:

(a) $x=(1,0,0)$, $y=(0,1,0)$

(b) $x=(1,2,3)$, $y=(5,2,-3)$

24 在 R^n 中,n 个向量,$(1,0,\cdots,0),(0,1,0,\cdots,0),\cdots,(0,0,\cdots,0,1)$ 中的任两个向量是正交的.回忆这 n 个向量形成 R^n 的一个基.如果基的每对向量是正交的,那么这样的基称作一个**正交基**.

(欧几里得)内积的概念在经济学中频繁出现.例如在传统的消费者选择理论中,消费者假定在受其预算条件的约束下,最大化他的满足(效用).令 p 是价格向量,对消费者来说是外生的,令 x 是消费向量(商品束),这里 $p=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$,$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.那么令 Y 是收入,预算条件可以写成 $p\cdot x\leqslant Y$,其中 $p\cdot x$ 表示 p 和 x 的欧几里得内积,$\sum p_ix_i$.假设消费者花掉他或她所有的收入(以购买商品或服务,及为储蓄的金融资产等).这就可以被写成 $p\cdot x=Y$.把 x 固定在一特定束 x^0,并令 $p\cdot x^0=Y$,如果我们取其他任何一个满足 $p\cdot x=Y$ 的束 x,那么 $(x-x^0)$ 与价格向量 p 是正交的,因为

$$p\cdot(x-x^0)=0$$

总结这一部分,我们可以观察到我们已从所有实数的 n 元组 R^n 中获得了许多重要概念.特别地,由加法规则(1)和数乘规则(2)得到了"线性空间"的概

念，由欧几里得内积得到了“内积空间”，由欧几里得距离得到“度量空间”，由欧几里得范数得到“赋范空间”. 当我们把这些概念定义在R^n上时，我们称它(所有 n 元实数组的集)为**欧几里得空间**. 由于欧几里得空间是个线性空间，我们也可以在R^n上用通常用的方式定义向量的线性无关(或相关)，基和维等概念.

R^n以一种抽象方式诱导出这些概念，这一点也是重要的. 这些概念可以抽象地根据其相应确定的性质(“公理”)定义，并且这些抽象概念可以与R^n十分不同，而得自R^n. 例如，由性质(L1)到(L8)定义的“线性空间”的概念源自R^n，但例 1.1 说明了一个与R^n十分不同的线性空间. 同样地，“内积空间”，“度量空间”和“赋范线性空间”分别是由性质(I1)到(I3)，(M1)到(M2)，和(N1)到(N3)定义的概念. 探寻这些抽象概念的含义及相互关系，导致了许多非常有趣、有益和有用的研究，这些研究形成了现代数学的重要部分. 但是，在这本书中，我们并未进入这些邻域. 而只是简单地，把我们的注意力限于欧几里得空间R^n.

§1.3 拓扑学点滴

1.3.1 收敛性

25

令 S 是R^n的一个子集. S 中的一个**序列**是定义在所有正整数集合上取值在 S 中的一个函数，它表示为

$$x^1, x^2, \cdots, x^q, \cdots$$

或更紧凑地用$\{x^q\}$表示，这里 $x^1, x^2, \cdots, x^q, \cdots$是函数的象(称作序列的**值**或**项**). 给定R^n中一个点x^0和R^n中的一个子集 S(x^0 可以在或不在 S 中)，序列$\{x^q\}$称作是**收敛**于 x^0 的，记作

$$x^q \to x^0 (\text{当 } q \to \infty), \text{或} \lim_{q\to\infty} x^q = x^0$$

如果对任意实数 $\varepsilon > 0$，都存在一个正整数 $\bar{q}$，使得对所有 $q \geqq \bar{q}$，有

$$d(x^q, x^0) < \varepsilon \quad (\text{或等价地，} \| x^q - x^0 \| < \varepsilon)$$

这里 $d(x^q, x^0)$是 x^q 和x^0 之间的欧几里得距离，且 $\| x^q - x^0 \|$ 表示$(x^q - x^0)$的**欧几里得范数**. “点”x^0 称作是$\{x^q\}$的**极限**，并且如果 x^0 也在集合 S 中，这样一个序列被称作是 S 中的一个**收敛序列**. 直观地，这表示如果序列的项接近一个极限，它们“极其地”接近在一起. 再注意 x^0 不一定在 S 中. 例如，令 S

为区间(0,1),是 R 的一个子集.序列$\{1/q\}$(这里 q 是正整数)是值在 S 中的一个序列.点 0 是这个序列的极限,但它不在 S 中.

S 中的任意一个序列$\{x^q\}$,可以有或没有极限(在没有的情况下,$\{x^q\}$称作**不收敛序列**).但是,如果极限存在,容易证明极限是惟一的.对一个序列(或多个序列)的极限,我们可以容易地证明如下关系:

(i) $x^q \to x^0$ 推出对任何 $\alpha \in R$, $\alpha x^q \to \alpha x^0$

(ii) $x^q \to x^0$ 且 $y^q \to y^0$ 推出 $x^q + y^q \to x^0 + y^0$

(iii) $x^q \to x^0$ 推出 $\| x^q \| \to \| x^0 \|$

(iv) $x^q \to x^0$ 且 $y^q \to x^0$ 推出 $(x^q, y^q) \to (x^0, y^0)$

令$\{x^q\}$是 $S \subset R^n$ 中的一个序列,考虑一个序列$\{x^{q_i}\}$,这里 $q_1 < q_2 < \cdots < q_i < \cdots$,那么序列$\{x^{q_i}\}$称作$\{x^q\}$的一个**子序列**.一个序列可以有无穷多个子序列.序列$\{1,2,3,\cdots,q,\cdots,\}$的子序列的例子是

26

$$\{1,3,5,\cdots\},\{1,3,5,7,\cdots\},\{1,5,8,9,\cdots\}$$

如前所述,S 中的一个任意序列$\{x^q\}$可能不收敛.但是,如果它收敛,就有惟一极限.在这种情况,该序列的每个子序列都是收敛的,且与初始序列$\{x^q\}$有相同的极限.当一个序列没有极限,它的子序列可能收敛或不收敛.例如,$\{0,1,0,1,\cdots\}$没有极限,但它的子序列$\{0,0,0,\cdots\}$和$\{1,1,1,\cdots\}$分别收敛于极限 0 和 1.无需说明,也存在许多不收敛的子序列,如$\{0,0,1,1,0,0,\cdots\}$.

经常与一个序列的极限相混淆的概念是"极限点".

【定义 1.1】 令 $S \subset R^n$.则R^n中的一个点x^0称作是 S 的一个极限点,如果在 $S \setminus \{x^0\}$中存在一个序列,使得

$$\text{当 } q \to \infty \text{ 时}, x^q \to x^0$$

注:注意定义 1.1 中的 x^0 不一定在集合 S 中,且序列$\{x^q\}$是从集合 $S \setminus \{x^0\}$中取的,也就是从 S 中删去点x^0而得到的集合(如果 x^0 在 S 中).因此令 S 是一个开区间(0,1),在 $x^q = \frac{1}{q}$时,0 是 S 的一个极限点.另一方面,$x^q \to x^0$ 且$\{x^q\}$在 S 中并不一定表示x^0是 S 的一个极限点.例如令 S 是由一个点 1 组成的集合,那么序列$\{1,1,1,\cdots\}$是一个收敛序列,其值在 S 中,极限为 1.但点 1 不是 S 的一个极限点.因为 S 由一个点组成,它不可能有任何极限点.极限点和极限的关键区别在于前者是一个与集合有关的概念,而后者是定义在整数$\{q=1,2,\cdots\}$上其值在集合中(即 $x^q \in S$)的函数.如上所提到的,S 中一个序列的极限甚至可以不是集合 S 的一个极限点.

序列$\{x^q\}$称作是有界的,如果存在一个(非负)实数,使得对所有 q 有 $\| x^q \| \leq \alpha$.如果序列$\{x^q\}$是收敛的,那么它是有界的,但反之不成立.存在不收敛的有界序列.

当 $n=1$,即 $S=R$ 时,$\{x^q\}$称作是一个**实数序列**.这样的一个序列是收敛的,如果它有界且有

27

(i) $x^1 \leqq x^2 \leqq x^3 \leqq \cdots \leqq x^q \leqq \cdots$

或 (ii) $x^1 \geqq x^2 \geqq x^3 \geqq \cdots \geqq x^q \geqq \cdots\cdots$

令$\{x^q\}$是一个有界实数序列,并令 α^1 为其最小上界($l.u.b.$).考虑序列 x^2,x^3,…,它是从序列$\{x^q\}$删除 x^1 得到的.由于$\{x^q\}$是有界的,所以这个序列显然有界.设 α^2 为其 $l.u.b.$.一般地,考虑序列 $x^q, x^{q+1}, \cdots$,并设其 $l.u.b.$ 为 $\alpha^q, \alpha^{q+1}, \cdots$,那么显然有

$$\alpha^1 \geqq \alpha^2 \geqq \cdots \geqq \alpha^q \geqq \cdots$$

因为序列$\{\alpha^q\}$显然也有界,故它是收敛的.记其极限为 α^0,那么 α^0 称作$\{x^q\}$的**上极限**,并记作

$$\limsup x^q \overline{\lim}\, x^q$$

类似地,令 β^q 是$\{x^q\}$的最大下界($g.l.b.$).例如,β^3 是$\{x^3\}$的 $g.l.b.$.那么,显然 $\beta^1 \leqq \beta^2 \leqq \beta^3 \leqq \cdots \leqq \beta^q \leqq \cdots$.因为序列$\beta^q$也显然是有界的,故它是收敛的.记其极限为 β^0.β^0 称作$\{\beta^q\}$的**下极限**,它记作

$$\liminf x^q \text{ 或} \underline{\lim} x^q$$

回到$R^{\inf}$,令$\{x^q\}$是R^n中的一个序列.那么可以证明序列$\{x^q\}$是收敛的,当且仅当对任意实数 $\varepsilon>0$ 存在一个 $\bar{q}$,使得

$$\text{对所有 } q, r \geqq \bar{q}, \text{有 } \| x^q - x^r \| < \varepsilon$$

或简单地,

$$\text{当 } q, r \to \infty \text{ 时}, \lim \| x^q - x^r \| = 0$$

这样的一个序列称为**柯西(Cauchy)序列**.用此性质,我们也可证明,如果对一给定序列$\{x^q\}$,级数

$$\| x^1 \| + \| x^2 \| + \cdots + \| x^q \| + \cdots$$

收敛,则级数

$$(x^1 + x^2 + \cdots + x^q + \cdots)$$

28 也收敛.[9]这个命题的反命题一般不成立.也就是说,有可能($x^1 + x^2 + \cdots + x^q + \cdots$)收敛,而($\| x^1 \| + \| x^2 \| + \cdots + \| x^q \| + \cdots$)不收敛.级数($x^1 + x^2 + \cdots + x^q + \cdots$)称作是**绝对收敛**,如果($\| x^1 \| + \| x^2 \| + \cdots + x^q \| + \cdots$)收敛.如果级数($x^1 + x^2 + \cdots + x^q + \cdots$)是**绝对收敛的**,那么它是**收敛**的;并且

通过“重排”的级数也是收敛的.[10]

1.3.2 连续性

与序列的收敛性概念紧密相关的一个重要概念是我们现在要讲的“连续性”.我们首先定义“函数的极限”的概念.

【定义 1.2】 令 $f:X\to R^m$,$X\subset R^n$,并令 x^0 是 X 的一个极限点.我们说当 x 趋向 x^0 时,$f(x)$**收敛于** R^m 中的 y^0,记作

$$f(x)\to y^0(\text{当 } x\to x^0)\text{或 } \lim_{x\to x^0} f(x)=y^0$$

如果对每个 $\varepsilon>0$,存在一个 $\delta>0$,使得

$$d(x,x^0)<\delta \text{ 推出 } d[f(x),y^0]<\varepsilon$$

这里 $d(x,x^0)$是 x 和 x^0 间的欧几里得距离.

注:注意在上述定义中,x^0 不一定在 X 中(回忆极限点的定义).同样,即使 $x^0\in X$,也可能有

$$\lim_{x\to x^0} f(x)\neq f(x^0)$$

注:可以证明上述定义可以用序列极限等价地重述,即对 $X\setminus\{x^0\}$ 中的每个序列 $\{x^q\}$,

$$f(x)\to y^0,\text{当 } x\to x^0,\text{当且仅当 } x^q\to x^0,f(x^q)\to y^0 \text{ 时}$$

现在我们可以定义连续性的概念了.

29

【定义 1.3】 令 $f:X\to R^m$,$X\subset R^n$,并令 x^0 是 X 中的一个点.函数 f 称作是在点 x^0 处**连续**,如果对任意实数 $\varepsilon>0$,都存在一个实数 $\delta>0$,使得

$$d(x,x^0)<\delta \text{ 推出 } d[f(x),f(x^0)]<\varepsilon$$

如果上式不成立,那么 f 称作在 x^0 处**不连续**.函数 f 称作 X **中的一个连续函数**,如果它在 X 中的每一点都连续.[11]即使 f 在 X 中的一个点上不连续,f 也称为**不连续函数**.

注:由前面的注,可以很容易地证明上述连续性定义(在 x^0 点)等价于如下命题:

$$\text{当 } q\to\infty \text{ 时 } x^q\to x^0 \text{ 推出当 } q\to\infty \text{ 时 } f(x^q)\to f(x^0)$$

即如果 x 趋近 x^0 时,$f(x)$**趋近** $f(x^0)$,那么 f 在 x^0 处连续.简言之,连续性保证收敛性.例如,函数 $f:R\to R$ 由 $f(x)=a$(常数)定义,它显然在 R 中连续.

使用连续性的定义，读者应能很容易地证明由 $f(x)=x^2$ 定义的函数 $f:R\to R$ 是连续的(作为一个练习，留给读者证明).

函数 f 在 x^0 的连续性也可被直观地解释成 $f(x)$的图像在 x^0 处没有"洞".但这样的解释可能会产生误导. 在图 1.4 中，我们举例说明三种不连续

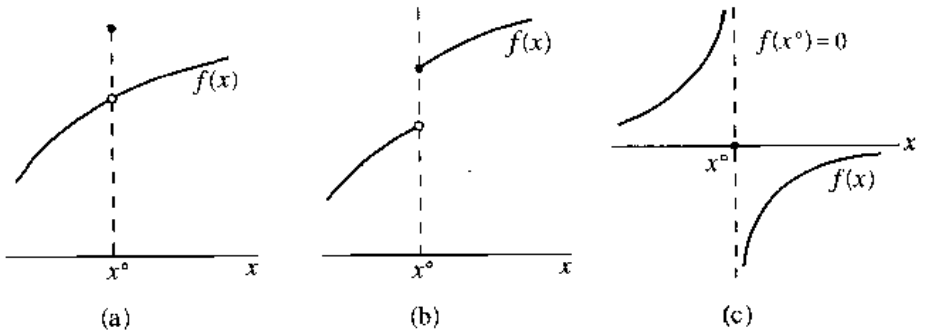


图 1.4　间断性的例子

性(在点 x^0)，这里 $f:R\to R$. 在图 1.4(a)和图 1.4(b)中，对 $x\to x^0$ 且 $x>x^0$，$\lim f(x)$(称为**右极限**)和对 $x\to x^0$ 且 $x<x^0$，$\lim f(x)$(称作**左极限**)都存在且
30 有限；而在图 1.4(c)中，左右极限都是无限的. 前者称作是**第一类间断性**. 一个函数处处不连续也是可能的. 如下面的函数(称作 **Dirichlet 间断函数**)提供了这样一个例子. 这里，我们可以回忆一个有理数被定义为任何由两个整数的比而得到的数：

$$f(x)=1,\text{如果 } x \text{ 是有理数}$$
$$f(x)=0,\text{如果 } x \text{ 是无理数}$$

令 $f,g:R^n\to R^m$，并且分别用

$$f(x)+g(x),f(x)-g(x),\alpha f(x)(\alpha\in R)\text{和 } f(x)\cdot g(x)$$

定义 $f+g,f-g,\alpha f(\alpha\in R)$和 $f\cdot g$(内积). 当 $m=1$ 时，我们可以用

$$f(x)/g(x)$$

定义 f/g(商)，这里我们假定 $g(x)\neq 0$. 进一步，$\|f\|$ 和 $f\circ g$，分别定义为

$$\|f(x)\|\text{和 } f[g(x)]$$

那么可以很容易地从连续性定义得出如下定理：

31 **【定理 1.1】**

(i) 如果 f 和 g 在一点连续，那么其代数组合

$$f+g,f-g,\alpha f,f\cdot g,f/g,$$

在该点都连续. 这里 $\alpha\in R$，且对 f/g 有 $g(x)\neq 0$.

(ii) 如果 f 和 g 在一点连续，那么 $\|f\|$ 和 $(f\circ g)$也在该点连续.

注:从上面定理我们可以断言,如果 f 和 g 在 S 中是连续的,S 是 R^n 的一个子集,那么

$f+g, f-g, \alpha f, f\cdot g, f/g, \|f\|$ 和 $f\circ g$ 在 S 中都连续.注意,$(f\circ g)$是连续的,意味着连续函数的连续函数同样是连续的.

从定理 1.1 可立即得出如下命题:

【推论】

(i) 范数 $\|x\|$ 是 R^n 中一个连续的实值函数.内积 $x\cdot y$ 和距离函数 $d(x,y)$ 是 R^{2n} 中的实值函数.

(ii) 令 A 是一个 $m\times n$ 矩阵,由 $f(x)=Ax$ 定义 $f:R^n\to R^m$.那么 $f(x)$ 是一个连续函数.

(iii) 令 $f_i:R^n\to R^m$ 和 $a_i:R^n\to R, i=1,2,\cdots,k$ 是 R^n 中的连续函数,那么

$$f(x)=\sum_{i=1}^{k}a_i(x)f_i(x)$$

在 R^n 中也是连续的.

(iv) 每个多项式是一个连续函数.

(v) Cobb - Douglas 函数

$$f(x)\equiv x_1^{a_1}x_1^{a_2}\cdots x_1^{a_n}, a_i>0, i=1,2,\cdots,n$$

是一连续函数.

1.3.3 一些拓扑学的概念和结论

32

令 S 是 R^n 的一个子集,考虑 S 中的一个序列 x^q.序列 x^q 可能收敛或不收敛.但是,如果序列收敛,那么它有惟一极限,我们记为 x^0.点 x^0 在 R^n 中,但它可以在或不在 S 中.如果它在 S 中,那么 S 称为一个"闭集".

【定义 1.4】 令 S 是 R^n 的一个子集,x^q 是 S 中的一个序列.S 称为一个**闭集**,如果当 $q\to\infty$ 时,$x^q\to x^0$ 且有 $x^0\in S$.

闭集是一个这样的集合,集合中的每个收敛序列都有在集合中的极限,也就是**闭集是在极限运算下封闭的集合**.例如,每个闭区间$[a,b]$都是 R 中的一个闭集.另一方面,开区间$(0,1)$不是一个闭集.为证明这点,考虑序列 $1/q$ (q 为正整数),它是$(0,1)$间的一个序列,并有极限 0,但 0 不在这个集合中.

注意只含有一个点 x^0 的集合,这里 $x^0\in R^n$,是一个闭集.整个集合 R^n 和空集 $\emptyset$(自然)是闭集.

下列基本性质可以从闭集的定义中得到:

(i) 有限的或无限的闭集的交也是闭集,也就是,如果 $\alpha\in A$ 对 S_α 是闭的,那么 $\bigcap_{\alpha\in A}S_\alpha$ 是闭集.

(ii) 有限的闭集的并也是闭集，也就是如果对 $i=1,2,\cdots,k$，S_i 是闭集，那么 $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$ 是闭集.

由于只有一个点组成的集合是一个闭集，由有限个点组成的集合 $\{x^1, x^2,\cdots,x^k\}$，由性质(ii)可知也是闭的.然而，无限个闭集的并可以不是闭的.可以证明集合 S 是闭的，当且仅当它包含它的所有极限点.从这也可看到，仅包含一个点的集合是闭集，因为这样的集合没有极限点.我们现在定义开集.

【定义 1.5】 令 S 是 R^n 的一个子集.S 称作是一个**开集**，如果它的补集是一个闭集，也就是如果 S^c 是闭的，这里 $S^c \equiv R^n \setminus S$.

33 例如，每个开区间 (a,b) 是 R 中的一个开集，因为它的补集 $\{x: x\in R, x\leq a$ 或 $x\geq b\}$ 是一个闭集(练习：证明为什么).注意区间 $(0,1]$ 和 $[0,1)$ 既不是闭的，也不是开的.

现在考虑 R^n 中所有开集的集合.注意 R^n 本身和空集 $\emptyset$ 是开集，同时这两个集合也是闭集.我们把 R^n 中开集的集合记作 τ.另外，我们将 R^n 记作 X.那么从以上讨论的闭集的性质，我们很容易证明 τ 满足如下性质：

(T1) $X\in\tau, \emptyset\in\tau$

(T2) $S_i\in\tau, i=1,2,\cdots,k$，推出 $\bigcap_{i=1}^{k} S_i\in\tau$

(T3) 对所有 $\alpha\in A, S_\alpha\in\tau$，推出 $\bigcup_{\alpha\in A} S_\alpha\in\tau$

性质(T2)表明开集的有限的交也是开集，性质(T3)表明开集的有限的或无限的并也是开集.注意，开集的一个无限的交可以不是开的.例如，如果 $\{q\}$ 是正整数集合，那么

$$\bigcap_{q=1}^{\infty}(-1/q,1/q)=\{0\}$$

是一个闭集.

给定任一集合 X(无需是 R^n，也无需是线性空间或度量空间)，如果我们能定义满足性质(T1)到(T3)的子集的一个集合 τ，我们称之为有拓扑 τ 的一个**拓扑空间**，记作 (X,τ).在这个抽象的拓扑空间中，τ 的一个元素称作一个“开集”.那么“闭集”定义为其补集是开集的集合.

早些时候，我们定义一个集合是开的，如果它的补集是闭的，这里闭集定义为 R^n 中在极限运算下是封闭的集合.抽取这些开集的一些基本特征，就得到了拓扑空间中公理(T1)到(T3)，开集现在可以依照这些公理来定义.显然，以前根据在 R^n 中收敛性定义的闭集来定义的开集满足这些公理.但是，许多其他的集合也满足这些公理，因此，也是拓扑空间.注意这些公理甚至不要求

34 集合在 R^n 中.同样，也不需要定义收敛性.事实上，任何集合都可以是以下某一个拓扑确定的拓扑空间：

(i) $\tau=\{X,\emptyset\}$(称作**非离散拓扑**)

或　(ii) $\tau \equiv X$ 的所有子集(称作**离散拓扑**)

同样,许多其他种类的拓扑可定义在任意一个集合 X 上.从"拓扑空间"的公理(T1)到(T3)出发,已经得到了许多令人感兴趣的大量结论,这些研究构成了数学的一个重要分支.这里我们不能进行这些研究.而是出于这本书的目的,我们只限于具有根据收敛性来定义 R^n 上的开集和闭集已经足够了.

给定 R^n 中一点 x^0,定义集合 N,它也可以用 $N(x^0)$ 表示,即

$$N \equiv \{x : x \in R^n, d(x, x^0) < \varepsilon\}$$

这里 $d(x, x^0)$ 是 x 与 x^0 之间的欧几里得距离.集合 N 称作关于 x^0 的以 ε 为**半径的开球**,或简单地,是 x^0 的一个**邻域**.我们可以随意地解释"邻域",因此 N 可以是整个空间 R^n(即 $\varepsilon \to \infty$),或者 N 可以是非常小(即 ε 很小).容易证明每个邻域都是一个开集.事实上,R^n 中一点 x^0 的邻域经常被(另外)定义为任何包含 x^0 的开集.

给定 R^n 中的任一集合 S,S 中的一点 x^0 称作是 S 的一个**内点**,如果存在一个包含在 S 中的 x^0 的邻域.可以证明,如果 S 中的每个点都是内点,那么 S 是一开集.进一步可以证明开集中的每个点都是内点.S 中所有内点的集合称为**内部**(或 S 的**开核**).[12]

用开集或闭集的概念,我们可以得到连续函数的一个重要特征.令 X 和
35 Y 分别是 R^n,R^m 的子集.考虑函数 $f: X \to Y$,$f(x) = y$.令 B 是 Y 的一个子集,B 在 f 下的逆象,记作 $f^{-1}(B)$,(如前面定义)为

$$f^{-1}(B) \equiv \{x : x \in X, f(x) \in B\}$$

显然,$f^{-1}(B)$ 是 X 的一个子集.另一方面,B 可以不是值域集合 $f(X)$ 的一个子集.一个连续函数的如下性质是其基本性质:[13]

(i) 函数 f 在 X 中是连续的,当且仅当只要 B 在 R^m 中是开的时,$f^{-1}(B)$ 在 X 中就是开的.

(ii) 函数 f 在 X 中是连续的,当且仅当只要 B 在 R^m 中是闭的时,$f^{-1}(B)$ 在 X 中就是闭的.

注:也就是说,连续函数准确地将开集(或闭集)映射回开集(或闭集).同样要注意,与在定义域中一点的 f 的连续性相对,这些性质给出了连续函数的全局特征,这是由如开集和闭集这样的拓扑概念带来的便利.

现在我们继续讨论另一基本的拓扑概念,"紧集".我们首先定义有界集合.R^n 的一个子集 S 被称作是有界的,如果存在某个数 M,使得对 S 中每一对 (x^1, x^2),有

$$d(x^1,x^2)\leqq M$$

由此,我们现在可以定义一个紧集.

【定义 1.6】 R^n中的一个子集S称作是**紧的**,如果 S 是闭的且有界.

例如,闭区间[0,1]在 R 中是紧的,而(0,1),(0,1],[0,∞)则不是.紧集的一些重要性质总结如下:

36 **【定理 1.2】**

(i) R^n中的集合S是紧的,**当且仅当** S 中的每个序列都有一个极限在S中的收敛子序列(被称作**列紧性**).

(ii) R^n中紧集的连续象也是紧的.即如果 $f:S\to R^m$是S 中的一个连续函数,S 是R^n的一个紧子集,那么 $f(S)$在R^m中也是紧的.

(iii) (**Weierstrass 定理**):在紧集 S 上的一个连续实值函数在S 中达到最小值和最大值.即,如果 $f:S\to R$ 是连续的,并且如果 S 是R^n的一个紧子集,那么 S 中存在a,b,使得对 S 中所有的x,有

$$f(x)\geqq f(a),f(x)\leqq(b).$$

注:为了举例说明列紧性这一概念,考虑仅由 R 中两点 0 和 1 构成的集合,也就是 $S\equiv\{0,1\}$.显然,S 是闭的且有界,因此它是紧的.考虑 S 中的一个无限序列$\{0,1,0,1,\cdots\}$.

显然,这个序列是不收敛的,但是它有收敛子序列$\{0,0,0,\cdots\}$或$\{1,1,1,\cdots\}$.紧集的这个列紧性性质,对于证明R^n中的许多重要结论是非常有用的.

注:定理 1.2 的命题(iii),Weierstrass 定理,对特定约束下最优化问题得出最小和最大的存在性时起重要作用.f 的连续性以及 S 的闭性和有界性是得出最小或最大存在结论的基础,验证这点对于读者来说是一个有益的练习.

§1.4 二次型

有关线性代数的大部分阐述包含在附录 A 中.这里我们只讨论二次型.令 $A\equiv[a_{ij}]$是一个 $n\times n$ 矩阵(在实数域上),不一定是对称的,令 $x\in R^n$是一个列向量.那么考虑定义在R^n上的实值函数$Q(x)$,即

$$Q(x)\equiv x'Ax\left(=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\right)\tag{11}$$

37 这里 x 表示一个列向量,x'表示它的转置,一个行向量.函数 $Q(x)$称作一个**(实)二次型**.例如,如果 A 是一个 2×2 矩阵,那么(11)可以写为

$$Q(x)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{12}x_1x_2+a_{21}x_2x_1$$

特别地，如果 $a_{12}=a_{21}$，那么它变为

$$Q(x)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+2a_{12}x_1x_2$$

注意，(11)中的 a_{ij} 和 a_{ji}，当 $i\neq j$ 时，都是 x_ix_j 的系数(因为 $x_ix_j=x_jx_i$)，因此 x_ix_j 的系数是 $(a_{ji}+a_{ji})$. 如果 $a_{ij}\neq a_{ji}$(即如果 A 是不对称的)，那么我们对所有 i 和 j，可以惟一地定义新的系数

$$b_{ij}\equiv(a_{ij}+a_{ji})/2$$

这样，$b_{ij}+b_{ji}=a_{ij}+a_{ji}$，且 $B\equiv[b_{ij}]$是一个对称矩阵. 进一步，对所有 x，有

$$Q(x)=x'Ax=x'Bx$$

这个系数的重新定义对任何 x 都没有改变 Q 的值. 因此，我们可通过假定与二次型 $Q(x)=x'Ax$ 相关的 A 是**对称的**来发展二次型的理论. 下面是二次型理论中的基本定义：

【定义 1.7】 令 $Q(x)=x'Ax$ 是一个二次型.

(i) $Q(x)$**称为正定的**，如果对除 $x=0$ 外的所有 x，有 $Q(x)>0$；$Q(x)$称作是**负定的**，如果除 $x=0$ 外的所有 x，有 $Q(x)<0$. 矩阵 A 称为是**正定的**(或**负定的**)，如果 $Q(x)$是正定的(或负定的).

(ii) $Q(x)$**称作是半正定的**，如果对所有 x，有 $Q(x)\geqq 0$；$Q(x)$称作是**半负定的**，如果对所有 x，有 $Q(x)\leq 0$. 矩阵 A 称为是**半正定的(半负定的)**，如果 $Q(x)$是半正定的(半负定的).

显然，如果 $Q(x)$是正定的(负定的)，它总是半正定的(半负定的). 反之不成立. 另外零矩阵(平凡地)既是半正定的又是半负定的.

【例 1.3】

(a) 如果 $x'=(x_1,x_2)$且 $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，那么 $Q(x)=x'Ax=x_1^2+x_2^2$. 因此，对所有 $x\neq 0$，有 $Q(x)>0$.

(b) 如果 $x'=(x_1,x_2)$且 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，那么 $Q(x)=x'Ax=2x_1x_2$. 因此，根据 x_1 和 x_2 的取值，$Q(x)$可以是正的、负的或零.

(c) 如果 $x'=(x_1,x_2)$且 $A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，那么 $Q(x)=x'Ax=x_2^2$. 例如，对所有 x，有 $Q(x)\geqq 0$，但当 $x'=(1,0)$时，$Q(x)=0$.

在例 1.3 中，矩阵 A 在命题(a)中是正定的；矩阵 A 在命题(b)中既不是正定(或半正定的)，也不是负定的(或半负定的)；命题(c)中的矩阵 A 是半正定的，但不是正定的. 又由上述定义，可立即得出以下关系成立：

如果 A 和 B 是正(或负)定的,那么 $(A+B)$ 是正(或负)定的; (12a)

如果 A 和 B 是半正(或负)定的,那么 $(A+B)$ 是半正(或负)定的. (12b)

现在我们描述一个根据子式判断一个特定矩阵的确定性的有益方法.给定一个 $n\times n$ 矩阵 $A=[a_{ij}]$,我们对所有 $k\leqq n$,定义如下 $k\times k$ 行列式:

$$D_k\equiv\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix},k=1,2,\cdots,n \tag{13}$$

39

行列式 $D_1,D_2,\cdots,D_k$ 称为 A 的**顺序主子式**.给定 A,我们可以定义下列 $k\times k$ 行列式:

$$\tilde{D}_k\equiv\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & \cdots & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & \cdots & a_{jk} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{ki} & a_{kj} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix},k=1,2,\cdots,n \tag{14}$$

这里,$(i,j,\cdots,k)$ 是来自整数集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的 k 个整数的任意排列.行列式 $\tilde{D}_k$ 称为 A 的 k 阶**主子式**.注意,每个 $\tilde{D}_n$ 与 A 的行列式都有相同的符号,因为在排列过程中行和列都进行交换.

【例 1.4】

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$D_1=a_{11},D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\tilde{D}_1=a_{11},a_{22},\text{且 }\tilde{D}_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & a_{11} \end{vmatrix}$$

下面定理根据主子式给出了确定性的完备特征.

【定理 1.3】 令 A 是一个其二次型为 $Q(x)=x'Ax$ 的 $n\times n$ 对称矩阵.那么:

(i) A 是正定的,当且仅当

$$D_1>0,D_2>0,\cdots,D_n>0$$

(ii) A 是负定的,当且仅当

$$D_1<0, D_2>0, D_3<0, \cdots, (-1)^n D_n>0$$

(iii) A 是半正定的，当且仅当

$$\tilde{D}_1\geqq 0, \tilde{D}_2\geqq 0, \tilde{D}_3\geqq 0, \cdots, \tilde{D}_n\geqq 0$$

40 (iv) A 是半负定的，当且仅当

$$\tilde{D}_1\leqq 0, \tilde{D}_2\geqq 0, \tilde{D}_3\leqq 0, \cdots, (-1)^n \tilde{D}_n\geqq 0.$$

注：由于 D_n 等于 A 的行列式，定理 1.3 的命题(i)和(ii)说明一个正定或负定矩阵必须是非奇异的.

由于在排列过程中行和列都进行交换，如果 $\{i, j, \cdots, k\}$ 是相同的指标集，那么所有的行列式 $\tilde{D}_k$ 有相同的符号.

定理 1.3 中的命题(iii)和(iv)中的 $\tilde{D}_k$ 不能由 D_k 代替. 例如在例 1.3 的(c)中，

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, D_1=0, D_2=0, \text{但 } \tilde{D}_1=0 \text{ 或 } 1$$

A 不是半负定的(但它是半正定的，但不是正定的)，这里，我们注意到 $Q(x)=x'Ax=x_2{}^2$.

§1.5 微分、凹函数和拟凹函数

1.5.1 微分

这里我们开始讨论，读者可回忆初等微积分中通过直线来对导数定义.

【定义 1.8】 令 X 是 R 中的一个开集，令 x^0 是 X 中的一点. 函数 $f: X\to R$ 称作**在 x^0 可微**，如果存在一个实数 a，使得

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x^0+h)-f(x^0)}{h}=a$$

或

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x^0+h)-f(x^0)-ah}{h}=0 \tag{15}$$

这里 $h\neq 0$ 且 $x^0+h\in X$. 我们称 a 为 f **在 x^0 点的导数**，记作 $f'(x^0)$. 如果 f 对 X 中的每个 x 都可导，那么 f 称作**在 X 中的一个可微函数**.

一般地，(15)式中的极限依赖于 x^0. 当 x^0 在 X 中变化时，$f'(x^0)$ 的值也在 R 中变化. 因此 f' 是 X 中 x 的函数，我们将其记作 $f'(x^0)$. 同样，导数本
41 质上是一个局部概念，因为它与一个特定的 x^0 有关且集合 X 可以很小. 由于 X 是开集，所以 x^0 是 X 的内点. 这点很重要，因为(15)中 h 可以是正的也可

以是负的.也就是说,x^0+h 允许从任何方向趋近 x^0.这种趋近甚至不必是单调的:它可以在 x^0 周围振动.我们在图 1.5 (a) 中举例说明了导数的概念.众

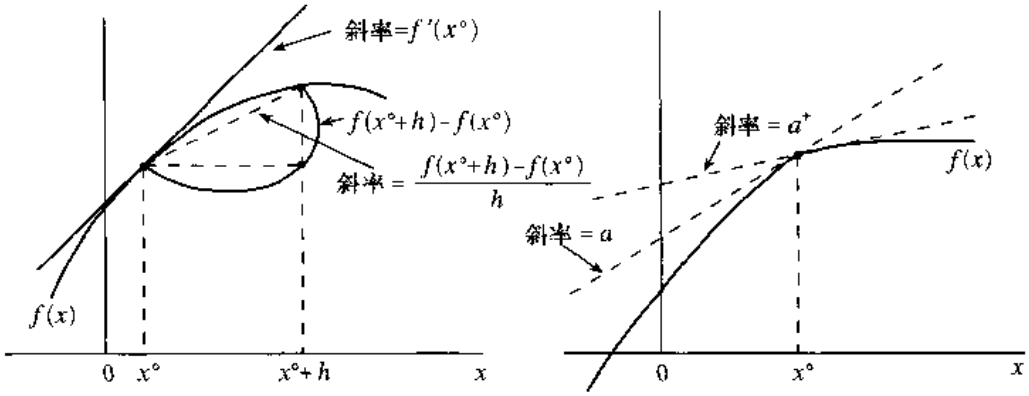


图 1.5　导数的图解说明

所周知,我们可从图上清楚地看到导数表示图像 $f(x)$在点 x^0 处切线的斜率.特别地,注意以上定义要求以下两个极限:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(x^0+h)-f(x^0)}{h}=a^+$$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(x^0+h)-f(x^0)}{h}=a^-$$

42 都存在,且它们相等,$a^+=a^-$.[14][可证明反之亦真:即,如果上面的 a^+ 和 a^- 都存在,且 $a^+=a^-$,那么 f 在 x^0 处可微,且 $f'(x^0)=a^+=a^-$.]图 1.5(b)说明了 a^+ 和 a^- 都存在但不相等,因此 $f(x)$在 x^0 不可微的情况.

a^+ 和 a^- 都存在且不相等的另一个简单例子是

$$f(x)=|x|,\text{在 } x=0 \text{ 处},a^-=-1 \text{ 且 } a^+=1$$

因此,$f(x)=|x|$在原点($x=0$)处不可微.那么,一个连续函数可能不可微.从上述定义显然可见,如果一个函数在 x^0 点不连续,那么它在该点不可能是可微的.

连续性对可微性是必要的,但不是充分的.事实上,可以构造一个**处处不可微**的连续函数的例子.[15]

现在,如果 f 定义在R^n上或R^n的一个子集上,那么定义 1.8 需要修改,因为由于 x^0 是R^n中的向量,h 现在必须是一个向量.令 $\|h\|$ 是 h 的欧几里得范数,下面的定义是定义 1.8 的一个自然扩展.

【例 1.9】　令 X 是R^n中的一个开集,令 x^0 是 X 中的一个点.函数 $f:X\to R$称为**在 x^0 点可微**,如果存在一个 n 维向量a,使得

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x^0+h)-f(x^0)-a\cdot h}{\|h\|}=0 \tag{16}$$

这里 h 也是一个 n 维向量，$h\neq 0$ 且 $x^0+h\in X$. 向量 a 仍表示为 $f'(x^0)$，称为 **f 在 x^0 点的导数**. 如果 f 在 X 中的每一点都是可微的，那么 f 称作**在 X 中的一个可微函数**.

注：在导数的以上定义中，行向量和列向量的区别没有很大影响. 我们用点“·”表示欧几里得内积. 我们倾向于用 $a\cdot h$ 而不用 $a'h$，因为 a' 中的转置符号可能与导数符号混淆.

43 在定义导数时，“小 o”概念是非常有用的. 定义 1.9 可以用如下等价形式重述：f 称作**在 x^0 点是可微的**，如果在 R^n 中存在一个 a，使得

$$f(x^0+h)-f(x^0)=a\cdot h+o(\|h\|) \tag{16'}$$

这里 $o(\|h\|)$ 是一个 h 的高阶无穷小，定义为对 $h\neq 0$，有

$$\lim_{h\to 0}\frac{o(\|h\|)}{\|h\|}=0$$

这个 $o(\cdot)$ 常称作**“小 o”符号**. 更确切地，$o(\|h\|)$ 是表示任何“无穷小”的数量或向量的符号，在这个意义上，$r(h)=o(\|h\|)$ 表示对 $h\neq 0$，有

$$\lim_{h\to 0}\frac{r(\|h\|)}{\|h\|}=0$$

这里 $r(h)$ 是数量或向量. 类似地，$r(h)=o(\|h\|^2)$ 表示对 $h\neq 0$ 有

$$\lim_{h\to 0}\frac{r(\|h\|)}{\|h\|^2}=0$$

例如，如果 $h\in R$，$h^2=o(\|h\|)$，$h^3=o(\|h\|^2)$，且 $1/h\neq o(\|h\|)$. 因此，(16′)也可写成

$$f(x^0+h)-f(x^0)=a\cdot h+r(h)$$

这里 $r(h)=o(\|h\|)$，$r(h)$ 表示余量项. 这可解释为当 h 足够小时，$f(x)$ 能被 $f(x^0)$ 近似表示(这里 $x=x^0+h$)，并且近似误差等于 $r(h)$，其大小用 $o(\|h\|)$ 度量.

【定义 1.10】 在 R^n 中的开集上的一个实值函数 f 称作在 x^0 点有关于 x_i 的偏导，这里 $x^0\in X$，如果存在一个实数 a_i，使得

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x^0+e_ih)-f(x^0)-a_ih}{h}=0 \tag{17}$$

h 是一个数量，$h\neq 0$，e_i 是一个 n 维向量，其第 i 个元素等于 1，其他所有元素
44 都等于 0($i=1,2,\cdots,n$). 数量 a_i 是**f 在 x^0 点关于 x_i 的偏导**，并用 $\partial f(x^0)/\partial x_i$

表示.

令 $f:X\to R$，X 是R^n中的一个开集，x^0 是 X 中一点.那么，如下结论是基本的：

(i) 如果定义在R^n中的一个开集 X 上的一个实值函数 $f(x)$在 $x^0\in X$ 处可微，那么它在 x^0 处连续，且对它的每个坐标变量都有偏导，其中 $f'(x^0)=a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$可以写成

$$f'(x^0)=\left[\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1},\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_n}\right]$$

(ii) 函数 f 在 X 中的一个开集 D 中是可微的，其导数 $f'(x)$是连续的，当且仅当对于 D 中所有的 x，f 都有关于其每个坐标变量的连续偏导数.

注：函数 f 称作在 D 中**连续可微**，如果它是可微的，且如果 $f'(x)$对 D 中所有 x 都是连续的.(i)中所表述的向量 $f'(x^0)$称作 f 在 x^0 点的**梯度向量**，它也记作 f_x^0，$f_x(x^0)$或 $\nabla f(x^0)$.当 f 依赖于一些其他变量时，符号 f_x 是有用的，如 $f(x,y)$，这里 $y\in R^m$.在这种情况，f_x 表示 f 关于 x 的梯度向量(y 保持不变).

在导数的这些定义中，我们假设 f 是实值函数.我们可以自然地将导数的概念扩展到 f 是一个向量值函数的情况.

【定义 1.11】 令 X 是R^n中的一个开集，令 x^0 是 X 中的一点.函数 $f:X\to R^m$称作**在 x^0 点可微**，如果存在一个 $m\times n$ 的实矩阵 A，使得对 $h\in R^n$且 $x^0+h\in X$，有

$$f(x^0+h)-f(x^0)=Ah+o(\|h\|) \tag{18}$$

矩阵 A 记作$f'(x^0)$且它称作 f **在 x^0 点的导数**.如果 f 在 X 中的每一点都可微，那么 f 称作是 X **中的一个可微函数**.[(18)中的矩阵 A 可以证明是惟一的.]

45

注：在(18)中，为使乘积 Ah 有意义，Ah 中的 h 被取作一个列向量.然而，在导数的定义中，列或行向量之间的区别不应起任何重要作用.因此我们偏好于用 $A\cdot h$ 而不用 Ah.记 $f(x)=[f_1(x),\cdots,f_m(x)]$，我们容易证明 $f(x)$在 x^0 点是可微的，当且仅当对所有 i，$f_i(x)$在 x^0 点可微.矩阵 A 称为 f 在 x^0 处的**雅可比(矩阵)**，可写成如下形式：

$$A=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1(x^0)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(x^0)}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial f_m(x^0)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m(x^0)}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

记作 $A=f'(x^0)$. 雅可比矩阵也记作 $f_x{}^0$ 或 $f_x(x^0)$. 而且，当 f 依赖于除 x 之外的变量时，比如说 $f(x,y)$，记号 f_x 是有用的. 在这种情况，f_x 表示 f 关于 x 的雅可比矩阵(y 保持不变).

注意，由式(15)、(16)或(16′)、(18)等而得的所有可微或导数的定义实际上是一样的. 第一种定义是关于 $m=n=1$ 的情况，第二种定义是关于 $n\geqq 1$，$m=1$ 的情况，第三种定义则是关于 $n\geqq 1, m\geqq 1$ 的情况.

1.5.2 一些重要结论

现在，我们列出一些涉及导数的重要结论. 首先，扩展初级微积分的一个重要定理(称作链式法则).

【定理 1.4】(复合函数定理) 令 $f: X\to R^m$，这里 X 是 R^n 的一个开集，令 $g: Y\to R^k$，这里 Y 是 R^m 中的一个开集，且有 $f(x)\subset Y$. 设 f 在 X 中的 x^0 处可微，且 g 在 $f(x^0)$ 处可微. 那么函数 $h=g\circ f: X\to R^k$，由 $h(x)=g[f(x)]$ 定义，在 x^0 处可微，且 $h'(x^0)=g'[f(x^0)]f'(x^0)$，这里乘积 $g'f'$ 遵循矩阵乘法的一般规则. f' 是一个 $m\times n$ 矩阵，g' 是一个 $k\times m$ 矩阵，因此 $g'f'$ 是一个 $k\times n$ 矩阵.

46

【例 1.5】

(a) 令 $n=k=1$，且 $m>1$. 在这个例子中，记 $f(x)=[f_1(x),\cdots,f_m(x)]$ 且 $y_i=f_i(x)$，我们有

$$h'(x)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial g}{\partial y_i}\frac{\partial f_i}{\partial x}$$

特别地，如果 $f(x)=a+bx, x\in R$ 和 $a,b\in R^m$，那么我们有

$$h'(x)=g'(y)\cdot b$$

(b) 令 $n=m=2$ 且 $k=1$，令 $z=g(x,y), x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$(即极坐标系).

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\cos\theta,\ \frac{\partial x}{\partial \theta}=-r\sin\theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial r}=\sin\theta,\ \frac{\partial y}{\partial \theta}=r\cos\theta$$

因此,令 $h(r,\theta)\equiv g(r\cos\theta,r\sin\theta)$,我们有

$$\frac{\partial h}{\partial r}=(\cos\theta)g_x+(\sin\theta)g_y$$

$$\frac{\partial h}{\partial \theta}=(-r\sin\theta)g_x+(r\cos\theta)g_y$$

这里 $g_x\equiv\frac{\partial g}{\partial x}$,$g_y\equiv\frac{\partial g}{\partial y}$.

令 $f(x,z)=0$,这里 f 是在 $R\times R$ 上的一个连续可微函数.如果我们取函数 Φ 使得 $x=\Phi(z)$,且 $f[\Phi(z),z]=0$,那么我们说 $f(x,z)=0$ 是"对 x 可解的".对 $f(x,z)=0$ 微分,我们得 $f_x dx+f_z dz=0$,这里 f_x 和 f_z 分别是关于 x 和 z 的偏导.因此,$dz/dx=\Phi'=-f_z/f_x$.所以,为了对 x 解 $f(x,z)=0$,关键要有 $f_x\neq 0$.这可以推广到 x 是一个 n 维向量,z 是一个 m 维向量的情况.换句话,我们可得到定理1.5.定理1.4和1.5可能是高等微积分中最重要的定理.

【定理 1.5】(隐函数定理) 令 $f:D\to R^n$ 是一个连续可微函数,这里 D 是 $R^n\times R^m$ 中的一个开集.令 (x^0,z^0) 是 D 内的一点,并有 $f(x^0,z^0)=0$.如果 f 在 (x^0,z^0) 取值的 x 的雅可比矩阵 $f_x(x^0,z^0)$ 是非奇异的,那么存在惟一的连续可微函数 Φ,使得 $x^0=\Phi(z^0)$ 且对 z^0 的某一邻域内的所有 z 有

47

$$f[\Phi(z),z]=0$$

注:定理1.5只提供了函数 $\Phi[=(\Phi_1,\cdots,\Phi_n)]$ 的局部存在或 $f(x,z)=0$ 关于 x 为 $x=x(z)$ 的"可解性"的一个充分条件,因为 $f[\Phi(z),z]=0$ 只在 z^0 的一个邻域中成立.函数 $\Phi(z)$ 由 $f[\Phi(z),z]=0$ 隐含地定义,定理的名称也由此而得.雅可比矩阵 f_x 非奇异性仅提供了函数 Φ 存在的充分条件的一部分,而不是必要条件.

对 $f(x,z)=0$ 全微分,得

$$f_x dx+f_z dz=0$$

这里 f_x 和 f_z 分别是 f 关于 x 和 z 的雅可比矩阵,我们得 $dx=-(f_x^{-1}f_z)dz$.这个等式给出了 $dx_1,dx_2,\cdots,dx_n$,因此也给出了未知函数 Φ 的所有偏导 Φ_1,$\Phi_2,\cdots,\Phi_n$.显然,为了使等式 $dx=-(f_x^{-1}f_z)dz$ 有意义,f_x 必须是非奇异的.

类似地,令 $f(x,z)$ 是一个线性方程组

$$f(x,z)\equiv Ax+z=0$$

这里 A 是一个 $n\times n$ 矩阵，x 和 z 是 n 维(列)向量.为了使方程有惟一解 x，矩阵 A 必须是非奇异的.这种情况下，x 被惟一地确定为 $x=-A^{-1}z$.由于矩阵 A 确切地对应于 f 关于 x 的雅可比矩阵，这个例子也证明了定理 1.5 中雅可比矩阵的非奇异性对隐函数的存在起着关键作用.

下面的例子说明定理 1.5 在经济学中的重要性.

【例 1.6】 令 f_i 表示对第 i 种商品的超额需求(即需求减去供给)，并令均衡条件写成

$$f_i(p_1,p_2,\cdots,p_n,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=0,i=1,2,\cdots,n$$

48 或更简明地，$f(p,\alpha)=0$，这里 p_i 表示第 i 种商品的价格，α 是影响超额需求参数的向量.如果 f 连续可微，且 f 关于 p 的雅可比矩阵 f_p 是非奇异的，那么存在惟一一个连续可微函数 Φ 使得 $p=\Phi(\alpha)$.量 $\partial\Phi_i/\partial\alpha_j$ 用来衡量第 j 个参数对第 i 个价格变化的影响.众所周知，这是在**比较静态**方面的一个练习.

前面的定理和所谓的反函数定理有紧密的联系.

【定理 1.6】(反函数定理) 令 $f:X\to R^n$ 是一个连续可微函数，这里 X 是 R^n 中的一个开集.如果在 X 中某点 x^0 处雅可比 $f'(x^0)$ 是非奇异的，那么存在惟一的连续可微函数 Φ，使得对 x^0 的某邻域内的一切 x，有

$$\Phi[f(x)]=x$$

这里 Φ 的定义域是开集 $Y\subset f(X)$，且有 $f(x^0)\in Y$.

函数 Φ 是 f 的**反函数**，记为 f^{-1}.这个定理表明，粗略地说，一个连续可微函数 f 在其雅可比行列式 $f'(x^0)$ 非奇异的 x^0 的某一邻域内可反.

虽然，其证明可能不被广泛了解，但如下结论对经济学家来说是熟知的，并已广泛地用于经济学文献中.[16]

【定理 1.7】(欧拉定理) 令 $f(x)$ 是定义在 R^n 中的开集 X 上的一个可微实值函数.那么 $f(x)$ 是 m 阶齐次的，当且仅当对 X 中的所有 x，有 $f'(x)\cdot x=mf(x)$，也就是对所有 X 中的 x，

$$f_1(x)x_1+f_2(x)x_2+\cdots+f_n(x)x_n=mf(x)$$

这里

$$f_i\equiv\partial f/\partial x_i,i=1,2,\cdots,n \tag{19}$$

49 注：函数 f 称作是 m 阶齐次的，如果对任何实数 $\alpha\neq0$[17] 且对所有的 x，有

$$f(\alpha x)=\alpha^m f(x) \tag{20}$$

等式(19)给出了齐次函数的一个完备特征，它称为对齐次函数的**欧拉等式**.

【例 1.7】 令 $f(x)$是一个生产函数.用一个流行的定义,如果 f 是一次齐次的,函数 f 称作**规模收益不变**的.在这个例子中,欧拉等式可以写为对所有 x,有

$$f_1(x)x_1+f_2(x)x_2+\cdots+f_n(x)x_n=f(x)$$

这里 $f_i(x)\equiv\partial f/\partial x_i$,表示第 i 种要素的边际产量.边际生产力理论的一个重要问题是当每个要素按其边际生产力取得报酬时,产出是否无剩余或无短缺地分配给所有参与要素.这个问题称作是**产品耗尽问题**,当生产函数显示规模收益不变时,由上述方程可以简单地得到解.[18]

1.5.3 高阶导数和海赛矩阵

令 $f(x)$是定义在 R^n 中的开集 X 上的一个可微实值函数,它的导数 $f'(X)$依赖于其极限取值的一个特殊点 x,因此,一般地,它是 x 的一个函数.给定函数 $g(x)\equiv f'(x)$,我们可以定义它的导数 $g'(x)$(当其存在时).我们将其记作 $f''(x)$,并称 $f''(x)$为 f 在 x 处的**二阶导数**.与此相应,$f'(x)$也称作 f 在 x 处的**一阶导数**.一般地,$f''(x)$也依赖于 x,因此是 x 的一个函数.重复这个过程,我们可以类似地定义 f 在 x 点的 **k 阶导数(当它存在时)**,我们用 $f^{(k)}(x)$表示它.如果 $f''(x)$存在,f 称作是**在 x 点二次可微**.类似地,如果 $f^{(k)}(x)$存在,f 是在 x 处 **k 次可微**.$f'(x)$和 $f'(x)$分别是 $f^{(1)}$和 $f^{(2)}$的常用符号.如果 $f^{(k)}$是可微的,且它的导数 $f^{(k+1)}(x)$对 X 中的每个 x 都是连续的(即如果 $f^{(k)}(x)$是连续可微的),那么 f 称作是 $C^{(k+1)}$ **阶函数**(在定义域 X 上).因此如果 $f\in C^{(1)}$,f 是连续可微的.如果 $f\in C^{(2)}$,f 称作是一个**二次连续可微函数**.[19]

49

回忆当 $f:X\to R$,$X\subset R^n$时,$f'(x)=[\partial f(x)/\partial x_1,\cdots,\partial f(x)/\partial x_n]$.注意,$g_i(x)\equiv\partial f(x)/\partial x_i$ 也是一个实值函数.那么以一种类似的方式定义它的偏导(如果它们存在),用 $\partial g_i(x)/\partial x_j=\partial^2 f(x)/\partial x_i\partial x_j$ 等表示这些偏导,它们称为 f 在 x 处的**二阶偏导**.例如,如果 $f(x,y)=xy^2$,$x,y\in R$,那么 $\partial f/\partial x=y^2$,$\partial^2 f/\partial x^2=0$,$\partial f/\partial y=2xy$,$\partial^2 f/\partial x\partial y=\partial^2 f/\partial y\partial x=2y$,$\partial^2 f/\partial y^2=2x$.高阶的偏导,$k=3,4,\cdots$,可以类似地定义.

上面我们已经定义了高阶导数,这里我们把焦点放于二阶导数上.为此,用下列等价形式重述定义是有启发性的.

【定义 1.12】 令 X 是 R^n 中的一个开集,令 x^0 是 X 中一点.函数 $f:X\to R$ 称作**在 x^0 点是二次可微**的,如果存在一个 $a\in R^n$ 和一个 $n\times n$ 实矩阵 A,使得

51

$$f(x^0+h)-f(x^0)=a\cdot h+(1/2)h\cdot(Ah)+o(\|h\|^2) \tag{21}$$

n 维向量 a 称作是 f 在 x^0 点的**一阶导数**,A 称作是 f **在 x^0 的二阶导数**,a 记

作$f'(x^0)$，A记作$f''(x^0)$. 函数f称作X中的一个二次可微函数，如果$f(x)$在X中的每一点都是二次可微的.

注：在(21)式中，为了使乘积Ah有意义，(Ah)中的h被取作一个列向量. 因此，令$A=[a_{ij}]$，$h\cdot(Ah)$表示

$$h\cdot(Ah)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}h_ih_j$$

如果我们用h'表示h的转置，那么$h\cdot(Ah)$也可写成$h'Ah$.

注：如果f在x^0点二次可微，那么对所有i和j，$\partial f(x^0)/\partial x_i$和$\partial^2 f(x^0)/\partial x_i\partial x_j$都存在，且$a$和$A$可以写作$a=[\partial f(x^0)/\partial x_1,\cdots,\partial f(x^0)/\partial x_n]$，以及

$$A=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 f(x^0)}{\partial {x_1}^2} & \dfrac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_1\partial x_n}\\ \dfrac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_2\partial x_1} & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_2\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \dfrac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_n\partial x_1} & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x^0)}{\partial {x_n}^2}\end{bmatrix}$$

矩阵A称作f在x^0点的**海赛矩阵**. 函数$f''(x)$在x^0点连续，当且仅当二阶偏导$\partial^2 f(X)/\partial x_i\partial x_j$，$i,j=1,2,\cdots,n$，在$x^0$都连续，在这种情况，我们有

$$\frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_j\partial x_i},\quad i,j=1,2,\cdots,n$$

我们称之为**Young定理**. 因此，如果$f(x)$在X中二次连续可微，那么它的海赛矩阵$f''(x)$对X中的所有x都是对称的. 这里$f''(x)$的连续性假设是十分重要的.

如果$f''(x)$在x^0不连续，那么$f''(x^0)$可能是不对称的. 在微积分或高等微积分的教科书中有许多这样的例子. 下面的例子可以在Apostol(1957，120页)找到：

$$\text{如果}(x_1,x_2)\neq 0,f(x_1,x_2)=(x_1x_2)({x_1}^2-{x_2}^2)/({x_1}^2+{x_2}^2)$$

且$f(0,0)=0$. 常规的计算揭示出$\partial^2 f(0,0)/\partial x_1\partial x_2\neq\partial^2 f(0,0)/\partial x_2\partial x_1$. 最后，我们指出关于内积和二次型的微分一些简单而有名的公式. 令a是R^n中的一个常向量，并且A是一个$n\times n$常数矩阵，那么我们有

$$f(x)=a\cdot x,\text{推出}f'(x)=a\text{和}f''(x)=0 \tag{22}$$

$$f(x)=x\cdot(Ax),\text{推出}f'(x)=2Ax\text{和}f''(x)-2A \tag{23}$$

这里(22)式中$f''(x)=0$的0是$n\times n$零矩阵.

1.5.4 凹函数和凸函数

【定义 1.13】 给定R^n中的x和y,z由$z\equiv\theta x+(1-\theta)y$定义,$0\leqq\theta\leqq1$,则$z$称为$x$和$y$的一个**凸组合**.[20]

凸组合的概念可由图1.6表示.这里我们应注意,如果$\theta=1$,则$z=x$;如果$\theta=0$,则$z=y$.

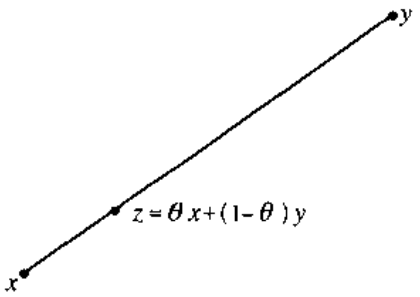


图 1.6 凸组合的图示

【定义 1.14】 令S是R^n的子集.集合S称为一个**凸集**,如果S中的任意两点的凸组合都在S中.也就是,S是凸的,如果

$$x,y\in S \text{ 推出 } \theta x+(1-\theta)y\in S,0\leqq\theta\leqq1$$

53 比如说,一个圆周不是一个凸集,但包含一个圆的所有内点的一个圆面是一个凸集.中文字符"凸"(意为"convex")所覆盖的区域不是凸的.凸集是经济学分析中最重要的概念之一.

凸集的下列性质是有用的:

(i) 凸集的任何交(有限或无限)也是凸的.

(ii) 如果$S_i,i=1,2,\cdots,k$,是R^n中的凸集,那么它们的**线性和**定义为

$$S\equiv\{z:z=\alpha_1x^1+\alpha_2x^2+\cdots+\alpha_kx^k,x^i\in S_i,\alpha_i\in R,i=1,2,\cdots,k\}$$

也是凸的.

(iii) 如果$S_i,i=1,2,\cdots,k$是R^n中的凸集,那么它们的笛卡尔积,$S_1\times S_2\times\cdots\times S_k$,也是凸的.

现在,我们介绍凹函数的概念.

【定义 1.15】 令f是一个定义在R^n中的凸集(不一定是开的)X上的实值函数.函数f称为**凹函数**,如果对所有$x,y\in X$和$0\leqq\theta\leqq1$,有

$$f[\theta x+(1-\theta)y]\geqq\theta f(x)+(1-\theta)f(y)$$

54 如果上面定义中的不等号对所有 $x,y\in X$,且 $x\neq y$ 和 $0<\theta<1$ 严格地成立,那么 f 称为一个严格凹函数.另一方面,如果 $-f$ 是凹函数(或**严格凹函数**),f 称为一个**凸**(或**严格凸**)**函数**.

注意 f 的定义域 X 限制为一个凸集.这是为了保证只要 x,y 在 X 中,则 $\theta x+(1-\theta)y$ 也在 X 中,否则 $f[\theta x+(1-\theta)y]$ 没意义.一个常见的混淆词是"凹集".凹函数和凸函数表示某一类函数,而不是集合,而凸集表示一类集合而不是一类函数.除非研究者想创造这样一个概念,否则"凹集"就是把集合与函数弄混了.

显然,如果一个函数是严格凹的(或严格凸的),它自动地是凹的(或凸的).图 1.7(这里 $X=R$)表示了一个(严格)凹函数.直观地,f 是一个凹函数,如果函数上任两点的连线在函数上或位于函数的下面.f 定义于其上的集合 X 必须是凸的,否则 $\theta x+(1-y)$ 就可能不在函数 f 的定义域 X 中.

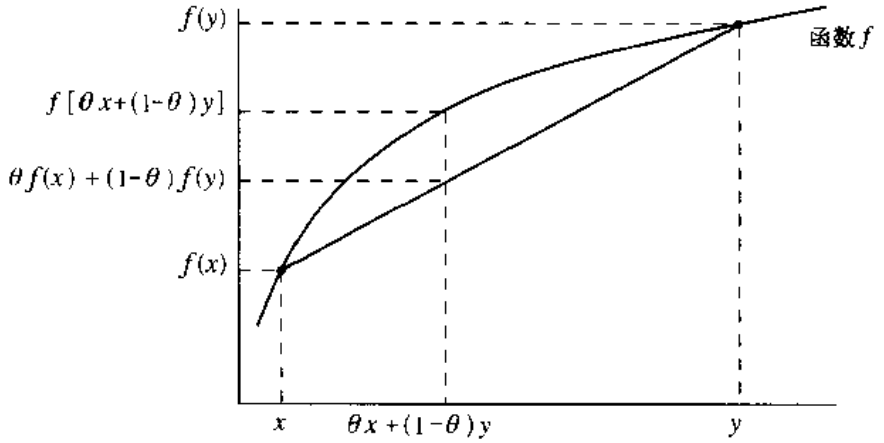


图 1.7 凹函数的图示

特别地,函数 $f:R^n\to R$,由 $f(x)=a\cdot x+a_0$ 定义,(这里 a 是 R^n 中的一个常向量,a_0 是一个数量)既是凹的又是凸的(但既不是严格凹的又不是严格
55 凸的).同样,有许多既不严格凹又不严格凸的实值函数.凹(或凸)函数的概念,因其定义性质是与定义域内的所有点有关的,从这种意义上讲是一个全局概念.另一方面,可以考虑一个局部凹(或凸)函数,即函数在定义域 X 的某一子集上是凹的(或凸的).例如,三角函数

$$f(x)=\sin x,\ x\in X=[0,2\pi]$$

在 $[0,\pi]$ 上是一个凹函数,在 $[\pi,2\pi]$ 上是一个凸函数.

定理 1.8 中归纳了凹函数的一些有用性质.

【定理 1.8】

(i) 令 $f:X\to R$ 是一个凹函数,这里 X 是 R^n 中的一个凸集,那么集合

$$L=\{x:x\in X,f(x)\geqq\alpha\}$$

对任何 $\alpha\in R$ 都是凸的.

(ii) 凹函数每个非负线性组合也是凹的. 也就是, 如果 $f_i: X \to R, i=1, 2, \cdots, k$, 是凹的, 且 X 是R^n中的一个凸集, 那么

$$f(x)=\alpha_1 f_1(x)+\alpha_2 f_2(x)+\cdots+\alpha_k f_k(x), \quad \alpha_i \geqq 0, i=1,2,\cdots,k$$

也是 X 上的一个凹函数.

(iii) 函数 $f: X \to R$, 这里 X 是R^n中的一个凸集, f 是凹函数, 当且仅当对每个整数 $k \geqq 1$, 对所有 $x^i \in X, \theta_i \in R, \theta_i \geqq 0, i=1,2,\cdots,k$, 且 $\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_k=1$, 有

$$f(\theta_1 x^1+\theta_2 x^2+\cdots+\theta_k x^k) \geqq \theta_1 f(x^1)+\cdots+\theta_k f(x^k)$$

(iv) 函数 $f: X \to R$, 这里 X 是R^n中的凸集. f 是凹的, 当且仅当

$$\{(x,\alpha): x \in X, \alpha \in R, f(x) \geqq \alpha\}$$

是 R^{n+1}中的凸集.

(v) 每个凹函数在函数定义域的内部(内点集合)都是连续的.

注: 上面定理中命题(i)的逆命题不一定为真. 一个比 f 的凹性更弱的性质就可保证集合的凸性. 这个性质称作"拟凹性", 在后面将要讨论. 命题(i)中的集合 L 常称作**上水平集或上等高集**. 这在图 1.8 中用阴影面积表示. 这里

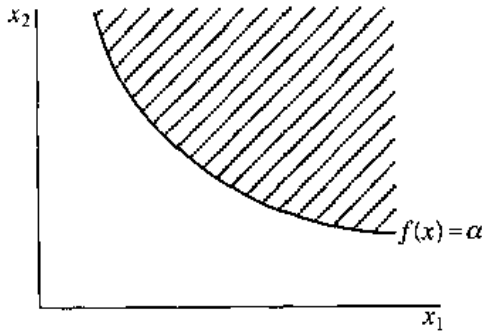


图 1.8 上等高集

假设当任一个坐标变量 x_i 增加时, $f(x)$也增加(或$\partial f/\partial x_i>0$). 在消费者选择理论中, $f(x)$被作为特定消费者的效用函数, 集合 L^* 由

$$L^* \equiv \{x: x \in X, f(x)=\alpha\}$$

定义, 称作**无差异曲线(平面)**或一个**水平集**. 在生产理论中, $f(x)$当作某一特定产品的生产函数, 集合 L^* 称作**生产等产量线**, 这里 α 常被取作正实数.

注: 一个凹函数的定义域 X 常被取作是整个R^n空间, 在这种情况下, 由定

57 理 1.8 的命题(v),如果它是凹(或凸的),f 总是连续的.另一方面,如果 X 是一个闭集,一个凹函数可能在边界点是不连续的.这种函数的一个例子是:f: $X\to R, X=(0,\infty)$,定义为

$$f(x)=1, x\neq 0, \text{且 } f(0)=0$$

定理 1.9 给出了**可微的**凹函数或严格凹函数的一个完备特性,它在经济学分析中是非常有用的.

【定理 1.9】 令 f 是一个定义在 R^n 中一个开凸集 X 上的可微实值函数.那么 f 是凹的,当且仅当对所有 $x, x^0\in X$,

$$f_x{}^0\cdot(x-x^0)\geqq f(x)-f(x^0) \tag{24}$$

这里 $f_x{}^0$ 是 f 在 x^0 点赋值的梯度向量.同样,f 是严格凹的当且仅当以上不等号严格成立,即,当且仅当对 X 中的所有 x, x^0,且 $x\neq x^0$ 时,有

$$f_x{}^0(x-x^0)>f(x)-f(x^0)$$

注:定理 1.9 在图 1.9 中给出说明.由于函数 f 是凸的(或严格凸的),当且仅当 $-f$ 是凹的(或严格凹的),我们可通过把定理 1.9 的不等号反向而得到可微的凸或严格凸函数的完备特性.

【例 1.8】 令 $y=f(x)$ 是生产函数(假设它是可微的),这里 x 表示 n 个要素的投入向量,y 表示(一个单一产品的)产出.设 $f(x)$ 是凹的,那么由定理 1.9 的(24)式,我们有:对任意两点 x^0 和 x^1,

$$f_x{}^0\cdot(x^1-x^0)\geqq f(x^1)-f(x^0)$$

和

$$f_x{}^1\cdot(x^0-x^1)\geqq f(x^0)-f(x^1)$$

把两个不等式相加,我们得到对所有 x^0 和 x^1,有

$$(f_x{}^0-f_x{}^1)\cdot(x^1-x^0)\geqq 0$$

对所有除 $j=i$ 外的 j,令 $x_j^1=x_j^0$,那么对所有 x^0, x^1,我们有

$$\left[\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}-\frac{\partial f(x^1)}{\partial x_i}\right](x_i^1-x_i^0)\geqq 0$$

即,如果 $x_i^1>x_i^0$,则

$$\partial f(x^1)/\partial x_i \leqq \partial f(x^0)/\partial x_i$$

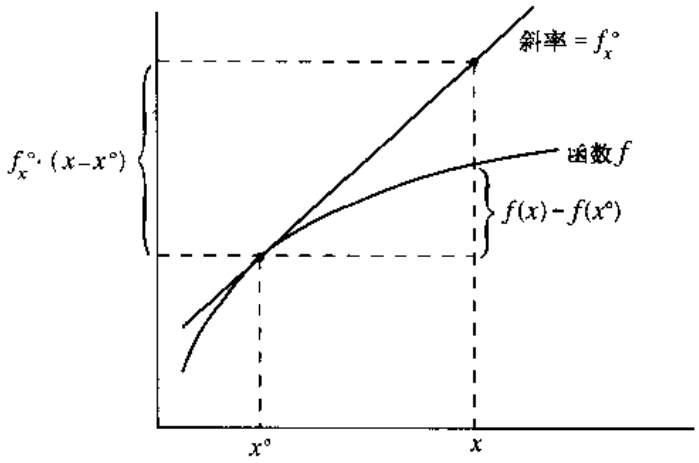


图 1.9　定理 1.9 的图示

由于 i 的选择是任意的，对任何 $i=1,2,\cdots,n$，上述不等式都成立. 因此我们可以得出结论，如果 $f(x)$是凹的，那么如果要素的投入是递增的，任何要素的边际产品($\partial f/\partial x_i$)是非递增的. 上面讨论说明经济学上的这个基本原则与生产函数的凹性是紧密相关的. 把 $f(x)$当作是一个消费者的效用函数，类似讨论也可用在消费者的选择理论的内容中. 例如，我们可以得出结论，如果效用函数是凹的，那么当任何商品的消费增加时，这种商品的边际效用($\partial f/\partial x_i$)是非递增的.

定理 1.10 根据海赛矩阵给出了凹和严格凹函数的重要特征.

【定理 1.10】 令 f 是定义在R^n中的开凸集 X 上的一个二次可微实值函数，并令$f''(x)$是其海赛矩阵. 那么：

(i) 函数 f 在 X 上是凹的，当且仅当对所有 $x\in X$，$f''(x)$是半负定的.

59　(ii) 函数 f 在 X 上是严格凹的，如果对所有 $x\in X$，$f''(x)$是负定的.

(iii) 函数 f 在 X 上是凸的，当且仅当对所有 $x\in X$，$f''(x)$是半正定的.

(iv) f 是严格凸的，如果对所有 $x\in X$，$f''(x)$是正定的.

注：显然可以分别从命题(i)和(ii)立即得出命题(iii)和(iv)，因为 f 是(严格)凸的，如果 $-f$ 是(严格)凹的.

凹性或凸性是一个全局概念，因此，定理 1.10 中的每个命题中的短语"对所有 $x\in X$"是必须的. 如果 $f(x)$在其定义域 X 的凸子集 S 中是凹的或凸的，那么要用 S 代替 1.10 中的 X.

命题(ii)和(iv)的逆命题不一定成立. 例如

$$f(x)=-(x-1)^4, x\in R$$

是严格凹的，但是

$$f''(1)=0$$

现在回忆定理 1.3,它根据(方)矩阵的主子式描述矩阵的确定性.令 $f''(x)=[a_{ij}]$,并如(13)和(14)定义行列式 D_k 和 $\tilde{D}_k$.那么结合定理 1.10 和定理 1.3,我们就得到定理 1.11.

【定理 1.11】 令 $f(x)$是定义在R^n中的开凸集x 上的二次连续可微实值函数.那么:

(i) 函数 f 是凹的,当且仅当对所有 $x\in X$,有

$$\tilde{D}_1\leqq 0,\tilde{D}_2\geqq 0,\cdots,(-1)^n\tilde{D}_n\geqq 0$$

(ii) 函数 f 是严格凹的,如果对所有 $x\in X$,有

$$D_1<0,D_2>0,\cdots,(-1)^nD_n>0$$

(iii) 函数 f 是凸的,当且仅当对所有 $x\in X$,有

$$\tilde{D}_1\geqq 0,\tilde{D}_2\geqq 0,\cdots,\tilde{D}_n\geqq 0$$

60 (iv) 函数 f 是严格凸的,如果对所有 $x\in X$,有

$$D_1>0,D_2>0,\cdots,D_n>0$$

注:命题(ii)和(iv)的逆命题不一定为真.

【例 1.9】 令 $y=f(x_1,x_2)$为凹函数,对所有(x_1,x_2),有$\partial^2 f/\partial x_1^2<0$ 和 $\partial^2 f/\partial x_2^2<0$(收益递减或边际效用递减).如果 f 是一阶齐次的,那么用定理 1.11 很容易证明 f 是凹的(但不是严格凹的).特别地,如果 f 是"Cobb-Douglas形式",

$$f(x_1,x_2)=x_1^{\alpha}x_2^{\beta},0<\alpha,\beta<1$$

那么,当 $\alpha+\beta=1$ 时,f 是凹的.另外用定理 1.11 也可证明,如果 $\alpha+\beta<1$,f 是严格凹的.

1.5.5 拟凹函数

与定理 1.8 相关,在 1.5.4 中已经说明,尽管相关函数的凹性保证了水平集的凸性,但其逆命题不一定成立.实际上一个较弱的概念已足以保证水平集的凸性.现在,我们定义这样的一个概念和与之紧密相关的一些概念.

【定义 1.16】 令 f 是一个定义在R^n中一个凸集 X 上的实值函数.函数 f 称为是**拟凹**的,如果对所有 $x,x^0\in X$,

61

$$f(x)\geqq f(x^0)\text{推出 } f[\theta x+(1-\theta)x^0]\geqq f(x^0),0\leqq\theta\leqq 1^{[21]} \tag{25}$$

函数 f 称为是**严格拟凹的**，如果对所有 $x,x^0\in X$ 且 $x\neq x^0$，

$$f(x)\geqq f(x^0)\text{推出 } f[\theta x+(1-\theta)x^0]>f(x^0),0<\theta<1 \tag{26}$$

函数 f 称作是**显式拟凹的**，如果它是拟凹的，且对所有 $x,x^0\in X,x\neq x^0$，

$$f(x)>f(x^0)\text{推出 } f[\theta x+(1-\theta)x^0]>f(x^0),0<\theta\leqq 1^{[22]} \tag{27}$$

容易证明上水平集

$$L\equiv\{x:x\in X,f(x)\geqq\alpha\}$$

对每个 $\alpha\in R$ 都是凸的，当且仅当函数 f 是拟凹的. 还可证明每一个凹函数都是拟凹的，但反之不一定成立.[23]

下面是一些不是凹函数的拟凹函数例子：

(a) $f(x)=x^2$，这里 $X\equiv\{x:x\in R,x\geqq 0\}$

(b) $f(x)=x_1^{\alpha}x_2^{\beta}$，这里 $\alpha,\beta>0,\alpha+\beta>1$ 且 $X\equiv\{x:x\in R^2,x_1,x_2\geqq 0\}$

62 事实上，可以证明如果 $X\subset R$，任何单调增(或减)函数是严格拟凹的. 同样，从定义 1.16，显然每个显式拟凹函数都是拟凹函数，每个严格拟凹函数都是显式拟凹的. 进一步可以证明，每个凹函数是显式拟凹的，且每个严格凹函数都是严格拟凹的. 凹性和拟凹性的几种概念之间的关系可以系统总结在图 1.10 中，这里箭头("⇒")读作"推出"，箭头方向的逆命题不一定成立.[24]

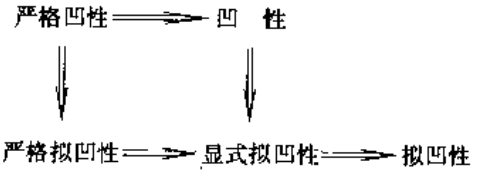


图 1.10 凹性与拟凹性之间的关系

本书中一个令有感兴趣的例子是 Cobb－Douglas 函数，其定义为

$$f(x)=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n},0<\alpha_i<1,i=1,2,\cdots,n,\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$$

可以证明这个函数在 $X=\{x:x\in R^n,x>0\}$ 上是严格拟凹和凹的，但不是严格凹的. 在定义 1.16 中，我们定义了拟凹性的三个概念. 这三种概念间的区别可用一个水平集(无差异曲线)很好地图示，该水平集为

$$L^*=\{x:x\in X,f(x)=a\},a\in R.$$

63 严格拟凹性表示无差异曲线严格地朝原点"向里弯"[见图 1.11(a)]. 显式(但不是严格的)拟凹性表示每个无差异"曲线"可包含一个"平的"或线性分段[见图 1.11(b)]；拟凹性(既不是显式拟凹又不是严格拟凹)表示每个无差异"曲

线"可以包含一个厚的区域[见图 1.11(c)].

三种拟凹性的经济含义不难理解.可以用通常的消费者选择理论来说明.该理论中,消费者选择一个消费束 $x\in R^n$,使得

$$\text{(UM)}\quad \text{Maximize}\quad u(x),\text{满足 } p\cdot x\leqq Y \text{ 且 } x\geqq 0$$

这里 $u(x)$=效用函数,Y=收入,p=价格向量,且 p 和 Y 对消费者来说是给定的参数.问题的解可记为 $x^*=x(p,Y)$.通过把预算线 $p\cdot x=Y$ 加到图 1.11 的三个图中,读者应能够容易看到,如果效用函数是拟凹的或显式拟凹的,那么需求函数 $x(p,Y)$可以是多值的(即,可以有多于一个,实际上是无限多个 x^*,是这个效用最优化问题的解).另一方面,如果 $u(x)$是严格拟凹的,效用最大化问题的解是惟一的,因此需求函数是单值的.效用函数的严格拟凹性表示消费者更喜欢消费多种商品而不是消费任何一种商品:任何两个无差异的商品束的凸组合(权数为正),比这两个商品束中的任一个都要好.一个厚的无差异"曲线"(或带)表示在商品的消费"轻微"增加时,消费者可能体会不出效用水平变化.在这本书中,我们不用担心多值函数的情况.如果我们假设 $f(x)$是严格拟凹,或有相关约束的最大或最小化问题的解是单值的,许多结论就可以用一种简单直接的方式得到,而不会失掉太多经济学上的考虑.

最后,我们可以得出就导数而言的拟凹函数的特征.

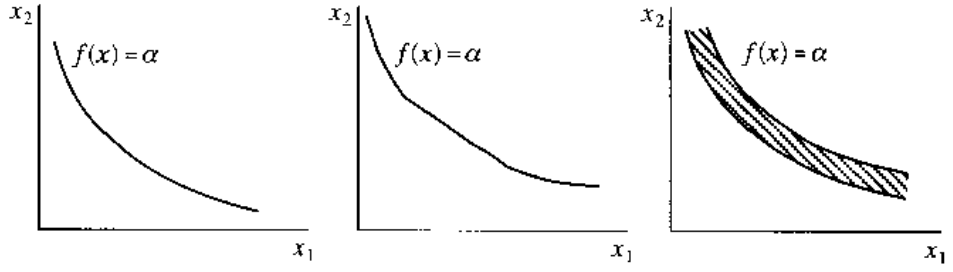


图 1.11　三种拟凹函数的无差异曲线

【定义 1.7】 令 f 是定义在R^n中开集 X 上的一个实值函数.假设它在 X 中是二次可微的.那么如下矩阵 B 称作是 f 的**加边海赛矩阵**(f 的海赛矩阵加边 f_i):

$$B=\begin{bmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1 & f_{11} & f_{n2} & \cdots & f_{1n} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n & f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix}$$

这里，$f_i \equiv \partial f/\partial x_i$，且 $f_{ij} = \partial^2 f/\partial x_i \partial x_j$，$i,j = 1,2,\cdots,n$. 显然，矩阵 B 依赖于这些导数赋值处的 x. 令 B 的第 $k+1$ 个顺序主子式，我们称之为**第 k 个加边海赛行列式**，记作 B_k，这里

$$B_k \equiv \begin{bmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & \cdots & f_k \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1k} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_k & f_{k1} & f_{k2} & \cdots & f_{kk} \end{bmatrix}, k = 1,2\cdots,n$$

显然，矩阵 B_k 也依赖于 x. 我们用如下定理来结束这一章：

65 **【定理 1.12】** 令 $f(x)$ 是 R^n 上的一个二次连续可微实值函数. 那么以下结论成立：

(i) 如果 $f(x)$ 在 R^n 中是拟凹的，那么对所有 $x \geqq 0$，有

$$B_1 \leqq 0, B_2 \geqq 0, B_3 \leqq 0, \cdots, (-1)^n B_n \geqq 0 \text{(这里 } B_1 \leqq 0 \text{ 显而易见成立)}.$$

(ii) 相反地，如果对所有 $x \in R^n$，

$$B_1 < 0, B_2 > 0, B_3 < 0, \cdots, (-1)^n B_n > 0$$

那么 $f(x)$ 在 R^n 中是严格拟凹的.

注：这个定理是在对 Arrow 和 Enthoven(1961)的定理 5 重新证明时得来的.

▶ 练习题

A

(1) 令 A_n, B_n 和 C_n 是 R 中的区间，其中

$$A_n = [0,1/n], B_n \equiv (0,1/n], C_n \equiv (-1/n, n)$$

这里 n 是一个正整数. 求

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n, \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n, \text{和} \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

(2) 定义下列概念：

(a) 内积

(b) 范数

(c) 序列，子序列

66 (d) 极限

(e) 极限点

(f) 内点

(g) 邻域

(h) 闭集，开集

(i) 连续函数

(j) 紧集

(k) 列紧性

(t) 线性函数，仿射函数

(m) 梯度向量

(n) Landau 的“o”

(o) 雅可比矩阵

(p) 凹函数

(q) 严格拟凹函数

(y) m 阶齐次函数

(s) 海赛(Hessian)矩阵

(t) 半负定

(3) 叙述下列定理：

(a) 关于最大和最小值存在的 Weierstrass 定理

(b) 复合函数定理

(c) 隐函数定理

(d) 关于齐次函数的欧拉定理

(4) 为下列每个命题，举出一个例子：

(a) S 是 R 的一个子集，它不含有它的上确界.

(b) 无限个闭集的并不是闭集.

(c) 无限个开集的交不是开集.

(d) 不可微的连续函数.

(e) 既不凹又不凸的函数.

(f) 既凹又凸的函数.

(g) 不连续的凸函数.

67 (h) 不凹的拟凹函数.

(i) R^2 上的严格拟凹函数，但它不是严格凹的.

(j) 非凹函数，其上等高集是凸的.

(k) 半负定的但不是负定的矩阵.

B

(1) 集合运算：

(a) 令 A 和 B 是 R^n 中的闭集，证明 $A \cap B$ 也是闭的.

(b) 令 A 和 B 是 R^n 中的凸集，证明 $A \cap B$ 也是凸的. 同样，证明 $A+B$ 也是凸的.

(2) 令 $f: R^n \to R^m$. 已知 f 在 R^n 中是连续的，当且仅当对 R^m 的任何闭子集 T，$f^{-1}(T)$ 是闭的. 利用它，证明如下命题：

(a) 令 $b \in R^m$，那么如果 f 是连续的，则 $f^{-1}(b)$ 在 R^n 上是闭的.

(b) 令 $f: R^n \to R$ 是连续的. 那么对任何 $a \in R$，

$$S \equiv \{x : x \in R^n, f(x) \geqq a\}$$

在 R^n 中是闭.

(3) 令 S 是 R^n 中的一个集合. 已知集合 S 是紧的，当且仅当 S 中的每个序列有一收敛子序列，且子序列的极限在 S 中(这称为**列紧性**). 现在令 $f: R^n \to R^m$ 是 R^n 中的一个连续函数，并令 S 是 R^n 中的一个紧子集. 利用列紧性，证明 $f(S)$ 也是紧的.

(4) 证明若取消连续性或列紧性的假设，Weierstrass 定理(关于最大值、最小值的存在)的结论不一定成立.

68

(5) 令 $S \equiv \{x \in R^n : \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, x_i \geqq 0, i = 1,2,\cdots,n\}$(称为**单纯形**). 证明 S 是一个闭集.

提示：令 $f_0(x) \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i$ 和 $f_i(x) \equiv x_i$，并利用集合

$$S_0 \equiv \{x \in R^n : f_0(x) = 1\}$$

$$S_i \equiv \{x \in R^n : f_i(x) \geqq 0\}, i = 1,2,\cdots,n$$

是封闭的.

(6) 令 f 是定义在 R^n 的凸子集 X 上的一个实值函数. 证明如果 f 是凹的，则集合

$$S \equiv \{x : x \in X, f(x) \geqq 0\}$$

是凸的.

提示：令 $x, y \in S$. 我们要证明 $\theta x + (1-\theta)y \in S, 0 \leqq \theta \leqq 1$，即

$$f[\theta x+(1-\theta)y]\geqq 0,0\leqq\theta\leqq 1$$

然后利用 f 凹性和 $x,y\in S$ 的事实.

注:这道题中命题的逆命题不成立.找出一个例子.

(7) 令 $f:X\to R$,这里 X 是 R^n 中的一个凸子集.证明 f 是拟凹的,当且仅当对每个 $\alpha\in R$,$S\equiv\{x\in X:f(x)\geqq\alpha\}$ 是凸的.

提示:充分性"⇒"我们要证明如果 $x,y\in S$,则 $\theta x+(1-\theta)y\in S$.不失一般性,我们可以设 $f(x)\geqq f(y)$.

必要性"⇐"我们要证明如果 $x,y\in X$ 且 $f(x)\geqq f(y)$,那么 $f[\theta x+(1-\theta)y]\geqq f(y)$.令 $\alpha=f(y)$,则得证.

(8) 给定 R^n 中的一个固定向量 a^i 和一个标量 b_i,定义 $f_i(x)$

$$f_i(x)\equiv a^i\cdot x+b_i,i=1,2,\cdots,m$$

69

这里 $a^i\cdot x\equiv\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j,i=1,2,\cdots,m$.定义集合 S 为

$$S\equiv\{x\in R^n:f_i(x)\geqq 0,i=1,2,\cdots,m\}$$

(a)证明 S 是一个凸集.

(b)令 $m=2,a^1=(-1,-2),b_1=1,a^2=(-2,-1)$,且 $b_2=1$.图示说明集合 S.

(9) 令 $f:\Omega^2\to R,f(x_1,x_2)\equiv x_1^{1/2}x_2^{1/2}$,这里 $\Omega^2=\{(x_1,x_2)\in R^2:x_1,x_2\geqq 0\}$.证明 $f(x_1,x_2)$ 是一个凹函数.

提示:我们要证明对所有 $x_1,x_2\in X$ 有 $f[\theta x_1+(1-\theta)_2]\geqq\theta f(x_1)+(1-\theta)f(x_2),0\leqq\theta\leqq 1$.那么注意,$f(x)=x_1^{1/2}x_2^{1/2}$ 等,且 $x_1,x_2,\geqq 0$.你该如何表达 $f[\theta x_1+(1-\theta)x_2]$ 呢?

(10) 令 $f:\Omega^n\to R$,这里 $\Omega^n=\{x\in R^n,x\geqq 0\}$.证明如果 f 是 1 次齐次函数,则 $f(x)$ 不能是严格凹的.

提示:严格凹性要求对所有 $x,x'\in\Omega^n$,且 $x\neq x'$,有 $f(x/2+x'/2)>f(x)/2+f(x')/2$(为什么?).令 $x'=2x$ 且注意如果 $x\in\Omega^n$,则 $x'\in\Omega^n$.那么,如果 f 是 1 次齐次函数,则得出矛盾.

该结论很重要,因为经济学中经常使用线性齐次函数.

(11)令 $f(x,y)=x^\alpha y^\beta,(x,y)\in\Omega^2$ 且 $\alpha,\beta>0,\alpha+\beta<1$,这里 Ω^2 是 R^2

的非负象限.证明 $f(x,y)$是严格凹的.

(12)令 $f(x)$是定义在R^n的一个凸子集X上的实值函数.证明 f 是凹的,当且仅当 $S\equiv\{(x,a):f(x)\geqq a,a\in X,a\in R\}$在$R^{n+1}$中是凸的.

(13)令 $f(x)$是定义在R^n的凸子集X上的实值函数,证明 f 是凹的,当且仅当对每个整数 $m\geqq 1$,对所有 $x^i\in X,\theta_j\in R,\theta_j\geqq 0,j=1,\cdots,m$,且$\sum_{j=1}^{m}\theta_j=1$,都有

$$f(\theta_1x^1+\theta_2x^2+\cdots+\theta_mx^m)\geqq\theta_1f(x^1)+\cdots+\theta_mf(x^m)$$

成立.

提示:利用(12).

(14)令 $f(x)$是定义在R^n的凸子集合X上的1次齐次凹函数,那么对任何 $x^i\in X,i=1,2,\cdots m$,我们有

$$f(x^1+\cdots+x^m)\geqq f(x^1)+\cdots+f(x^m)$$

提示:利用(13).

▶ 注 释

[1]性质(L1)和(L5)称作**结合律**,(L4)称作**交换律**,(L7)和(L8)称作**分配律**.图 1.1 摘自 Takayama(1985,9 页)

[2]在定义线性空间的性质中,数乘仅限于和实数相乘.一般地,不必限制标量是实数.如果线性空间是定义在复数域上,我们称具有性质(L1)到(L8)的 X(这里 α,β 是任意复数)为一个**复线性空间**或**复数域线性空间**.

[3]因此,如果 S 是一个由 k 个向量$x^1,x^2,\cdots,x^k$ 构成的有限集合,S 是**线性无关的**,当且仅当对任何 $a_i\in R,i=1,2,\cdots,k$,有

$$a_1+x^1+a_2x^2+\cdots+a_kx^k=0 \text{ 推出 } a_1=a_2=\cdots=a_k=0$$

且 S 是**线性相关**的,当且仅当有某个 $a_j\neq 0,j=1,2,\cdots,k$,使得

$$a_1x^1+a_2x^2+\cdots+a_kx^k=0$$

为了理解线性无关和线性相关的概念,考虑 R^3.向量 $e^1\equiv(0,1,0),e^2\equiv(0,1,0)$和 $e^3\equiv(0,0,1)$是线性无关的,因为对所有 $a_1,a_2,a_3\in R$,

$$a_1e^1+a_2e^2+a_3e^3=0 \text{ 推出 } a_1=a_2=a_3=0$$

同样,R^3 中两个向量 e^1 和 e^2 也是线性无关的,因为

$$a_1e^1+a_2e^2=0 \text{ 推出 } a_1=a_2=0$$

另一方面，三个向量 $x_1=(1,1,0)$，$x_2=(0,0,1)$ 和 $x_3=(3,3,3)$ 是线性相关的，因为

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=(a_1+3a_3,a_1+3a_3,a_2+3a_3)-0$$

如果我们令 $a_1-a_2=-3$ 且 $a_3=1$. 注意 R^3 中任意三个向量 x_1,x_2 和 x_3 是线性相关的，如果三个向量中的任一个(如 x_3)是零向量，[如 $x_3=(0,0,0)$]. 一般地，R^n 中 k 个向量($k\leqq n$)，$x_1,x_2,\cdots,x_k$ 是线性相关的，如果这 k 个向量中的任何一个向量是零向量，$(0,0,\cdots,0)$. 从线性相关的定义中，很容易证明：k 个向量是线性相关的，当且仅当这 k 个向量中的一个向量可表示成其他 $k-1$ 个向量的线性组合. 由此也可得出，若 $k>n$，R^n 中的 k 个向量总是线性相关的.

[4]当线性空间为无限维时，这个结论的证明不是初等的. 其证明，例如可见 Wilansky(1964，16～17 页).

[5]在这个阶段，我们不需要区分列向量和行向量. 另一方面，如果我们令 x 是列向量，x' 是其转置，那么我们有 $x\cdot y=x'y=y'x$.

[6]给定一个具有满足公理(I1)到(I3)的内积 $x\cdot x$ 的一个任意内积空间 X(不必是 R^n)，假设我们定义 $\|x\|$ 为

$$\|x\|=(x\cdot x) \tag{5'}$$

可以自然地猜到，$\|x\|$ 满足范数公理(N_1)到(N_3)，这样由(5′)定义的 $\|x\|$ 这种推断是一个范数，所以 X 也是一个赋范向量空间. 可以证明，一般来说，这种推断是错误的.

[7]把(9)代入(7)，我们可得

$$2\|x\|\,\|y\|\cos\theta=\|x\|^2+\|y\|^2-\|x-y\|^2=2(x\cdot y)$$

这又建立了(8)，这里 n 不一定限于 2. 反之，将(9)代入(8)，我们立即得出(7).

[8]Cauchy－Schwartz 不等式在证明三角不等式时也是十分有用的(N2). 为此，回忆(9)，很容易看到

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2&=\|x\|^2+\|y\|+2(x\cdot y)\\&\leqq\|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|\cdot\|y\|=[\,\|x\|^2+\|y\|\,]^2\end{aligned}$$

从它可建立三角不等式

$$(N_2)\quad \|x+y\|\leqq\|x\|+\|y\|$$

因为 $\|x+y\|$ 和 $\|x\|+\|y\|$ 都是非负的. 利用不等式(N2)，很容易证明欧几里得距离的三角不等式(M2).

[9]给定 R^n 中一个序列 $\{x^q\}$，和

$$S^q \equiv x^1 + x^2 + \cdots + x^q$$

称为**级数**.符号表达式

$$x^1 + x^2 + x^3 + \cdots$$

称为一个**无限级数**.S^q 称为级数的**部分和**.如果序列$\{S^q\}$是收敛的,无限级数$x^1 + x^2 + \cdots$称为是**收敛的**.这个序列的极限称为无限级数的和.

[10]术语"重排"显然是不严密的,它可以严格地定义.由于它的意思在直观上很显然,所以我们省略了其正式定义.

[11]这里指出此点很重要,δ 一般依赖于 x 和 ε.如果我们能选择与任何 x 和 x^0 相独立的 δ.那么 $f(x)$称为在 X 中是**一致连续的**.例如,如果 $f: R \to R$ 由 $f(x) = 2x$ 定义,那么

$$|f(x) - f(x^0)| = 2|x - x^0|$$

对任何 $\varepsilon > 0$,选择 δ 为 $\delta = \varepsilon/2$.那么

$$|x - x^0| < \delta \text{ 推出 } |f(x) - f(x^0)| < \varepsilon$$

因此,δ 的选择与 x 和 x^0 无关.所以 $f(x) = 2x$ 是一致连续的.

[12]给定R^n中的S,S的所有极限点的集合称为S的**导出集**.S和它的导出集的并称为S的**闭包**.如果一个点在S的闭包中但不在S的内部,它称为S的一个**边界点**.S所有边界点的集称为S的**边界**.例如,如果$S = (0,1)$,S的导出集是$[0,1]$,它也是S的闭包.S的边界是$\{0,1\}$.如果$S = (0,1) \cup \{2\}$,那么S的导出集是$[0,1]$,因为只包含一个点的集合$\{2\}$没有极限点.S的闭包是$[0,1] \cup \{2\}$,S的边界是$\{0,1,2\}$.

[13]证明再次省略.注意"f在X中是连续的且B是一个开集"并不一定推出$f(B)$是一个开集.类似地,"f在X中是连续的且B是一个闭集"不一定推出$f(B)$是一个闭集.也就是说,一个开集(或闭集)的连续的象不一定是开的(或闭的).

[14]如果极限 a^+ 和 a^- 存在,a^+称为**右导数**,a^-称为**左导数**.

[15]这种例子最初由 Weierstrass 建立,1875 年由du Bois Reymond出版.从那时起,人们构造了一些更简单的例子.对于处处不连续函数的一个系统讨论在 Hobson(1926,401～412 页)中给出.

[16]这个定理的证明见 Takayama (1972,31～35 页).

[17]如经济学中的许多应用一样,当 δ 假设为正时,$f(x)$称作是**正 m 阶齐次的**.

[18]边际生产力分配理论在经济学中早已有其重要意义.关于其历史杰出研究,见 Stigler (1941). Stigler 书中的第 7 章讨论了产品耗尽问题.George Stigler因其在产业运作及经济中的政府管制方面的著作而获得了 1982 年诺贝尔经济科学奖.

[19]有大量涉及高阶导数的重要结论.这里我们仅限于 x 是一个单变量的情况,我们可以得到称作"**泰勒展开式**"的这样一个结果.令 $f: X \to R$,这里 X 是 R 上的一个开集.假设 f 对 X 中的每一点都有 k 阶连续偏导,这里 $f \in C^{(k)}$.那么对 X 中的每个 x,对 X 中的某一点 x^0,$f(x)$ 可以展成如下形式:

$$f(x) = f(x^0) + f'(x^0)h + 1/2\, f''(x^0)h^2 + \cdots + \frac{1}{(k-1)!} f^{(k-1)}(x^0)h^{k-1} + r(h), \qquad (T)$$

这里,$h \equiv x - x^0$,$r(h) = o(\|h\|^k)$.对于连接 x 和 x^0 的区间的某个内点 $\bar{x}$,余项 $r(h)$ 可更准确地写作

$$r(h) = \frac{1}{k!} f^{(k)}(\bar{x})h^k$$

等式(T)称作**泰勒展开式**,它给出了对 $f(x)$ 加以近似的公式.泰勒公式不仅在 R 中运用,也可推广到 X 是 R^n 中的一个开集的情况.

[20]类似地,给定 R^n 中的 k 个点,$x^1, x^2, \cdots, x^k$,z 定义为

$$z = \theta_1 x^1 + \theta_2 x^2 + \cdots + \theta_k x^k, 0 \leqq \theta_i \leqq 1, i = 1, 2, \cdots k, \sum_{i=1}^{k} \theta_i = 1$$

称为这 k 个点的一个**凸组合**.

[21]我们称函数 f 是**拟凸的**,如果 $-f$ 是拟凹的;f 是**显式拟凸的**,如果 $-f$ 是显式拟凹的;f 是**严格拟凸的**,如果 $-f$ 是严格拟凹的.

[22]定义显式拟凹性所需的两个性质,即拟凹和(27),是彼此独立的.例如,考虑 $f(x)$,$x \in R$,定义为

如果 $x = 0$,则 $f(x) = -1$;如果 $x \neq 0$,则 $f(x) = 0$

那么 f 不是拟凹的,但它满足(27).但是,在经济学上经常假设 f 是连续的.在这种情况下,由(27)可推出 f 的拟凹性,因此拟凹性就成为了显式拟凹的多余的附加条件了.

[23]如我们在定理 1.8 的命题(ii)中所指出的,凹函数的每个非负线性组合也是凹的.不幸的是,类似的命题对于拟凹函数则不成立.拟凹函数的一个非负线性组合可以不是拟凹的.例如,考虑竞争性公司,它生产单一产品,生产函数为 $f(x)$,x 是一个 n 维向量.令 p 和 w 分别表示产品的价格和要素的价格向量,且对该公司都是给定的.那么利润函数 $\pi(x)$ 可以定义为

$$\pi(x) = pf(x) - w \cdot x [= pf(x) + (-w \cdot x)]$$

如果 $f(x)$ 是凹的,那么 $\pi(x)$ 也是凹的.但是,如果 $f(x)$ 是拟凹的,$\pi(x)$ 可以不是拟凹的.

[24]图 1.10 中的所有逻辑关系或多或少都可明显地从各种概念的定义中得出.惟一的例外是关于每个凹函数是显式拟凹函数这一逻辑关系的命题.为了证明它,我们使用**算术平均定理**.即

$$\min\{a,b\}\leqq\theta a+(1-\theta)b\leqq\max\{a,b\}$$

这里 $a,b,\theta\in R,0<\theta<1$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立. 令 $a=f(x),b=f(x^0)$，并使用左边的不等式. 注意该命题的逆命题不一定成立.

▶ 参考文献

Apostol, T. 1957. *Mathematical Analysis*. Reading, Mass.: Addison-Wesley.

Arrow, K. J. and A. C. Enthoven. 1961. "Quasi-Concave Programming." *Econometrica* 19(October): 779 – 800.

Bartle, R. G. 1987. *The Elements of Real Analysis*. 3d ed. New York: Wiley (1st ed. 1964, 2d ed. 1976).

Berge, C. 1963. *Topological Spaces*. Trans. E. M. Patterson. New York: Macmillan.

Gantmacher, F. R. 1959. *The Theory of Matrices*. 2 vols. Trans. by K. A. Hirsch. New York: Chelsea Publishing.

Hicks, J. R. 1946. *Value and Capital*. 2d ed. Oxford: Clarendon Press(1st ed. 1939).

Hobson, E. W. 1926. *The Theory of Functions of a Real Variable*. Vol. 2. 2d ed. Cambridge: Cambridge University Press.

Kelley, J. L. 1955. *General Topology*. New York: Van Nostrand.

Munkres, J. R. 1975. *Topology: A First Course*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall.

Rudin, W. 1976. *Principles of Mathematical Analysis*. 3d ed. New York: McGraw-Hill(1st ed. 1953, 2d ed. 1964).

Samuelson, P. A. 1947. *Foundations of Economic Analysis*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press(enl. ed. 1983).

Stigler, G. 1941. *Production and Distribution Theories*. New York: Macmillan.

Takayama, A. 1972. *International Trade: An Approach to the Theory*. New York: Holt, Rinehart, and Winston.

——. 1985. *Mathematical Economics*. 2d ed. New York: Cambridge University Press(1st ed. 1974).

Wilansky, A. 1964. *Functional Analysis*. New York: Blaisdell.

第2篇

非线性规划与微观经济学

第 2 章　非线性规划[1]

§2.1　引言

令 X 是R^n的子集，这里允许 $X=R^n$. 令 f 是一个定义在 X 上的实值函数，并考虑下面问题：在 $x\in S$ 的条件下选择$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，使得$f(x)$最
75 大，这里 S 是 X 的子集. 集合 S 可以等于 X.

我们称$f(x)$为**最大化函数**，或者**目标函数**. 集合 S 称为**约束集合**或者**可行解集**. 变量 $x_i, i=1,2,\cdots,n$，称为**决策变量**或者**选择变量**. 求解问题的点 x^* 被称为一个**解**或一个**最优点**. 即，如果 $x^*\in S$，并且对所有 $x\in S$，有

$$f(x^*)\geqslant f(x)$$

则 x^* 是问题的一个“**解**”.

给定一个特定的最大化问题，解可能存在，也可能不存在. 当解存在时，它可能是惟一的，也可能不是惟一的. 如果 $x^*\in S$，并且对于所有 $x\in S, x\neq x^*$，有

$$f(x^*)>f(x)$$

则称解 x^* 是惟一的.例如,设 $S=[-1,1]$ 是 R 上的闭区间,并设 $f:R\to R$ 定义为 $f(x)=-x^2$.在 $x\in S$ 的条件下,选择 x 使 $f(x)=-x^2$ 最大化的问题得
76 出惟一的解 $x^*=0$.另一方面,假设对所有 $x\in S$ 有 $f(x)=3$,那么在 $x\in S$ 的条件下,S 中的任何点都是使 $f(x)=3$ 最大化的解.并且,在这种情形下,解不是惟一的;实际上,有无穷多的解.解也可能不存在.例如,设 $S=(0,1)$ 是 R 上的一个开区间,考虑函数 $f:R\to R$,$f(x)=x$.在这种情形下,我们不能在 S 中找到 x^*,使得对所有 $x\in S$ 有 $f(x^*)\geqslant f(x)$.类似地,如果 $S=[0,\infty)$ 并且 $f(x)=x$,那么在 $x\in S$ 条件下,使 $f(x)=x$ 最大化的问题没有解.这两个例子[见图 2.1(a)和图 2.1(b)]说明,选择集合 S 的紧性(S 是闭集且有界)将在确定解的存在性中起着重要的作用.在这些例子中,函数 $f(x)=x$ 是一个连续函数.当 $f(x)$ 不连续的时候,即使选择集合是紧的,解也可能不存在.考虑一个例子,设 $S=[0,1]$(它是紧的),并且设 $f:R\to R$ 定义为:除 $x=1$,$f(1)=1/2$ 外,$f(x)=x$,$x\in R$.那么在 $x\in S$ 条件下 $f(x)$ 最大化问题得不出一个解[见图 2.1(c)]

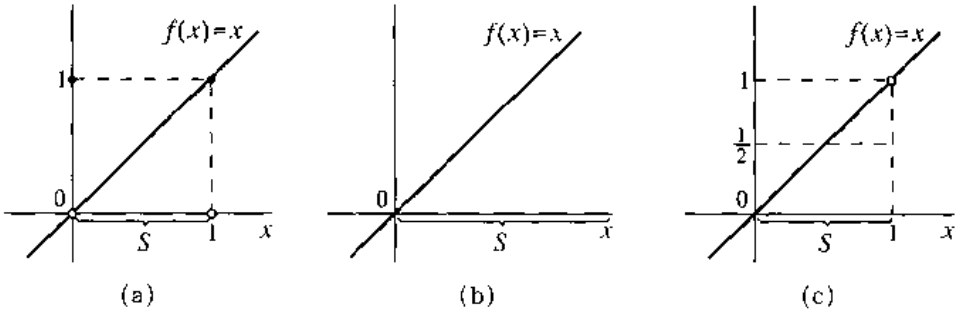


图 2.1 解的不存在

这就提出一个问题:在什么情况下,我们能够保证一个特定的最大化问题有解?对于此问题的一个明显而有力的答案由 Weierstrass 定理给出(定理
77 1.2 的命题 iii).也就是说,

如果 f 连续并且 S 是紧的,那么在 S 中存在一个解 x^*,对所有 $x\in S$,有 $f(x^*)\geqslant f(x)$,其中 $f:X\to R$,$X\subset R^n$,且 $S\subset X$.

注意,这只是提供了一组对于解的存在性的充分条件(而不是必要条件).举一个例子,在 $x\in R$ 的条件下使 $f(x)=-x^2$ 最大化的问题,它存在一个惟一的解 $x^*=0$,尽管选择集合 R 是非紧的.不用说,这并不意味着 S 的紧性和 f 的连续性在保证解的存在性中是不重要的.

在前面的讨论中,我们根据最大化来定义问题.另一方面,考虑在 $x\in S$ 的条件下选择 x 使 $f(x)$ 最小.然而,这个最小化问题可以很容易地转化为等价的最大化问题,即在 $x\in S$ 的条件下,选择 x 使 $-f(x)$ 最大.因此,不失一般性,我们可以把注意力集中于最大化问题.

我们接下去刻画选择集合 S 的特性.选择集合在经济学中的最有用的表述是基于具体函数关系方面的特性.设 $g_j:X\to R$,$j=1,2,\cdots,m$,是连续的实值函数,依据下面的不等式刻画集合 S:

$$g_1(x)\geqq 0, g_2(x)\geqq 0, \cdots, g_m(x)\geqq 0$$

在这种情况下，选择集合 S 可以定义为

$$S\equiv\{x\in X: g_j(x)\geqq 0, j=1,2,\cdots,m\}$$

正如前面所提到的，S 称为约束集合或者可行解集. S 的一个元素被称为一个**可行点**，函数 g_j 称为**约束函数**. 函数 f 和 g_j 通常是非线性的，因此上面的问题被称为**非线性规划**或者**受约束的最大化**(带不等式约束). 在经济学中，变量 x 时常被约束为 $x_i\geqq 0, i=1,2,\cdots,n$，或者简写为 $x\geqq 0$，这称为**非负约束**. 因此，我们主要考虑下列形式的约束

$$g_1(x)\geqq 0, g_2(x)\geqq 0, \cdots, g_m\geqq 0, x\geqq 0$$

其中，$g_j: X\to R, j-1,2,\cdots,m$，且 $X\subset R^n$. (对于无非负约束情形的讨论，见
78 Takayama 1985，第 1 章). 那么约束集合 S 可以定义为

$$S\equiv\{x\in X: g_j(x)\geqq 0, j=1,2,\cdots,m, x\geqq 0\}$$

我们考虑非线性规划问题(**NLP**)，也就是选择 x，使 $f(x)$ 最大化：

(NLP) Maximize $f(x)$

约束条件 $g_j(x)\geqq 0, j=1,2,\cdots,m$，且 $x\geqq 0$

其中 $f, g_j: X\to R, j=1,2,\cdots,m$，并且 $X\subset R^n$.

从本质上说，经济学中充满了这样的有约束的最大化或最小化问题的应用. 这是自然的，因为经济学传统上是考虑“稀缺性”问题，面其中的稀缺性可以通过一些约束函数 g_j 来表示.

【例 2.1】

(i) 消费者选择　考虑一位消费者，选择一组商品消费束 $x\in R^n$，在 $p\cdot x\leqq Y$ 且 $x\geqq 0$ 的条件下使 $u(x)$ 最大，这里 $u(x)$，p 和 Y 分别是他(她)的效用(指标)函数，价格向量和收入，这里 p 和 Y 是给定的. 在这种情形下，约束可以写作 $g(x)=Y-p\cdot x\geqq 0$ 且 $x\geqq 0$.

(ii) 成本最小化　考虑一个公司，它选择一个要素投入的组合 $x\in R^n$，在 $f(x)\geqq y$ 且 $x\geqq 0$ 的条件下，使 $w\cdot x$ 最小(使 $-w\cdot x$ 最大)，这里 $w=$ 要素价格向量，$y=$(单一)产出的目标水平，$f(x)=$生产函数，并且 y 和 w 给定. 那么约束可写作 $y(x)\equiv f(x)-y\geqq 0$，且 $x\geqq 0$.

(iii) 计划模型　设 a_{ij} 是生产一单位的第 j 种商品所需的第 i 种原料的数量($i=1,2,\cdots,m, j=1,2,\cdots,n$)，设 r_i 是被考虑的国家可用的第 i 种原料数量. 设 p 是由计划机构规定的一组商品的估价向量，其中 p 可以被解释为“价格向量”. 然后，我们可以考虑在 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqq r_i, i=1,2,\cdots,m$ 且 $x\geqq 0$ 的条件下，选择 x 使 $p\cdot x$ 最大的问题，这里我们假定 a_{ij}, r_i 和 p_j 是常量. 设 a_i 是第 j 元

79 素为 a_{ij} 的一个 n 维向量.那么约束可写成 $g_i(x)=r_i-a_i\cdot x\geqq 0, i=1,2,\cdots,m$,且 $x\geqq 0$.

在"计划问题"中,最大化函数 $p\cdot x$ 和约束集合函数都是线性的.一般地,如果最大化函数 $f(x)$ 和约束函数 $g_j(x), j=1,2,\cdots,m$ 都是线性的,则这样有约束的最大化问题被称为**线性规划**.它时常简写为 **LP**.因为术语非线性规划包括作为特例的线性规则,它可能会使人产生某种误解.

现在我们回到上面由(NLP)定义的一般的非线性规划问题.一个函数关系 $g_j(x)=0$,不管它是线性的或非线性的,可以在 x 空间(或平面)上定义一个曲面(或曲线).它把空间 R^n 分为两个区域:$g_j(x)\geqq 0$ 的区域和 $g_j(x)\leqq 0$ 的区域.曲面 $g_j(x)=0$ 充当这两个区域的共同边界.例如,在图 2.2 中,$g_j(x)=1-x_1-2x_2=0$ 在 x 平面上定义了一条直线,并且将 R^n 分为两个区域.在包含原点的区域里(阴影区域)我们能容易得出 $1-x_1-2x_2\geqq 0$,而在另一区域中,我们有 $1-x_1-2x_2\leqq 0$.

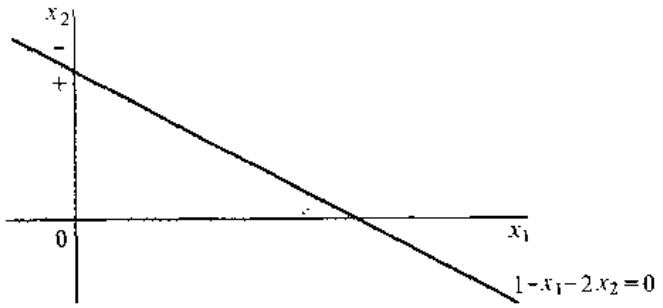


图 2.2 空间划分

在图 2.3 中,阴影部分同时满足在 R^n 上的四个函数关系,$g_1(x)\geqq 0$,$g_2(x)\geqq 0$,$g_3(x)\geqq 0$ 和 $x\geqq 0$,这里假定对所有的 j,满足 $g_j(x)\geqq 0$ 的区域位
80 于相应描绘的 $g_j(x)=0$ 的轨迹的下方.注意,约束条件的数目,或 m,会大

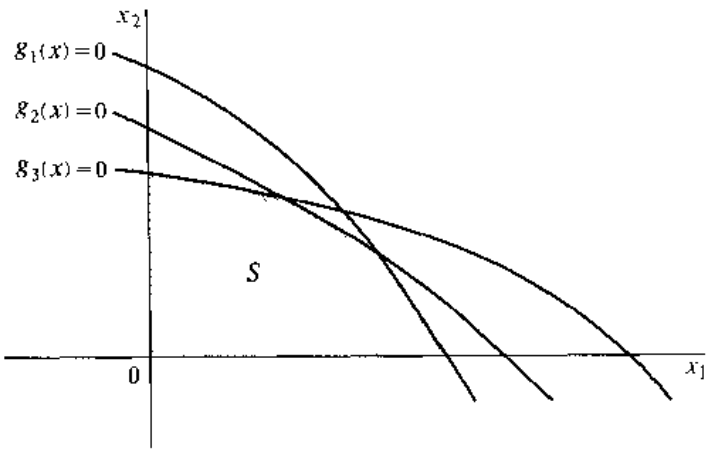


图 2.3 约束集合

于、小于或等于决策变量的个数 $n(x_i, i=1,2,\cdots,n)$. 同时注意有可能约束集

$$S \equiv \{x \in X : g_j(x) \geqq 0, j=1,2,\cdots,m, x \geqq 0\}$$

是空集. 一个例子是

$$g_1(x) = 1 - x_1 - 2x_2 \geqq 0 \text{ 和 } g_2(x) = x_1 + 2x_2 - 3 \geqq 0$$

不允许使 R^2 中存在一点 (x_1, x_2) 同时满足这两个关系. 这种情况下, 我们称这些约束是**不相容的**.

定义集合 $S_j, j=1,2,\cdots,m$, 和 Ω^n 为

$$S_j \equiv \{x \in X : g_j \geqq 0\}, \Omega^n = \{x \in R^n : x \geqq 0\}$$

这里 Ω^n 根据它明显的几何解释称为(**n 维**)**非负象限**. 那么约束集合 S 可以表达为

$$S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_m \times \Omega^n$$

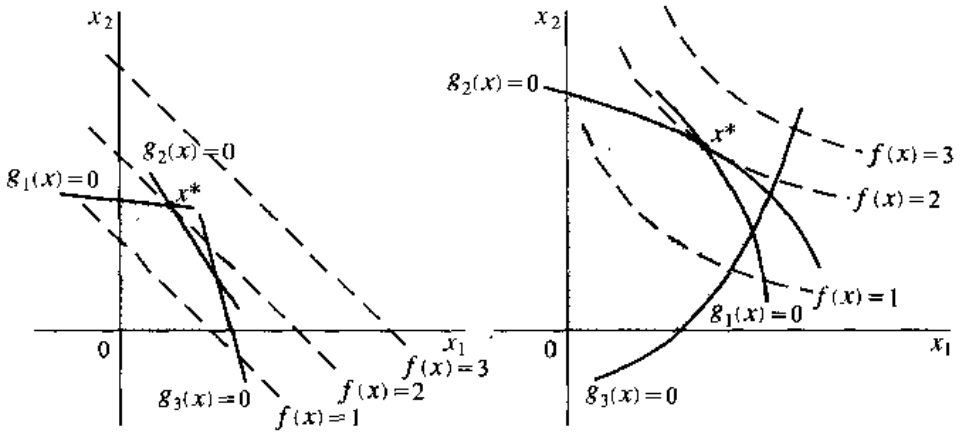
既然 Ω^n 是凸的, 并且任何凸集的交集总是凸的, 那么如果对每一个 j, S_j 是凸的, 则约束集合 S 是凸的. 正如在第 1 章中提及的, S_j 是凸的当且仅当 g_j 是拟
81 凹的且 X 是凸的. 由此我们可以得到结论: 约束集合 S 是凸的充分条件是对每一个 $j=1,2,\cdots,m$, $g_j(x)$ 是拟凹函数, 这里 X 是凸的. 特殊地, 如果约束函数 g_j 都是凹函数, 那么约束集合 S 总是凸的, 因为每一个凹函数总是拟凹的. 另外注意函数 g_j 的拟凹性只是集合 S 凸性的充分条件, 而不是必要条件. 约束集合的凸性在经济学中时常起着重要的作用, 特别在确定一个给定的最优化问题的解的整体特征中更是如此.

现在转而考虑目标函数 f, x 的轨迹是使得当 α 是一个给定的数量时, $f(x)=\alpha$ 在 R^n 上定义了的一条曲线或一个曲面. 这样的轨迹对某一个水平 α 来说是一条等高线. 正如第 1 章提及的, 它称为一个"水平集"或者一条"无差异曲线(曲面)". 当 α 的值变化时, 我们得到一族无差异曲线. 那么问题是在 $x \in S$ 的约束下, 选择 x 使我们能达到代表最高的等高线水平(f 的最高值)的无差异曲线. 图 2.4 中的两个图说明了这样的问题, 这里图 2.4(a)说明了 f 和 g_j 都是线性的情形, 图 2.4(b)说明了这些函数都是非线性的情形. 最优点记为 x^*, 是一个给定的有约束的最大化问题的解. 注意在这两个情形中, 最优点 x^* 严格地在约束区域 $g_3(x) \geqq 0$ 和 $x \geqq 0$ 中. 我们称这些约束在 x^* 点是**无效的**, 而约束 $g_1(x) \geqq 0$ 和 $g_2(x) \geqq 0$ 在图 2.4 的两个情形中的点 x^* 处是**有效的**. 通常地我们称: 如果 $g_j(x^*) > 0$, 则约束在 x^* 点是**有效的**. 如果对所有 i, $x_i^* > 0$, 则非负约束 $x \geqq 0$ 被称为在 x^* 点是**无效的**.

82 在例 2.1(i)中提及的消费者选择的传统方程式描述了上面的非线性规划问题. 在这个例子中, 约束集合被写作

$$B \equiv \{x \in R^n : p \cdot x \leqq y, x \geqq 0\}$$

集合 B 称为预算集合.消费者的问题是在 $x\in B$ 的条件下最大化他(她)的效用函数 $u(x)$.图 2.5 说明了二维的情况.这里 $u(x)=$常数的 x 轨迹定义了一个无差异曲线,并且通过改变这个常数的值(从 α 到 β 到 γ,等等),我们能得到一族无差异曲线.图 2.5 中,最优点表示为 x^*.注意预算集合由阴影的三角区域表示,是有界闭集,因此是紧的.那么假设 $u(x)$ 是连续的,根据 Weierstrass 定理,消费者选择问题的解存在.



(a) 线性情形　　(b) 非线性情形

图 2.4　最优点

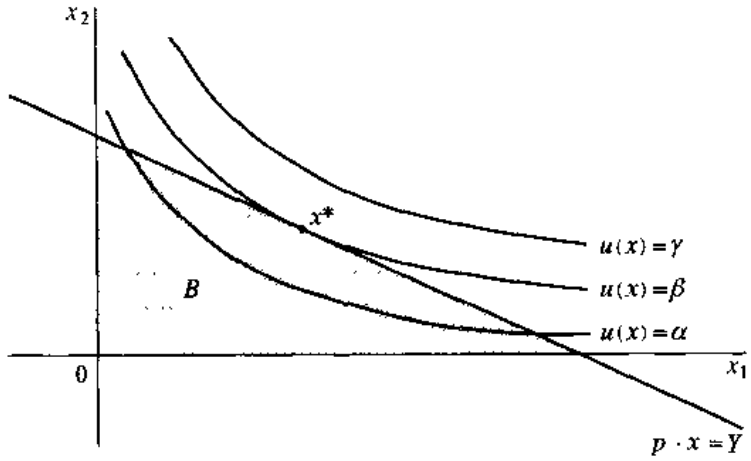


图 2.5　消费者选择的图示

现在回到前面陈述的一般的非线性规划问题(NLP).集合

$$S\equiv\{x\in X: g_j(x)\geqq 0, j=1,2,\cdots,m, x\geqq 0\}$$

83

表示约束集合.我们很自然地会问下列问题:

问题 1:集合 S 是非空的吗?如果是空集,则解不存在.

问题 2:假如 S 是非空的,解 x^* 存在吗?即在 $x\in S$ 的条件下是否存在

一个 x^* 使 $f(x)$ 最大?

问题 3: 如果解 x^* 存在,它的特征是什么?

问题 4: 如果解 x^* 存在,它是否惟一?

问题 5: 找到所有解的算法是什么?

问题 2 的一个简单答案由 Weierstrass 定理给出.也就是说,如果集合 S 是紧的,并且函数 f 是连续的,那么对(NLP)存在一个解 x^*.在随后的章节中,我们将研究问题 3.特别地,我们将讨论解 x^* 的一阶特征和鞍点特征.我们需要用函数 f 和 g_j 的可微性来对其一阶特征进行刻画.

在线性规划的情形中,目标函数 f 和约束函数 g_j 都是线性的.在此情形中,由图 2.4 中不难看出:对于 R^n,解或者在一条约束线(例如对于某个 j,$g_j(x)=0$ 的 x 的轨迹)和另一条约束线(或坐标轴之一)相交的**顶点**上,或者在两个顶点的任何凸组合上.后一可能性产生于无差异曲线的斜率与连接两个顶点的线段斜率相等的情况.由此,我们可以通过计算 $f(x)$ 在这些顶点的值并且比较得到的值来找到线性规划问题的解.既然只有有限数量的约束,则只有有限数量的顶点.这样,我们原则上可以在有限的步骤中得到一个解.这是被称为**单纯形方法**的算法要点,单纯形方法是以一种有效的方式试验各个顶点来找到解.(为什么该方法这么有效直到最近才被人知晓.例如,见 Smale 1983).关于单纯形方法的软件现在广泛用于计算机上.基于此,我们可以集中
84 注意目标函数和(或者)约束函数是非线性的情况.我们可能注意到这个算法的发现唤起了对线性规划的强烈兴趣,至少在其初期,为像线性不等式理论这样相关数学的发展提供了动力(例如,见 Kuhn-Tucker 1956).这与其他事情一起促进了非线性规划的发展.

在此,有必要评论古典最优理论.相对于非线性规划理论,古典理论的一个显著特征是:它所考虑的所有约束都是等式,

$$g_1(x)=0, g_2(x)=0, \cdots, g_m(x)=0$$

这里,非负约束($x\geq 0$)被忽略.在此情形下,约束集合 S^* 可以定义为

$$S^*=\{x\in R^n: g_j(x)=0, j=1,2,\cdots,m\}$$

如果 $m=n$,那么除了无意义的情形外(例如 $S^*=\emptyset$),S^* 只包含一个点(比如 x^*),在这种情况下,最大化问题变得平凡了.例如,如果 g_j 都是线性的,我们可以用以下形式写出约束:

$$g(x)\equiv Ax+b=0$$

这里因为 $m=n$,所以 $A=[a_{ij}]$ 是一个 $n\times n$ 矩阵.假定 A 是非奇异的,集合 S^* 包含一个点,$x^*=-A^{-1}b$,而不管目标函数 f 如何,x^* 成为了问题的惟一解.另一方面,如果 $m>n$,或者约束的数量超过了决策变量的数量,那么这些等式约束在点 x^* 不能同时满足.即它们不是相容的.那么,约束集合是空的,并且解不存在(参见注释[18]).因此在古典理论中,假定 $m<n$,即约束的

数量少于决策变量的数量.这种假定在非线性规划公式中是不必要的.假定$m<n$,根据拉格朗日函数,古典理论得到了最优解的众所周知的特征.

85 在这章的随后几节中,我们将首先不加证明地讲解非线性规划的主要结论.特别地,我们将通过一阶条件和鞍点条件对约束表示为不等式形式的情形讲解最优解的特征.然而,这并不意味着带等式约束的古典优化理论已经失去了重要性.因而我们将在2.4节中简要讲解它,尽管我们也将指出使用不等式约束的非线性规划在经济学中的重要优势.

另一方面,也可能发生的情况是根据给定问题的特点,特定的约束必须采用等式形式(而不是不等式),例如,约束是确定的等式的情形.为处理这个问题,需要把讨论扩展到等式和不等式都存在的情形(**混合约束**的情形).也就是说,我们可能希望考虑这样的问题:在$g_j(x)\geqq 0, j=1,2,\cdots,m; h_k(x)=0; k=1,2,\cdots,l$的条件下,选择$x$使$f(x)$最大.为简化,我们省略这样的考虑.有兴趣的读者可以参考Mangasarian(1969,第11章).

关于向量不等式的记号约定

在考虑两个向量的相对大小时,我们约定以下概念:

(a) $x\geqq y$表示对所有$i, x_i\geqq y_i$;

(b) $x>y$表示对所有$i, x_i>y_i$;

(c) $x\geqslant y$表示对所有$i, x_i\geqq y_i$,且对某些$i, x_i>y_i$.

其中,x_i和y_i分别表示x和y的第i个元素.不必说,$x=y$意味着对所有的i,$x_i=y_i$,$x\geqslant y$意味着$x\geqq y$且$x\neq y$.注意在我们的记法中,$x\geqq 0$和上述约定是一致的,我们可以称$x\geqq 0$意味着对所有$i, x_i\geqq 0$.同时也要注意,根据这种约定约束$g_j(x)\geqq 0, j=1,2,\cdots,m$,可以更简洁地写作$g(x)\geqq 0$,这里$g(x)\equiv[g_1(x),\cdots,g_m(x)]$.

§2.2 一阶条件下的最优解特征

上面我们假定函数f和g_j定义在R^n的子集X上.为便于讲解,我们假定$X=R^n$.进一步假定,这些函数f和g_j在R^n上连续可微.因为一阶条件是以一

86 阶导数形式来讨论最优解特性的,所以需要可微的假定.如果$X\neq R^n$,而是R^n的一个真子集,那么我们需要假定X是一个开集.给定定义在R^n上的这样的函数,我们考虑这样的问题:在$g_j(x)\geqq 0, j=1,2,\cdots,m$,且$x\geqq 0$的约束条件下,选择$x\in R^n$使$f(x)$最大.因此,约束集合$S$可以写作

$$S\equiv\{x\in R^n: g_j(x)\geqq 0, j=1,2,\cdots,m, x\geqq 0\}$$

只要附加适当的条件,随后的讨论可以很容易地扩展到函数f和g_j的定义域是R^n中一个子集X,而不必是Ω^n的情形.例如,对此扩展有兴趣的读者可参考Takayama(1985,第1章).

首先，我们希望区分有关于这个最大化问题的解的两个概念．一个指在整个约束集合上$f(x)$的最大，另一个指在约束集合中的一点的一定邻域内$f(x)$的最大．前者指的是一个(受约束的)全局最大，后者指的是一个(受约束的)局部最大．更确切地，我们定义下面两个条件，这里(M)和(LM)分别表示(受约束的)**全局最大**条件和(受约束的)**局部最大**条件：

(M)　在S中存在一个x^*，使得对所有$x\in S$有$f(x^*)\geqq f(x)$．

(LM)　在S中存在一点x^*及其邻域$N_r(x^*)$，使得对所有$x\in S\cap N_r(x^*)$有$f(x^*)\geqq f(x)$．

这里，在条件(LM)中关于x^*的以r为半径的邻域$N_r(x^*)$，定义为$N_r(x^*)=\{x\in R^n: d(x,x^*)<r\}$，$d(x,x^*)$表示$x$和$x^*$之间的欧几里得距离．注意在条件(LM)中，邻域$N_r(x^*)$的半径$r$可能非常小．

(LM)和(M)的概念如图2.6所示．图2.6(a)中的点x^1，x^2，x^3和x^4是局部最大点，点x^3是一全局最大点，这里$S\equiv\{x\in R: x\geqq 0\}$．图2.6(b)中，在$x^1$和$x^2$之间的区间中的任何点$x$都给出一个全局最大．同条件(M)和(LM)类似，我们可以分别定义(有约束的)**全局最小**条件(**m**)和(有约束的)**局部最小**条件(**lm**)为：

(m)　在S中存在一点x^*，使得所有$x\in S$有$f(x^*)\leqq f(x)$；

(lm)　在S中存在一点x^*及其邻域$N_r(x^*)$，使得所有$x\in S\cap N_r(x^*)$有$f(x^*)\leqq f(x)$．

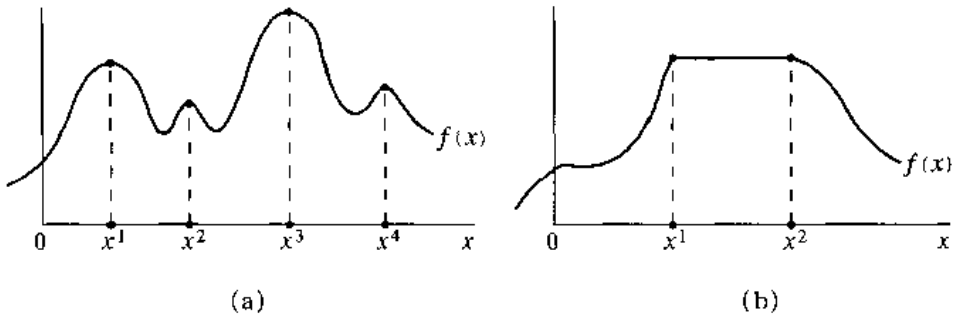


图 2.6　局部和全局最大值点

87　明显地，由条件(M)推出条件(LM)：每一个**全局最大**点也是一个局部最大点．不用说，逆命题不一定成立．然而，假定约束集合S是凸的且$f(x)$受适当的限定，则逆命题(LM ⇒ M)和其他有趣的结论就会得到．如果g_j都是拟凹的，那么就确保了约束集S的凸性．

此处一个重要的结论是如果$f(x)$是凹函数，并且S是一个凸集，[2]那么一个局部最大值点就是全局最大值点[即(LM)⇒(M)]．另外，如果f是严格凹的，那么最大值点是惟一的，即对所有$x\in S$，$f(x^*)>f(x)$，这里S是凸的并且$x\neq x^*$．[3]f的凹性假设时常被认为限制太强．定理2.1指出了这种假设能够放宽的程度．

88　**【定理 2.1】**　假定约束集合是凸的．

(i) 如果$f(x)$是显式拟凹的，则每一个局部最大也是全局最大，即(LM)推出(M).[4]既然每个凹函数都是显式拟凹的，则 f 的显式拟凹性可以被 f 的凹性替代.

(ii) 如果$f(x)$是严格拟凹的，则每一个局部最大给出惟一的全局最大.[5]

注：回忆这些是值得的，即严格的拟凹性推出显式拟凹性，但不是反过来也成立.严格凹性推出凹性和严格的拟凹性，但不是反过来也成立.严格拟凹性意味着无差异曲线(或曲面)是严格地凸向(向里弯)原点，而显式拟凹性允许无差异曲线出现平坦的部分(但是不允许出现有"厚度"的无差异曲线，回顾第 1 章图 1.11).

现在我们可以进行这一节的主要讨论.我们根据"一阶条件"来讨论最优解的特征.为此，拉格朗日函数的概念起了关键的作用.定义实值函数 $\Phi(x,\lambda)$为

$$\Phi(x,\lambda)\equiv f(x)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j g_j(x)[\equiv f(x)+\lambda\cdot g(x)] \tag{1}$$

函数 $\Phi(x,\lambda)$称为**拉格朗日函数**，λ_j 被称为**拉格朗日乘子**.既然 f 和 g_j 假定是连续可微的，则 $\Phi(x,\lambda)$也是连续可微的.下面通过拉格朗日函数得出的最优点(LM)或(M)的特征，被称为**一阶条件(FOC)**，并且它是针对拉格朗日函数的一阶导数而言的最优点特征.

89 (FOC) 存在一个$(x^*,\lambda^*)\geqq 0,\lambda^*\in R^m$，使得

$$\partial\Phi^*/\partial x_i\leqq 0,(\partial\Phi^*/\partial x_i)x_i^*=0,i=1,2,\cdots,n \tag{2a}$$

$$g_j(x^*)\geqq 0,\lambda_j^* g_j(x^*)=0,j=1,2,\cdots,m \tag{2b}$$

这里$\partial\Phi^*/\partial x_i$ 是 Φ 关于 x_i 的偏导在(x^*,λ^*)处赋值的.也就是说，

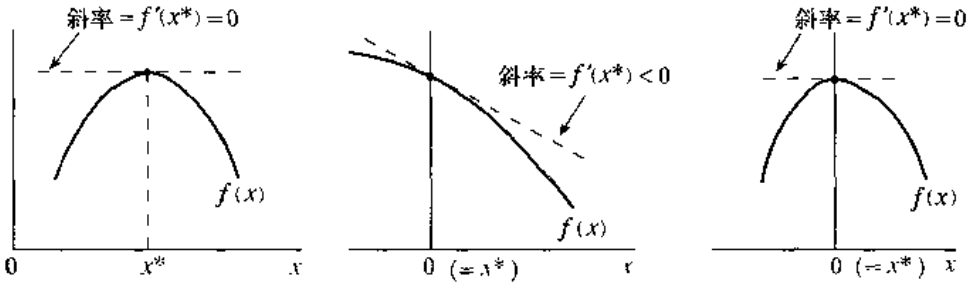
$$\partial\Phi^*/\partial x_i=\partial f(x^*)/\partial x_i+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j^*\partial g_j(x^*)/\partial x_i$$

正如下面所见，(FOC)在一定假设下成为(LM)或(M)的充分必要条件.没有这样的假设条件，(FOC)对(LM)或(M)既不必要也不充分.

有些读者可能疑惑，为什么不等式在(2a)中出现，因为这不是古典理论中(2a)被通常地表示为下列情形：

$$\partial\Phi(x^*,\lambda^*)/\partial x_i=0,i=1,2,\cdots,n$$

不等式在(2a)中出现的原因是：在我们的最大化问题中，允许对某些 i 或者所有 $i,x_i^*=0$ 的可能性(这被称为**角解**)，面这种可能性在古典最优化中是预先被排除了的.为说明条件(2a)，假设 $g_j(x)\equiv 0,j=1,2,\cdots,m,\Phi(x)=f(x)$.同样假设 x 是矢量.图 2.7(a)到 2.7(c)分别说明了$(x^*>0,f'(x^*)=0)$，$(x^*=0,f'(x^*)<0)$和$(x^*=0,f'(x^*)=0)$的情形. 图2.7(a)对应于古典



(a) (b) (c)

图 2.7 (FOC)的图解

最优化的情形.

在某些情况下,有可能最大化函数 f 和约束函数 g_j 是这样一种情况,我们可以根据问题的特性确定对所有的 $i=1,2,\cdots,n, x_i^*>0$. (FOC)可简化为下列熟悉的形式(FOC′),在对所有 $i, x_i^*>0$(称为**内部解**)的假设下,(FOC′)与(2)是等价的:

(FOC′) 存在一个 $(x^*,\lambda^*)\geqq 0, \lambda^*\in R^m, x^*>0$,使得

$$\partial\Phi(x^*,\lambda^*)/\partial x_i=0, i=1,2,\cdots,n \tag{3a}$$

$$g_j(x^*)\geqq 0, \lambda_j^* g_j(x^*)=0, \lambda_j^*\geqq 0, j=1,\cdots,m \tag{3b}$$

90 **【例 2.2】** 考虑下列问题:选择 $(x_1,x_2)\in R^2$,使得在 $p_1x_1+p_2x_2\leqq Y$, $x_1\geqq 0, x_2\geqq 0$ 的条件下,最大化 $f(x_1,x_2)=x_1^a x_2^{1-a}, 0<a<1$,这里 p_1,p_2 和 Y 是正的常数.这个问题可以被解释为通常所说的消费者选择问题,这里 f, p_i 和 Y 分别表示消费者的效用函数,第 i 种商品($i=1,2$)的价格,和他(她)的名义收入.这个问题的拉格朗日函数定义为

$$\Phi(x,\lambda)=x_1^a x_2^{1-a}+\lambda(Y-p_1x_1-p_2x_2)$$

然后我们可以计算出

$$\partial\Phi/\partial x_1=ax_1^{a}x_2^{1-a}-\lambda p_1, \partial\Phi/\partial x_2=(1-a)x_1^a x_2^{-a}-\lambda p_2$$

为了简化,省略表示最优解的星号(*),(2)或者(FOC)可以写作

$$ax_1^{a-1}x_2^{1-a}-\lambda p_1\leqq 0, (1-a)x_1^a x_2^{-a}-\lambda p_2\leqq 0 \tag{4a}$$

$$(ax_1^{a-1}x_2^{1-a}-\lambda p_1)x_1=0, [(1-a)x_1^a x_2^{-a}-\lambda p_2]x_2=0 \tag{4b}$$

$$Y-p_1x_1-p_2x_2\geqq 0, \lambda(Y-p_1x_1-p_2x_2)=0 \tag{4c}$$

91 这里 $x_1\geqq 0, x_2\geqq 0, \lambda\geqq 0$.因为我们能够说明在最优解处 $x_1>0, x_2>0$(参见下面注解 7),(4a)和(4b)可以等价地写作

$$ax_1^{a-1}x_2^{1-a}=\lambda p_1, (1-a)x_1^a x_2^{-a}=\lambda p_2 \tag{4a′}$$

这又推出 $\lambda>0$,因此(4c)等价地写作

$$p_1x_1+p_2x_2=Y \tag{4b'}$$

即(4)可以简化为等价和熟悉的形式(4′).从(4′),x_1,x_2 的最优解以及 λ 的值现在可以很容易的得到.

在有约束的最大化理论中一个最重要的问题是最优化条件,(LM)或者(M)与(FOC)条件之间的关系.正如前面提到的,通常(FOC)对于最优解**既不是必要的也不是充分的**.例如,(FOC)对于(LM)是**必要的**这样的通常论点一般是错误的.这一点在例 2.3 中可以看到,它称为 **Slater 反例**.

【例 2.3】 考虑下面问题:选择 x,在 $g(x)=-x^2\geqq 0, x\geqq 0, x\in R$ 的条件下,使 $f(x)=x$ 最大.明显地,约束集合只包含一点 0,$S=\{0\}$.因此 $x^*=0$ 是问题的惟一解:$x^*=0$ 满足条件(M).另一方面,设 $\Phi(x,\lambda)\equiv f(x)+\lambda g(x)=x-\lambda x^2$,对 $x^*=0$,我们有

$$\partial\Phi(x^*,\lambda^*)/\partial x=1-2\lambda x^*=1>0$$

因此,在 $x^*=0$ 处(FOC)不满足.

众所周知,(FOC)可能不是(LM)的充分条件.我们将通过例 2.4 中的下面两个情况说明这一点.

【例 2.4】 设 $S=\{x\in R: x\geqq 0\}$,考虑 $f(x)=(x-1)^3$.明显地,在此情形中 $f(x)$ 也是拉格朗日函数($f=\Phi$),并且,如果 $x^*=1$,

$$f'(x^*)=3(x^*-1)^2=0$$

这样,在 $x^*=1$ 处(FOC)满足,然而 $x^*=1$ 既不适合(LM)也不适合(M).点 $x^*=1$ 被称为**拐点**.另外,考虑 $f(x)=(x-1)^2, S\equiv\{x\in R: x\geqq 0\}$.$f(x)$ 也是拉格朗日函数,如果 $x^*=1$,

$$f'(x^*)=2(x^*-1)=0$$

这样,在 $x^*=1$ 处(FOC)满足,而 $x^*=1$ 既不适合(LM)也不适合(M).恰恰相反,点 $x^*=1$ 对于所有 $x\in S$ 使 $f(x)$ 取得最小值.

已知(FOC)对于(LM)既不是必要的也不是充分的之后,自然的问题是:在什么条件下,我们能够确定(FOC)对于(LM)是必要的,什么条件下能够确定(FOC)对于(LM)是充分的.定理 2.2 实质上表明了在凹性条件下(FOC)对于(M)(全局最大值)是充分必要的,它在经济学方面有着很多应用.

【定理 2.2】 令 $f,g_j,j=1,2,\cdots,m$ 都是定义在 R^n 上的凹函数.那么:[6]

(i) (FOC)推出条件(M);

(ii) (M)推出(FOC),如果下列条件成立,即

$$\text{存在 } \bar{x}\geqq 0,\text{使得 } g_j(\bar{x})>0, j=1,2,\cdots,m \tag{5}$$

注:条件(5)称为 **Slater 条件**.从定理 2.2,我们能够立刻断言:如果 f,g_j,

$j=1,2,\cdots,m$ 都是凹的，且 Slater 条件成立时，(FOC)对(M)是充分必要的. 注意，尽管 f 和 g 都是凹的，但例 2.3 违反了 Slater 条件. 这样，例 2.3 说明了定理 2.2 的第(ii)条中的 Slater 条件的极端重要性.

93 注：回顾例 2.2. 在这个问题中，$f(x_1,x_2)$ 是凹的，$g(x_1,x_2)=Y-p_1x_1-p_2x_2$ 是线性的(因此是凹的). 只要 $Y>0$，Slater 条件是明显满足的，因为 $Y>0$ 推出预算集合 $\{(x_1,x_2)\geqslant 0: p_1x_1+p_2x_2\leqslant Y\}$ 有内点. 因此，条件(4)对于全局最大来说是充分必要的. 这尤其意味着在凹性条件下，古典最优解理论的二阶条件的烦琐讨论能够被完全省去. 而且，古典理论中的(FOC)只提供了一个局部最大的特性. 例 2.2 中，我们能够说明在最优解处 $x_1>0, x_2>0$，因此(4)对于一个全局最大成为充要条件.[7] 由(4′)用通常的计算方法得出(利用条件 $x_1>0, x_2>0$，且 $\lambda>0$)：

$$x_1=\alpha Y/p_1, x_2=(1-\alpha)Y/p_2$$

$$\lambda=\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}p_1^{-\alpha}p_2^{(1-\alpha)} \tag{4″}$$

在定理 2.2 中，我们断定 f 和 g_j 的凹性以及 Slater 条件可以保证(FOC)是(M)的必要条件. 事实上目标 f 的凹性，在保证(FOC)是(LM)，从而是(M)的必要条件时，是可以完全去掉的. 可证明，对约束方程的限制(称为**约束规格条件**)，通常可保证(FOC)是(LM)的必要条件. 以下定理(Arrow, Hurwicz 和 Uzawa, 1961)，我们称作 **Arrow－Hurwicz－Uzawa 定理**，提供了这题这样的命题.(另见 Takayama 1985, 102～107 页，可找到这一定理的讲解和证明.)

【定理 2.3】 如果下列条件中任何一个成立，(FOC)是(LM)的必要条件：

94 (i) 函数 $g_j(x), j=1,2,\cdots,m$，都是凸函数；

(ii) 函数 $g_j(x), j=1,2,\cdots,m$，都是线性的；

(iii) 函数 $g_j(x), j=1,2,\cdots,m$，都是凹函数，并且 Slater 条件(5)成立；

(iv) 约束集合 S 是凸的并且有一个内点，对所有 $j\in E$，$g'_j(x^*)\neq 0$，这里 E 是在 x^* 点所有有效约束的集合；

(v) $[g'_j(x^*)]_{j\in E}$ 的秩等于在 x^* 点的有效约束的个数，这里假定 $m<n$ (**秩条件**).

注：我们可以称这些条件为 **Arrow－Hurwicz－Uzawa(或者 A-H-U)条件**. 条件(ii)明显是条件(i)的一个特殊情形. 例 2.2 中，约束是线性的，因此由条件(ii)，前面有关 Slater 条件的讨论可以省去. 另外，条件(ii)在线性规划中起着明显重要的作用.

在定理 2.3 中，秩的条件(v)需进一步说明. 为说明这一点，令约束为

$$g_j(x)\geqq 0, j=1,2,\cdots,11$$

并且设

$$g_j(x^*)=0, j=3,7,8, \text{且 } g_j(x^*)>0, j\neq 3,7,8$$

因此，$E=\{3,7,8\}$. 则

$$A\equiv\left[\frac{\partial g_j(x^*)}{\partial x_i}\right]_{j\in E}=\begin{bmatrix}\partial g_3{}^*/\partial x_1 & \cdots & \partial g_3{}^*/\partial x_n\\ \partial g_7{}^*/\partial x_1 & \cdots & \partial g_7{}^*/\partial x_n\\ \partial g_8{}^*/\partial x_1 & \cdots & \partial g_8{}^*/\partial x_n\end{bmatrix}$$

95 这里$\partial g_j{}^*/\partial x_i$表示在$x^*$处赋值的$\partial g_j/\partial x_i$. 矩阵的秩定义为线性无关的行的数目(它等于线性无关的列的数目).[8]既然假定$m<n$，秩的条件表明矩阵A“满秩”. 在古典的最优化理论中，要求对所有$j=1,2,\cdots,m$，有$g_j(x^*)=0$，这里假定m小于n. 在这种情形下，所有约束在x^*点都是有效的，并且秩的条件要求雅可比矩阵$g'(x^*)$的秩等于m，即$g'(x^*)$也需要满秩. 这样，定理2.3的秩条件正好与古典的最优化理论的秩的条件相一致. 同样注意，在古典最大化问题中，预先假定$m<n$；如果$m>n$，那么就没法满足秩的条件.[9]

定理2.3涉及保证(FOC)对于(LM)是必要的一些条件. 那么，我们可能问，在什么情况下(FOC)对于一个最优解是充分的. 归功于Arrow和Enthoven(1961)，下面定理在此提供了有用的条件.

【定理2.4】 令f和$g_j, j=1,2,\cdots,m$是拟凹函数. 那么如果下面条件的任何一个满足，则(FOC)对于条件(M)是充分的：

(i) 对于至少一个变量x_i，$\partial f(x^*)/\partial x_i<0$；

(ii) 对某个“相关变量”i，$\partial f(x^*)/\partial x_i>0$，这里$x_i$称作一个**相关变量**，如果存在一个$\bar{x}\in S$，使$\bar{x}_i>0$，其中

$$S\equiv\{x\in R^n: x\geqq 0, g_j(x)\geqq 0, j=1,2,\cdots,m\}$$

(iii) $f'(x^*)\neq 0$，并且在x^*的一个邻域内$f(x)$是二阶连续可微.

(iv) 函数$f(x)$是凹函数.

96 注：函数g_j都是拟凹的要求能够放宽到假定约束集合$S\equiv\{x\in R^n: x\geqq 0, g_j(x)\geqq 0, j=1,2,\cdots,m\}$是凸的. 条件(iv)减弱了定理2.2的命题(ii)，因为只需g_j是拟凹的而不是凹的. 条件(ii)中的“相关变量”是“不必违反约束而能取正值的”变量(Arrow和Enthoven，1961，783页). 在许多经济应用中，变量通常都是相关变量，因此条件(ii)在经济学中很有用. 如果$f(x)$是消费者选择理论中的效用函数，那么条件(ii)表明至少在x^*的一个邻域中存在至少一种消费者还未满足的商品. 正如在生产理论中，$f(x)$是生产函数，条件(ii)表明在x^*点至少一个要素的边际产量是正的. 我们称定理2.4为Arrow－

Enthoven 定理.这个定理的扩展在附录 B 中可找到.

根据下面的例子,我们现在来说明上面的一些讨论,尤其是那些与定理 2.3 和定理 2.4 有关的.

【例 2.5】 我们考虑下面的问题:在 $x_1^2 + x_2^2 \leqq 1, x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0$ 的约束下,选择 $(x_1, x_2) \in R^2$ 使 $f(x) = x_1 + x_2$ 最大.不用援引(FOC)等等的数学讨论,这个问题很容易由图形得到这样一个解,$x_1 = x_2 = 1/\sqrt{2}$(见图 2.8).

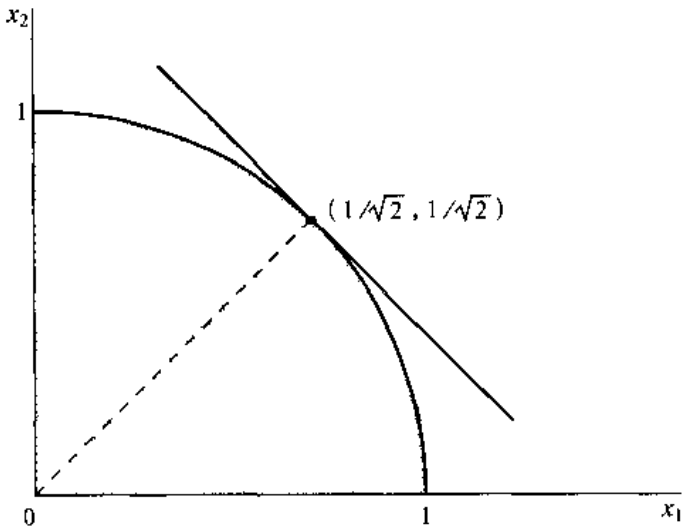


图 2.8 例 2.5 的图解

现在我们说明如何通过(FOC)用数学方法得到这样一个解.这样做的目的只是根据一个简单的例子说明上面的讨论.那么读者就能够分析更复杂的问题,这些问题的解不能立刻从图表就能得到的.现在问题的拉格朗日函数为 $\Phi(x, \lambda) \equiv (x_1 + x_2) + \lambda(1 - x_1^2 - x_2^2)$.为了简化,我们省略(*)来表示最优解,写出上述问题的(FOC)为:存在 $x_1 \geqq 0, x_2 \leqq 0, \lambda \geqq 0$ 使得

$$\partial\Phi/\partial x_1 = 1 - 2\lambda x_1 \leqq 0, \partial\Phi/\partial x_2 = 1 - 2\lambda x_2 \leqq 0 \tag{6a}$$

$$(1 - 2\lambda x_1)x_1 = 0, (1 - 2\lambda x_2)x_2 = 0 \tag{6b}$$

$$1 - x_1^2 - x_2^2 \geqq 0, \lambda(1 - x_2^2 - x_2^2) = 0 \tag{6c}$$

明显地,$f(x)$是线性的,因此是凹的.另外可知 $g(x) \equiv 1 - x_1^2 - x_2^2$ 是严格凹的.[10]既然最大化函数和约束函数都是凹的,因而是拟凹的,我们可以利用
97 Arrow－Enthoven 定理(定理 2.4).利用这个定理的条件(iv),我们可以立刻得到结论:(FOC)是全局最大(M)的充分条件.注意 Slater 条件在目前的问题中满足,我们可以得出结论:由 Arrow－Hurwicz－Uzawa 定理(**定理 2.3**),(FOC)对于局部最大(LM)是必要的.这样,我们可以下结论:(FOC)或者条件(6)是全局最大值的**充要条件**,因为(M)明显推出(LM),这里我们记作:

$$(\mathrm{FOC})\Rightarrow(\mathrm{M})\Rightarrow(\mathrm{LM})\Rightarrow(\mathrm{FOC})$$

因此　　$(\mathrm{FOC})\Leftrightarrow(\mathrm{M})$

注意，既然由条件(6a)，$1\leqq 2\lambda x_1$ 和 $x_1=0$ 矛盾，所以 x_1-0 不是最优解. 类似地，$x_2=0$ 不是最优解. 因此在最优解处我们必须有 $x_1>$，$x_2>0$. 则(6a)和(6b)被简化为

$$1=2\lambda x_1=2\lambda x_2 \tag{6'a}$$

这反过来表明 $\lambda>0$，因此(6c)被简化为

$$1-x_1^2-x_2^2=0 \tag{6'b}$$

98　由(6'a)和(6'b)，我们容易得到

$$x_1=x_2=1/\sqrt{2}(\text{同时 }\lambda=1/\sqrt{2}) \tag{6''}$$

它是原来问题的解.

在这一节的其余部分，我们考虑微观理论中的两个著名问题，消费者选择问题和成本最小化问题. 我们利用这两个问题说明我们有关(M)和(FOC)之间关系的讨论.

消费者选择　同前面一样，我们考虑选择一个商品束消费的顾客，$x\in R^n$，在 $p\cdot x\leqq Y$，$x\geqq 0$ 的条件下，最大化 $u(x)$，其中 $u(x)$，p 和 Y 分别是他(她)的效用函数，价格向量和收入. 价格向量假定对于他(她)来说是给定的，Y 假定是正的常数. 这个问题的拉格朗日函数可写作 $\Phi(x,\lambda)\equiv u(x)+\lambda(Y-p\cdot x)$. 那么令 $u_i\equiv\partial u/\partial x_i$，这个问题的条件(2)或(FOC)可写作

$$u_i(x^*)\leqq\lambda^* p_i,\quad [u_i(x^*)-\lambda^* p_i]x_i^*=0,\ i=1,2,\cdots,n \tag{7a}$$

$$Y-p\cdot x^*\geqq 0,\quad \lambda^*(Y-p\cdot x^*)=0 \tag{7b}$$

这里，$x^*\geqq 0$，$\lambda^*\geqq 0$. 既然约束函数 $g(x)\equiv Y-p\cdot x$ 是线性的，由定理 2.3，(7)给出了一组对于局部最大值的必要条件. 假定 $u(x)$ 是严格拟凹的，对某个相关变量 i，$u_i(x^*)>0$，由定理(2.4)的命题(ii)和定理 2.1 的命题(ii)，(7)对于惟一的全局最大是充分的. 条件 $u_i(x^*)>0$ 意味着顾客至少在最优解的一个领域中对某一商品没有满足，我们称此为**局部非饱和**. 总之，在 u 的严格的拟凹性和局部非饱和情况下，对于惟一的全局最大值，(7)是充要的. 注意在传统的阐述中借助于加边海赛矩阵的二阶条件的繁琐讨论在这里被完全排除了. 实质上，它被 u 的严格拟凹性所代替，这同样也有助于一个较加边海赛矩
99　阵更容易的经济解释.[11] 而且，u 的拟凹性有助于通过(FOC)得出最优解的全局特征，而在古典理论中，一阶和二阶条件只是局部地刻画了最优解的特性.

既然对某些 i，$u_i(x^*)>0$，则(7a)中 $u_i(x^*)\leqq\lambda^* p_i$ 推出 $\lambda^*>0$ 并且对

这样一个商品 p_i 必须为止.在 $\lambda^*>0$ 的条件下,(7b)可以被写作下面等价的形式:

$$Y-p\cdot x^*=0 \tag{7'b}$$

即,如果消费者在最优点对至少一种商品不满足,则 λ^* 一定是正的,并且消费者将正如所期望的花费他(她)的所有收入.

另外,如果我们假定,对于所有的 i,$x_i^*>0$(一个内部解),那么(7a)简化为

$$u_i(x^*)=\lambda^* p_i, i=1,2,\cdots,n \tag{7a}$$

通过(7'a)和(7b')中的$(n+1)$个方程,通常经过隐函数定理决定$(n+1)$个变量,$x_i^*=x_i(p,Y)$,$i=1,2,\cdots,n$,$\lambda^*=\lambda(p,Y)$.函数 $x_i(p,Y)$,$i=1,2,\cdots,n$,被称为**(马歇尔)需求函数**.

在上面的情形中,我们假定对所有 i,$x_i^*>0$.通常不一定是这种情形.可能对某些 i 有 $x_i^*=0$(角解).例如,如果一种特殊的商品相对于消费者的喜好和收入来说太贵,则这种情形将会出现.如果 $x_i^*=0$,那么我们有

$$\text{对这样的 } i, u_i(x^*)\leqq\lambda^* p_i$$

既然 $u_i(x^*)<\lambda^* p_i$ 在这种情形中是可能的,价格线在这样的角点可以不相切于无差异曲线(或曲面).这在图 2.9 中得到说明,这里虚线表示在 x^* 点的切线,它的斜率不同于预算线的斜率.

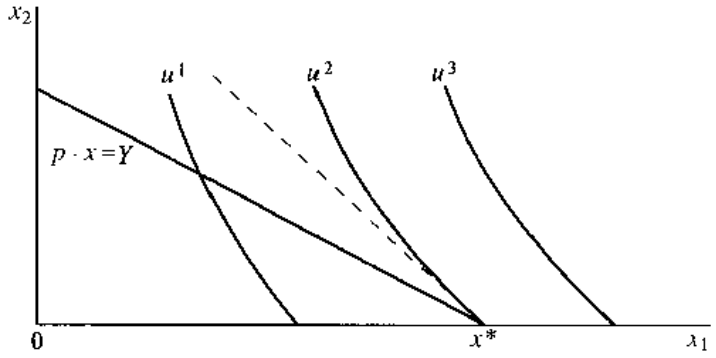


图 2.9 角解的图示

在消费者理论的传统讲解中,(FOC)表述为(7'a)的形式.这不仅意指消费者不顾其收入结构而购买每种商品,而且它不允许有边际负效用的情形.也就是说,在(7'a)和对所有 i,$p_i>0$ 的假设下,不可能有

$$\text{对某个 } i, u_i(x^*)<0$$

100 另一方面,在非线性规划公式中能容易地结合这一分析.具有一个正的价格($p_i>0$)和 $x_i^*=0$ 是相当一致的:即如果消费者对价格为正的一种商品有负的边际效用(至少在最优解处),那么他将不购买该商品.肉产品对于素食主义

者和酒精饮料对于摩门教信徒可以是这样的例子;实际上,在这个情形中我们可以有对这样的 i[12],在所有的 x 处(不只在 x^* 点)

$$u_i(x)<0$$

同样,注意我们的公式允许对特定的商品有负的价格.消费者为处理(或获得)一个特定商品而必须支付正(或负)的价格.废品和垃圾便是如此的例
101 子.如果 $p_i<0$,那么(7a)要求 $u_i(x)<0$(既然 $\lambda^*>0$),但对如此的 i 仍可能有 $x_i^*>0$(这里 $u_i(x^*)=\lambda^* p^i<0$).

上面已阐述的非线性规划理论有一些重要的特征(同古典优化理论相比较).[13]例如,我们可以考虑下列特征:

(1)(FOC)的必要性和充分性的讨论变得非常简单和明晰,因为它不包括对加边海赛矩阵的(常常乏味的)讨论.

(2)(FOC)是作为全局最优解的一个充分必要特征而得到的,而在古典理论中,它只是作为局部最优解的特性而得到的.

(3)不像古典理论,它不必假设约束必须总是有效的(例如,在效用最大化中,消费者不必花掉他(她)的所有收入,即允许 $p\cdot x<Y$;同时我们能够说明如果他(她)在最优点对至少一种商品不满足,他(她)将花掉他(她)所有的收入 $p\cdot x^*=Y$).

(4)允许角解.

下面,我们考虑熟悉的成本最小化问题.

成本最小化 我们考虑一家公司要选择要素投入组合,$x\in R^n$,在 $f(x)\geqq y, x\geqq 0$ 的条件下,最小化 $w\cdot x$[=最大化 $-(w\cdot x)$],这里 w 为要素价格向量,y 为目标产出水平,$f(x)$为生产函数,w 和 $y(>0)$给定.为容易阐述,假设对所有的 i,$w_i>0$(读者应该能够很容易地放宽这个假设).这个问题的拉格朗日函数可以定义为 $\Phi(x,\lambda)\equiv -w\cdot x+\lambda[f(x)-y]$.那么,目前问题的(FOC)可以写作:

$$-w_i+\lambda^* f_i(x^*)\leqq 0,[-w_i+\lambda^* f_i(x^*)]x_i^*=0,\forall i \tag{8a}$$

$$f(x^*)-y\geqq 0,\lambda^*[f(x^*)-y]=0 \tag{8b}$$

102 $x^*\geqq 0$ 且 $\lambda^*\geqq 0$,其中 $f_i\equiv \partial f/\partial x_i$.这些条件决定了要素需求函数 $x_i^*=x(w,y), i=1,2,\cdots,n$,以及 $\lambda^*=\lambda(w,y)$.

假设存在一个 $\bar{x}\geqq 0$ 使 $f(\bar{x})>y$(Slater 条件).如果生产函数 f 是凹的,那么由定理 2.3 的条件(iii)(Arrow-Hurwicz-Uzawa 定理),(8)对局部最优解,进而对全局最优解是必要的.既然 $(-w\cdot x)$是线性的,因而是凹的,并且在 f 的凹性条件下 $|f(x)-y|$ 是凹的(因而是拟凹的),则由定理 2.4 (Arrow-Enthoven 定理)的条件(iv),(8)对于全局最优解也是充分的.这样,如果 f 是凹的(且如果 Slater 条件被满足),(8)对于全局最优解是充分必要的.另一方面,生产函数的凹性可能太强了.因此,我们可以另外考虑只要求 f 是拟凹的情形.注意目前问题的约束集合 S 可写作:

$$S\equiv\{x\in R^n: x\geqq 0, f(x)\geqq y\}$$

如果 f 是拟凹的，则集合 S 是凸的. 因此，再通过定理 2.4 的条件(iv)，(8)对全局最优解是充分的. 这里我们可以再次注意到 $(-w\cdot x)$ 是线性的，因而是凹的. 为了证实(8)的必要性，我们可以利用定理 2.3 的条件(iv).

假定对某个 i，$x_i^*>0$，即至少有一种要素用于生产. 那么条件(8a)要求 $\lambda^* f_i(x^*)=w_i$，因此 $\lambda^*>0$ 且 $f_i(x^*)>0$，即至少有一种要素用于生产. 那么条件(8a)要求 $\lambda^* f_i(x^*)=w_i$，因此 $\lambda^*>0$ 且 $f_i(x^*)>0$. 我们假定 $f_i(x^*)>0$，也就是如果第 i 种要素用于生产，它的边际产量是正的. 由(8b)，$\lambda^*>0$ 推出 $f(x^*)=y$. 注意我们没有预先假设：对所有 x，$f(x)=y$. $f(x^*)=y$ 是作为对某 i，$x_i^*>0$ 的假设和最优化的结果被我们得到的. 同时注意在(8a)中很可能对某 i，$f_i(x^*)>0$ 且 $\lambda^* f_i(x^*)<w_i$，在此情形中，$x_i^*=0$. 如果某一要素对于技术给定的公司来说"太昂贵"，这种要素在最优处将不被使用. 即，一个隅角解是相当有可能的. 特别地，如果我们对所有 i 有 $x_i^*>0$(一个内解)，也就是说，如同在传统理论中如果所有要素在最优解处都在生产中使用，那么(8a)可以被等价地重写作对所有 i，$\lambda_i^* f_i(x^*)=w_i$. 因此对这种情形回忆 $f(x^*)=y$，(8a)和(8b)可以写作下面熟悉的形式：

$$\lambda^* f_i(x^*)=w_i, i=1,2,\cdots,n \text{ 和 } f(x^*)=y \tag{8'}$$

103 (8′)中的 $(n+1)$ 个方程决定了 $(n+1)$ 个变量，按照通常的方法通过隐函数定理，[14] $x_i^*=x_i(w,y)$，$i=1,2,\cdots,n$，$\lambda^*=\lambda(w,y)$. 函数 $x_i(w,y)$ 表示对第 i 种要素的需求函数.

§2.3 最优解的鞍点特征

令 $X\subset R^n$ 和 $Y\subset R^m$；这里我们允许 $X=R^n$ 和 $Y=R^m$ 的可能性. 在这一节中下面的概念将起重要作用.

[定义]. 令 $\Phi(x,y)$ 是定义在 $X\times Y$ 上的实值函数，其中 $x\in X$，$y\in Y$. 如果对所有 $x\in X$，$y\in Y$，

$$\Phi(x,y^*)\leqq\Phi(x^*,y^*)\leqq\Phi(x^*,y),$$

那么 $X\times Y$ 中的点 (x^*,y^*) 称为 $\Phi(x,y)$ 的**鞍点**.

注：鞍点可能不存在，并且鞍点存在时，它不必是惟一的. 注意：

$$\Phi(x^*,y^*)=\max_x\Phi(x,y^*),\ \forall x\in X$$

$$\Phi(x^*,y^*)=\min_y \Phi(x^*,y),\forall\ y\in Y$$

即对一个固定值 y^*，x^* 使 $\Phi(x,y^*)$ 达到最大；对于一个固定值 x^*，y^* 使 $\Phi(x^*,y)$ 达到最小. 直观地，鞍点可以被类似马鞍的图形表示（见图 2.10）.[15]

注：另一方面，鞍点总能被类似马鞍的图形所表示是不正确的. 考虑下面的例子（来自 Nikaido, 1961, 142～143 页）：

104

$$\Phi(x,y)\equiv 1-x+y, 0\leqq x\leqq 1, 0\leqq y\leqq 1$$

点 $(0,0)$ 是 $\Phi(x,y)$ 的一个鞍点，但是它不能由马鞍图形所表示. 读者应该能很容易地说明这种情形的鞍点.

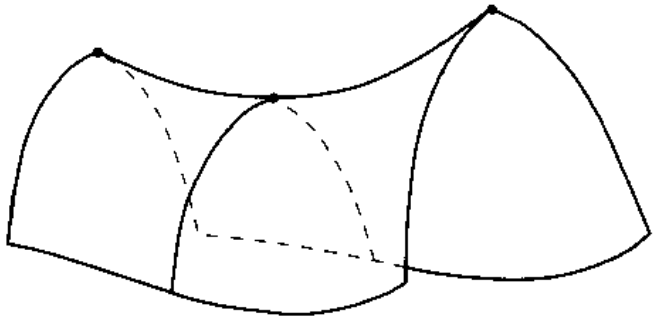


图 2.10　鞍点的图示

鞍点提供了最优解的一个很好的特征. 令 f 和 $g_j, j=1,2,\cdots,m$，是实值函数，我们在此不必假设这些函数的可微性. 考虑问题：在 $g_j(x)\geqq 0, j=1,2,\cdots,m$，和 $x\geqq 0$ 的约束下，选择 $x\in R^n$ 使 $f(x)$ 最大. 这个问题的约束集合再次表示为 S，即

$$S\equiv\{x\in R^n: g_j(x)\geqq 0, j-1,2,\cdots,m, x\geqq 0\}$$

定义拉格朗日函数为

$$\Phi(x,\lambda)\equiv f(x)+\lambda\cdot g(x), \lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)\geqq 0.$$

令 $\Omega^n\equiv\{x\in R^n: x\geqq 0\}$ 即 Ω^n 表示 R^n 的非负象限.

我们区别下面两个条件：

(M)　在 R^n 中存在点 x^*，使得对所有 $x\in S$，有 $f(x^*)\geqq f(x)$.

(SP)　在 $\Omega^n\times\Omega^m$ 中存在 (x^*,λ^*)，使得对所有 $x\in\Omega^n$ 和 $\lambda\in\Omega^m$，有

$$\Phi(x,\lambda^*)\leqq\Phi(x^*,\lambda^*)\leqq\Phi(x^*,\lambda)$$

其中 $\Phi(x,\lambda)\equiv f(x)+\lambda\cdot g(x)$.

105 条件(M)是在前一节中用到的全局最大条件(在约束条件下).条件(SP)称为鞍点条件.根据前面的概念,我们有定理 2.5.

【定理 2.5】 假设条件(SP)成立,那么:

(i) 条件(M)成立;

(ii) $\lambda^* \cdot g(x^*) = 0$.

注:注意定理 2.5 在函数 f, g_j 的性质方面不需要假设(不像前面的一些定理).然而定理的证明是初等的.例如,见 Takayama(1985,74 页).

上面定理的逆命题不容易证明,它深入涉及到了凸集的基本性质.定理 2.6 来自 Kuhn 和 Tucker(1951)和 Uzawa(1958).另见 Takayama(1985,70～73 页).

【定理 2.6】 假设函数 f 和 g_j 都是凹的,Slater 条件成立,即

(S) 存在一点 $\bar{x} \geqq 0$,使 $g_j(\bar{x}) > 0, j = 1, 2, \cdots, m$

那么,条件(M)推出条件(SP).

结合定理 2.5 和 2.6,我们立刻得到定理 2.7.

【定理 2.7】 假定 f 和 $g_j, j = 1, 2, \cdots, m$ 都是凹的,并且 Slater 条件(S)成立.那么当且仅当(SP)成立时,条件(M)成立,此时

$$\lambda^* \cdot g(x^*) = 0$$

在定理 2.5、2.6 和 2.7 中,我们不需要函数 f 和 g_j 的可微性.现在假设这些函数连续可微.这就使我们把鞍点条件(SP)和前一节中得到的一些结论联系起来.注意除了非负约束 $x \geqq 0$ 外,对于无约束最大化问题,条件(SP)为 $\Phi(x, \lambda^*)$提供了关于 x 的全局最大条件,我们容易得定理 2.8.例如见 Takayama(1985,91～92 页).

106 **【定理 2.8】**

(i) 条件(SP)推出(FOC);

(ii) 如果 f 和 $g_j, j = 1, 2, \cdots, m$,都是凹的,那么(FOC)推出条件(SP).

注:因为条件(SP)总是推出(FOC),并且逆命题不必成立(需要附加条件),所以(FOC)通常被当作**拟鞍点条件(QSP)**.它也称为 **Kuhn-Tucker-Lagrange** 条件.

注:最优解的鞍点特征在许多方面是很有用的.一个明显的好处是它不需要任何函数的可微性.Takayama-El-Hodiri(1968,另外 Takayama1985,285～294 页)应用它来得到竞争均衡的特征,在它对比较静态问题的应用中,我们可以允许变动参数的离散跳跃,如果我们使用(SP)特征.见 Anderson－Takayama(1979).

在这个时候，值得总结一下关于非线性规划问题解的一些特性. 首先，我们回想这个问题和各种条件. 我们的问题是在 $x\in S$ 的约束下，选择 $x\in R^n$ 使 $f(x)$ 最大，这里 $S\equiv\{x\in R^n: g_j(x)\geqq 0, j=1,2,\cdots,m, x\geqq 0\}$. 各种条件列出如下：

条件(M) 存在 $x^*\in S$，对所有 $x\in S$，有 $f(x^*)\geqq f(x)$.

条件(LM) 存在 $x^*\in S$ 和邻域 $N_r(x^*)$，对所有 $x\in S\cap N_r(x^*)$，有 $f(x^*)\geqq f(x)$.

条件(SP) 存在 $(x^*,\lambda^*)\geqq 0$，使得 (x^*,λ^*) 是拉格朗日函数

$$\Phi(x,\lambda)\equiv f(x)+\lambda\cdot g(x)$$

的鞍点.

条件(FOC) 存在 $(x^*,\lambda^*)\geqq 0$，使得条件(2a)和(2b)成立.

条件(A-H-U) 约束函数 g_j 满足下面任何一个 Arrow－Hurwicz－Uzawa 条件：

107

(i) g_j 都是凸的或线性的；

(ii) g_j 都是凹的且满足 Slater 条件：

(S) 存在 $\bar{x}\geqq 0$，使得对所有 j，$g_j(\bar{x})>0$

(iii) 秩条件满足.

条件(A-E) 函数 f 和 g_j 都是拟凹的且 Arrow－Enthoven 定理的四个条件中的任何一个都满足. 例如，

(i) 对某相关变量 i，$\partial f(x^*)/\partial x_i>0$；

(ii) 函数 $f(x)$ 是凹的.

条件(Conc) 函数 f 和 $g_j, j=1,2,\cdots,m$ 都是凹的.

条件(Conv) 集合 S 是凸的，函数 f 是显式拟凹或凹的.

注意如果条件(Conc)满足，那么条件(Conv)总是满足的. 现在我们准备给出一张图表来说明上述条件之间的逻辑关系(图 2.11). 在图 2.11 中，条件在用箭头表示的下方，箭头读作“推出”；如果没有条件被标明，那么为了得到给定的结论推导不需要条件。每当(FOC)出现时，我们总是假定 f 和 g_j 可微.

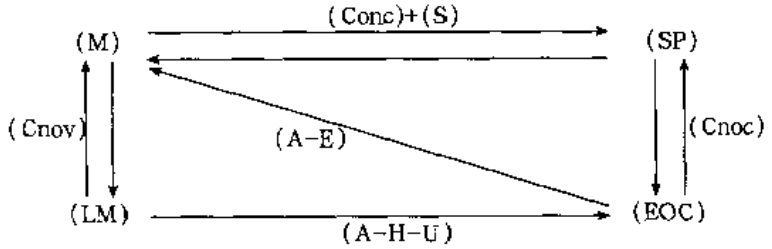


图 2.11 x^* 的特征

在非线性规划理论对经济学问的许多实际应用中，下面的任一条件总是

108 满足的：

(N1)　函数 f 和 g_j 都是凹的并且满足条件(S)；

(N2)　函数 f 是凹的，g_j 都是线性的.

在这样一个"良好"的形势下，我们能很容易地看出图 2.11 可以大大简化为图 2.12，其中(M)、(LM)、(FOC)和(SP)都是等价的.在线性规划中，条件(N2)满足.因此，所有这些条件都是等价的.总之，我们得出下面的结论：

【定理 2.9】　一般地，我们有图 2.11 所说明的各种条件下的推导关系来刻画 x^*，即非线性规划问题的一个解的特征.此外，如果条件(N1)或(N2)满足，则(M)、(LM)、(FOC)和(SP)，如图 2.12 所示，都是等价的.线性规划是这样一个"良好"形势的特殊情形.

$$(\mathrm{M}) \Longleftarrow (\mathrm{LM}) \Longleftrightarrow (\mathrm{FOC}) \Longleftarrow (\mathrm{SP})$$

图 2.12　"良好"形势的 x 的特性

线性规划

令 p 是 R^n 中一个给定的向量，令 r 是 R^m 中一个给定的向量，令 A 是 $m \times n$ 阶矩阵.那么一个典型的线性规划问题可以表示为

$$(\mathrm{M_{LP}}) \quad \text{Maximize} \quad p \cdot x \quad \text{约束条件 } Ax \leqq r, x \geqq 0$$

向量 p 称为**赋值向量**.作为线性规划的一个例子，我们可以将问题($\mathrm{M_{LP}}$)中的符号解释如下：p = 价格向量，x = 产出向量，r = 原料向量，a_{ij} = 生产单位 j 商品所需要的第 i 种原料的数量，这里 a_{ij} 是矩阵 A 的 i 行 j 列的元素.

上面最大化问题($\mathrm{M_{LP}}$)的拉格朗日函数定义为

109

$$\Phi(x, w) \equiv p \cdot x + w \cdot (r - Ax), \tag{9}$$

这里 $w \in R^m$ 表示拉格朗日数乘数.那么由定理 2.9，当且仅当存在 $(x^*, w^*) \geqq 0$ 使 (x^*, w^*) 是 $\Phi(x, w)$ 的鞍点，即

$$\Phi(x, w^*) \leqq \Phi(x^*, w^*) \leqq \Phi(x^*, w), \forall\, x \geqq 0, w \geqq 0 \tag{10}$$

时，最大化问题($\mathrm{M_{LP}}$)的解 x^* 存在.定义函数 Ψ 为

$$\begin{aligned} \Psi(w, x) &\equiv -\Phi(x, w) = -p \cdot x - w \cdot (r - Ax) \\ &= -w \cdot r + x \cdot (A'w - p) \end{aligned} \tag{11}$$

这里 A' 是矩阵 A 的转置矩阵.那么由(10)，我们有

$$\Psi(w, x^*) \leqq \Psi(w^*, x^*) \leqq \Psi(w^*, x), \forall\, w \geqq 0, x \geqq 0 \tag{12}$$

这样，当且仅当存在一个 $(w^*, x^*) \geqq 0$，使 (w^*, x^*) 是 $\Psi(w, x)$ 的鞍点时，问题($\mathrm{M_{LP}}$)的解 x^* 存在.

现在考虑问题：在 $A'w \geqq p$ 且 $w \geqq 0$ 的条件下，选择 $w \in R^m$，使得

$$(\mathrm{M_{LP}}) \ \min\ w \cdot r \ (= \max - w \cdot r)$$

约束条件为

$$A'w \geqq p, w \geqq 0$$

这里 p 和 r 是给定的向量. w 是决策变量而不是拉格朗日乘数. 用 x 表示这个最小化问题(m_{LP})的拉格朗日乘数. 那么拉格朗日函数可以写作

$$\Psi(w,x) \equiv -w \cdot x + x \cdot (A'w - p) \tag{11'}$$

它形式上与(11)相同. 由定理 2.9, 当且仅当存在 $(w^*, x^*) \geqq 0$, 使 (w^*, x^*) 是 $\Psi(w,x)$ 的鞍点时, 最小化问题(m_{LP})解 $w^* \geqq 0$ 存在. 因此, (12)成立. 另一方面, $\Psi(w,x)$ 存在鞍点 (x^*, w^*) 与最大化问题(M_{LP})的解 x^* 的存在是充分必要的. 这样, 我们可以得出下面的结论:

110

【定理 2.10】

(i) 当且仅当最小化问题(m_{LP})的解 w^* 存在时, 存在最大化问题(M_{LP})的解 x^* 存在.

(ii) 当且仅当存在 $\Psi(w,x)$ 的鞍点 $(w^*, x^*) \geqq 0$, 或者等价地, 存在 $\Phi(x,w)$ 的鞍点 $(w^*, x^*) \geqq 0$ 时, 存在(M_{LP})的解 x^* 和(m_{LP})的解 w^* 存在, 此时我们有

$$w^* \cdot (r - Ax^*) = x^* \cdot (A'w^* - p) = 0 \tag{13}$$

$$p \cdot x^* = w^* \cdot r \tag{14}$$

注: 由定理 2.5 的命题(ii), (13)成立. 同时, 要注意的是 $\Phi(x^*, w^*) = -\Psi(w^*, x^*)$, 其中

$$p^* \cdot x^* + w^* \cdot (r - A \cdot x^*) = w^* \cdot r - x^* \cdot (A'w^* - p)$$

我们利用(13)得到(14).

最大化问题(M_{LP})称为最小化问题(m_{LP})的**对偶问题**. 类似的, (m_{LP})称为(M_{LP})的对偶问题.

在彼此对偶的两个问题(M_{LP})和(m_{LP})中, 应注意如下问题:

(i) (M_{LP}) 的赋值矢量 p 出现在(m_{LP})的约束中, (m_{LP})的赋值向量 r 出现在(M_{LP})的约束中.

(ii) 约束矩阵是彼此的转置.

(iii) 除了非负条件以外, 约束中的不等式转向.

注: 定理 2.10 的命题(i)和(13)、(14)是线性规划中重要结论的核心, 它被称为**线性规划的对偶定**理. 命题(ii)被称为 **Goldman - Tucker 定理**. 它首先由 Goldman - Tucker(1956)通过利用线性规划的对偶定理得到, 并且在线性和

111 非线性规划的发展中起了重大的作用. 有许多不依靠非线性规划理论的线性

规划的对偶定理的直接证明.对于这些证明,可看任何一本关于线性规划的标准课本.两个最简单、最有趣的证明可能是 Dantzig(1970,120～134 页)的证明和 Nikaido(1970,120～130 页)的证明,前者的定理证明作为线性规划的单纯形方法的一个应用.定理 2.10 的前面证明由 Takayama 得到(1985,156～157 页).

§2.4 古典最优化与非线性规划[16]

自 Hicks(1939,1946)和 Samuelson(1947)的著作以后,古典最优化理论对经济学家来说已经变得熟知了.它在经济学中被大量使用,甚至在非线性规划发展之后也是如此.因此,对古典最优化的结论作一个简短的总结并且比较这些结论与非线性规划的结论是非常有益的.在讲解中,我们将使用一些经济中熟悉的问题来说明.我们也将指出经济学家们的一些通常错误.

2.4.1 古典最优化[17]

令 f 和 $g_j, j=1,2,\cdots,m$ 是定义在 R^n 上的实值的,二阶连续可微函数,考虑下面的古典最大化问题(**CM**),选择 $x\in R^n$,使得

(CM) Maximize $f(x)$

约束条件为

$$g_j(x)=0, j=1,2,\cdots,m$$

正如 2.1 节中讨论的一样,假设 $m<n$,约束的数目小于选择变量的数目.同时,所有的约束都以等式形式表示(而不是不等式).**局部最大值条件(LM*)**写作:

(LM*) *存在 x^* 使 f 在约束条件下在 x^* 点达到局部最大值*

112 这个条件同 2.2 节中讨论的(LM*)的条件相似.

一阶条件(FOC*)写作:

(FOC*) *存在 $x^*\in R^n$ 和一个 $\lambda\in R^m$,使得 $\Phi_x^*=0$,即*

$$\partial f(x^*)/\partial x_i+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j^*\partial g_j(x^*)/\partial x_i=0, i=1,\cdots,n \tag{15a}$$

$$g_j(x^*)=0, j=1,2,\cdots,m \tag{15b}$$

这里 $\Phi(x,\lambda)=f(x,\lambda)+\lambda\cdot g(x)$(拉格朗日函数),并且 Φ_x^* 表示在 (x^*,λ^*) 赋值的梯度向量.

下面是古典最优化中的基本结论:

【定理 2.11】（欧拉，拉格朗日）：[18]令 B 是在 x^* 点处赋值的 g 的雅可比矩阵，

113

$$B=[\partial g_j(x^*)/\partial x_i](\equiv g_x^*)$$

这里 $m<n$，假定下面的秩条件(R)成立：

(R)　　B 的秩 $=m$

那么(LM*)推出(FOC*)。

既然 B 是 $m\times n$ 矩阵，$m<n$，那么条件(R)表明矩阵 B 一定满秩。众所周知，定理 2.11 经常在经济学中被广泛应用，并且被认为非常有用。尽管这样，在把该定理运用到经济学中时，存在一个通常的错误。也就是说，即在没有附加条件(R)时，时常断言条件(LM*)自动地推出(FOC*)。结果有许多这样的论文和课本，其中的条件(R)没有被检验，就从(LM*)推出(FOC*)。既然条件(R)在证明定理 2.11 中（见注释[17]）起着关键作用，那么这就相当遗憾了。

对于**非线性规划**，注意(15)很类似于(2)和(FOC)。然而，需要指出它们的一些不同：

(i) (2)中的 λ^* 被约束为 $\lambda^*\geqq 0$，而(15)中的 λ^* 可以是正的，负的或零。

(ii) 在(2)中，Φ_x^* 只被要求是非正的，而在(15)中必须有 $\Phi_j^*=0$。这个不同起源于非线性规划中的非负约束 $x\geqq 0$。另一方面，在非线性规划中如果 $x^*>0$（内部解），那么我们有 $\Phi_x^*=0$，正如我们在(3)中所讨论的那样。

(iii) 在(2)中，一些约束在最优点处被允许无效，即 $g(x^*)\geqq 0$，而在(15)中所有约束在最优点都必须是有效的，$g(x^*)=0$。实际上，在古典最优化中要求对所有 x，$g(x)=0$，即所有约束必须总是有效的。

114　(iv) 虽然在非线性规划中有可能对某 j，$g_j(x^*)>0$，但如果 $\lambda_j^*>0$，我们必须有 $g_j(x^*)=0$。因此，如果 $\lambda^*>0$（即对所有 j，$\lambda_j^*>0$），那么我们一定有对所有 j，$g_j(x^*)=0$。这样，如果 $x^*>0$ 且 $\lambda^*>0$，那么非线性规划的(FOC)看上去等同于古典最优化的(FOC)。

现在我们讨论二阶条件。为此，我们定义 $m\times n$ 阶矩阵 A 为

$$A=[\partial^2\Phi(x^*,\lambda^*)/\partial x_i\partial x_j](\equiv\Phi_{xx}^*)$$

A 是 Φ 在 x 处赋值为 (x^*,λ^*) 的海赛矩阵。**二阶必要条件(SONC)**和**二阶充分条件(SOSC)**分别写作：

(SONC)　　对所有使得 $B\xi=0$ 的 ξ，有 $\xi' A\xi\leqq 0$；

(SOSC)　　对所有 $\xi\neq 0$，且 $B\xi=0$ 的 ξ，有 $\xi' A\xi<0$；

这里 ξ' 是 ξ 的转置（ξ' 是行矢量）。[19]

现在我们准备陈述在古典理论条件下最优解的二阶特征。

【定理 2.12】

(i) 条件(LM*)和(R)推出(SONC).

(ii) (FOC*)和(SOSC)推出(LM*),其中最优解惟一.

115 由命题(i),如果(R)成立,(SONC)和(FOC*)对于(LM*)是必要的.命题(ii)说明如果(FOC*)成立,对一个惟一的局部最大解的充分条件是(SOSC).

通常的混淆是给定条件(R)时,断言(SOSC)对于(LM*)是需要的(或者必要的).[20]这是(SONC)和(SOSC)之间的混淆,即必要条件和充分条件之间的混淆.(SOSC)对于(LM*)不是必要的简单例子将通过利用类似例2.4的例子得到.

【例2.4'】 考虑选择 $x\in R$ 使 $f(x)=-(x-1)^4$ 最大的问题.明显地,$f(x)$在 $x^*=1$ 处达到它的最大值.注意,当且仅当 $x^*=1$ 时(FOC*),$f'(x^*)=0$满足,这里既然没有约束,条件(R)是不需要的.(SONC)是 $f''(x^*)\leqq 0$,(SOSC)是 $f''(x^*)<0$.明显地,$f''(x^*)=-12(x^*-1)^2$,它在 $x^*=1$处等于0,因此(SONC)满足而(SOSC)不满足.

分别用 a_{ij},b_{ij} 表示 A 和 B 的元素,这里 $A=[a_{ij}]$,$B=[b_{ij}]$.定义 $(m+k)\times(m+k)$阶行列式 $|C_k|$ 为

$$|C_k|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mk} \\ b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{m1} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{m2} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{1k} & b_{2k} & \cdots & b_{mk} & a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

设 H^* 是 $(m+n)\times(m+n)$的矩阵,定义为

$$H\equiv\begin{bmatrix} 0 & B \\ B^T & A \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & g_x^* \\ g_x^{*T} & \Phi_{xx}^* \end{bmatrix}$$

116 这里 B^T 和 g_x^{*T} 分别是 B 和 g_x^* 的转置矩阵.对于一个给定的最优问题矩阵 H 称为**加边海赛矩阵**(海赛矩阵 Φ_{xx}^* 加上 g_x^* 加边).注意 $|C_k|$ 是 H 的逐次主子式.现在回想线性代数中的一个著名结果(参看附录A中定理A.10),我们可以改写条件(SOSC)[21]为

(BHC) $$(-1)^k|C_k|>0,k=m+1,\cdots,n$$

这被称为**加边海赛条件(BHC)**.[22]由定理2.12,(BHC)在条件(FOC*)和(R)成立的条件下为惟一的局部最大提供了充分条件.

类似于混淆(SOSC)和(SONS)的错误在(BHC)的讨论中也出现.也就是说,时常断言条件(LM*)要求(BHC),或者(BHC)对于(LM)是必要的,这里(BHC)时常简单地被当作"二阶条件".这是错误的.至于简单的反例,回忆例

2.4′.因为没有约束，$\Phi_{xx}=f''(x)=-12(x-1)^2$，(BHC)简单表示为 $f''(x^*)<0$.然而，当 $x^*=1$ 时，是 f 的惟一全局最大值点.$f''(x^*)=0$，即(BHC)被违反，但 $x^*=1$ 给出了 f 的一个惟一的全局最大，我们还应注意 $H-f''(x^*)$.

2.4.2 与非线性规划的比较

117 古典最优化理论及其与非线性规划的比较可以根据一些著名的例子得到最好的说明.这里，利用消费者选择问题，我们将说明古典最优化理论是如何应用到经济学中的，并且将其与非线性规划方法作比较.我们可以回想一下已经作出的并且在2.2节总结出的比较结果.

在古典公式中，消费者在 $p\cdot x=Y$ 的约束下选择 $x\in R^n$ 使 $u(x)$ 最大.预先假定他(她)花掉所有的收入.拉格朗日函数为 $\Phi(x,\lambda)=f(x)+\lambda(Y-p\cdot x)$，这个问题的(FOC*)或(15)可写作：

$$u_i(x^*)=\lambda^* p_i,\ i=1,2,\cdots,n,\text{并且 } p\cdot x^*=Y \tag{16}$$

这里 $u_i\equiv\partial u/\partial x_i$.如果在(16)中对任意 i，$p_i>0$，并且对某 i，$u_i(x^*)>0$.那么我们一定有对任意 i，$u_i(x^*)>0$，且 $\lambda^*>0$.这不允许消费者对某一价格为正的商品有边际负效用的可能性[$u_i(x^*)<0$].

同样，正如前面所提及的，在古典最优化条件中很少谈及角解.由(16)，我们得不到消费者是否将购买相对于价格－收入结构的特定商品的太多信息.另一方面，这样的信息在得到类似于(16)的条件中起着关键作用.

既然约束函数可以写作 $g(x)=Y-p\cdot x$，我们有 $g'(x)=-p$.因此，假设对任意 i，$p_i>0$，或者 $u_i(x^*)>0$，秩条件(R)满足，这里 $g'(x)$ 的秩等于1.这样，由定理2.11，(FOC*)或者(16)是局部最大值的必要条件.这个古典秩条件与定理2.3(Arrow－Hurwicz－Uzawa定理)的条件(v)相一致.然而，在非线性规划公式中，约束函数的线性的简单条件足以在不援引秩条件的情况下得出(FOC)对于LM是必要的结论.

回想对于这个问题的拉格朗日函数的表达式，我们立刻可以观察到 u 的海赛矩阵 $\Phi_{xx}=u''(x)$.然后回想 $g'(x)=-p$，我们可以定义加边海赛矩阵为

$$H=\begin{bmatrix}0 & -p\\ -p^T & u''(x^*)\end{bmatrix}$$

118 这里 p^T 是 p 的转置.因此(BHC)能写为

$$\begin{vmatrix}0 & -p_1\\ -p_1 & u_{11}^*\end{vmatrix}<0,\quad\begin{vmatrix}0 & -p_1 & -p_2\\ -p_1 & u_{11}^* & u_{12}^*\\ -p_2 & u_{21}^* & u_{22}^*\end{vmatrix}>0,\cdots \tag{17}$$

这里 $u_{ij}^*\equiv\partial^2 u^*(x^*)/\partial x_i\partial x_j$，$i,j=1,2,\cdots,n$.这可以等价地写为

$$\begin{vmatrix} 0 & p_1 \\ p_1 & u_{11}^* \end{vmatrix} < 0, \begin{vmatrix} 0 & p_1 & p_2 \\ p_1 & u_{11}^* & u_{12}^* \\ p_2 & u_{21}^* & u_{22}^* \end{vmatrix} > 0, \cdots \tag{17'}$$

给定(17′),(FOC*)或者(16)对一个惟一的局部最大是充分的.注意由(16),(17′)也可写为

$$\begin{vmatrix} 0 & u_1^* \\ u_1^* & u_{11}^* \end{vmatrix} < 0, \begin{vmatrix} 0 & u_1^* & u_2^* \\ u_1^* & u_{11}^* & u_{12}^* \\ p_2^* & u_{21}^* & u_{22}^* \end{vmatrix} > 0, \cdots \tag{18}$$

在非线性规划中,(FOC)在 $u(x)$ 的拟凹性的条件下对于**全局**最大是充分的.进一步,如果 $u(x)$ 是**严格**拟凹的,那么(FOC)保证了**惟一**的**全局**最大.正如前面提到的,(严格)拟凹性的经济解释是显而易见的,而(BHC)的经济解释却非常难.

另一方面,从第 1 章中的定理 1.11 的(ii),我们也可以得出结论:如果对任意 x,

$$\begin{vmatrix} 0 & u_1(x) \\ u_1(x) & u_{11} \end{vmatrix} < 0, \begin{vmatrix} 0 & u_1(x) & u_2(x) \\ u_1(x) & u_{11}(x) & u_{12}(x) \\ u_2(x) & u_{21}(x) & u_{22}(x) \end{vmatrix} > 0, \cdots \tag{19}$$

那么 $u(x)$ 是严格拟凹的.这个条件可以与(BHC)或(18)比较.(19)要求对所有 x,(18)表达式中的不等式成立,而(18)中的不等式只在最优解处要求.换句话说,严格的拟凹性提供 $u(x)$ 的全局特性,而(BHC)提供了局部特性.给定
119 这点,就(BHC)来说古典理论仅对局部最优解提供了充分条件就不令人惊奇了.同样,给定(FOC*),(BHC)意指 $u(x)$ 的局部严格拟凹性,这反过来有助于(BHC)的经济解释.在另一方面,从古典理论来看,以下是不清楚的,即对一切 x 在(BHC)表达式中要求不等式或(19)能确保(FOC*)对(惟一)全局最优解是充分的.回忆 $u(x)$ 的严格拟凹性的拟凹部分在建立全局最大化上的核心地位,通过定理 1.11 的命题(i),我们可以断言如果 $u(x)$ 是拟凹的,那么对任意 x,

$$\begin{vmatrix} 0 & u_1(x) \\ u_1(x) & u_{11}(x) \end{vmatrix} \leqq 0, \begin{vmatrix} 0 & u_1(x) & u_2(x) \\ u_1(x) & u_{11}(x) & u_{12}(x) \\ u_2(x) & u_{21}(x) & u_{22}(x) \end{vmatrix} \geqq 0, \cdots \tag{20}$$

条件(20)比(18)弱,因为(20)允许等式,而(18)要求严格的不等式.另一方面,(20)比(18)强,因为(20)要求对所有 x 成立,而(18)只要求在点 x^* 处成立.前者是因为(18)是关于惟一性的而(20)不是,后者是因为(18)是关于局部最

大的，而(20)不同.

现在，我们可总结一下古典理论(**CT**)和非线性规划理论(**NPT**)之间比较的一些要点.

(i) (NPT)明显地包括了非负约束 $x \geqq 0$，而(CT)没有这样的规定.

(ii) (CT)要求约束对所有 x 都满足，而(NPT)没有这样的约束.

(iii) 因此，(CT)尤其要求 $m < n$，即约束的数目应小于选择变量的数目，而(NPT)没有这样的要求.

(iv) (CT)是关于局部最优解的特征，而(NPT)是关于全局最优解的.

(v) (SOSC)或(BHC)只是对于**特定点** x 而被要求，而拟凹性条件与**所有** x 相关. 这对应于这样的事实：(SOSC)或(BHC)是关于局部最优解，而拟凹性条件是关于**全局**最优解的.

120 (vi) 对于古典理论，当(SOSC)与一个**惟一**的最优解相关时，以(BHC)的形式描述的(SOSC)要求在符号上交替的加边海赛行列式的**严格**的不等式，与此相对应的，最大化函数的**严格**拟凹性在建立(NPT)中的最优解的惟一性中起了核心作用.

(vii) (NPT)中使用的拟凹性条件能使我们得到比在(CT)中的(SOST)或(BHC)更透彻的经济解释.

▶ 练习题

(1) 考虑问题：在 $x/a + y/b \leqq 1$，且 $x, y \geqq 0$ 的约束下，选择 $(x, y) \in R^2$ 使 $u(x, y) \equiv x^{1/2}y^{1/2}$ 最大，这里 a 和 b 是正的常数.

(i) 令 (x^*, y^*) 是上述问题的一个解. 说明 $x^* > 0$ 且 $y^* > 0$.

提示：设 $x^* = 0$，从而得到矛盾. 类似地，设 $y^* = 0$，从而得到矛盾.

(ii) 写出上述问题的一阶条件(FOC).

(iii) 得到作为 a 和 b 的函数的 x^* 和 y^* 的值.

注：这个问题与 John Stuart Mill 考虑的问题相一致，其中他在李嘉图的比较利益理论中引入了需求条件. 等式 $(x/a + y/b) = 1$ 表示一个特定的国家在固定成本下的生产可能性曲线.

Takayama, A. 1972. *International Trade: An Approach of Theory*. New York: Holt, Rinehart 和 Winston，第 5 章.

(2) 决定原点是否是下列 $\Phi(x, y)$ 的鞍点：

121 (a) $\Phi(x, y) = 1 - x + y, 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 1$

(b) $\Phi(x, y) = x^2 + y^2, -1 \leqq x \leqq 1, -1 \leqq y \leqq 1$

(3) Kelvin Lancaster 在他的《数理经济》中说到(74－75 页):

(a)“通常的最大值问题

$$\text{Maximize } f(x) \quad \text{约束条件为 } g^i(x)\leqq 0, i=1,2,\cdots,n, x\geqq 0$$

总是拥有一个解,如果:(a)$f(x)$是凹的,且每个 $g^i(x)$是凸的;(b)可行集 $K=\{x\mid g^i(x)\leqq 0, i=1,2,\cdots,n; x\geqq 0\}$是有界的且非空的.”

(b)“在这些条件下,拉格朗日函数 $L(x,\lambda)=f(x)-\sum\lambda_i g^i(x)$拥有一个鞍点 x^*,λ^*,这里 x^*是最大值问题中的最优点.”

Lancaster 也说到,

(c)“问题

$$\text{Maximize } f(x) \quad \text{约束条件为 } g_i(x)\leqq 0$$

的最优点 x^*满足条件

$$\frac{\partial L(x^*,\lambda^*)}{\partial x_j^*}=f_j-\sum\lambda_i g_j^i\leqq 0,\cdots\text{”(第 64 页)}$$

这里 $f_j=\partial f/\partial x_j$ 且 $g_j^i\equiv\partial g^i/\partial x_j$.

(d)“如果$f(x)$是严格地凸(凹),那么它的海赛矩阵是正(负)定的”.(333 页)

问题:

(i) 命题(b)、(c)和(d)都是错误的.对每一命题给出一个反例并说明.

(ii) 命题(a)也是错误的,因为条件(a)基本上是不相关的,条件(b)是不完善的.为了保证解的存在,除了 K 是非空和紧的外,你将加上什么条件?为什么?

提示:对于问题(i)的(b)和(c),回顾 Slater 例子.

参考:Lancaster, K. 1968.《数理经济学》.纽约:麦克米兰.

(4) 讨论加边海赛条件与经济理论的关系.

▶ 注　释

[1]自然地,这一章主要来自于 Takayama(1985,第 2 章).读者也可以参考数学家 Mangasrian(1969),Luenberger(1973),和 Hestenes(1975)关于这个专题的精彩论述.像 Intriligator(1981)和 Dixit(1990)这样的经济学家的论述也是有益的.

[2]我们用反证法证明这一点.假设 x^*是局部最大点而不是一个全局最大点.既然 x^*不是全局最大点,则在 S 中存在一点 $\bar{x}$,使得 $f(\bar{x})>f(x^*)$.根据凹性,$f[\theta\bar{x}+(1-\theta)x^*]\geqq\theta f(\bar{x})+(1\quad\theta)f(x^*),0\leqq\theta\leqq 1$.由于 $f(\bar{x})>f(x^*)$,这推出 $f[\theta\bar{x}+(1-\theta)x^*]>f(x^*)0,0<\theta\leqq 1$.令 $\tilde{x}\equiv\theta\bar{x}+(1-\theta)$

x^*,$0<\theta\leqq 1$.既然 x^* 由假设是局部最大值点,对于某个半径 r 对所有$x\in S\cap B_r(x^*)$,有 $f(x^*)\geqq f(x)$.选择 θ 足够接近于0,使 $\tilde{x}\in S\cap B_r(x^*)$.然后我们有 $f(\tilde{x})>f(x^*)$,但 $\tilde{x}\in S\cap B_r(x^*)$,这是矛盾的.

[3]为证明惟一性,假设相反情形,假定对所有 $x\in S$,$f(x^*)=f(\hat{x})\geqq f(x)$,这里 $\hat{x}\in S$ 且$x\hat{x}\neq x^*$.设 $\tilde{x}\equiv(x^*+\hat{x})/2$,那么 $\tilde{x}\in S$.但是由 f 的严格凹性,$f(\tilde{x})>f(x)$,这是一个矛盾.

[4]我们再次用反证法.假设 x^* 是 S 中的局部最大点而不是全局最大点.那么存在一点 $\bar{x}\in S$ 使得 $f(\bar{x})>f(x^*)$.由于 f 的显式拟凹性,对所有 θ 使得 $0<\theta\leqq 1$,有 $f[\theta\bar{x}+(1-\theta)x^*]>f(x^*)$.选择 θ 足够接近于0,我们可得出一个矛盾,x^* 不是$f(x)$在 S 中的局部最大点.

[5]既然每一个严格的拟凹函数都是显式拟凹的,根据定理 2.1 的命题(i),x^* 是全局最大点.为了说明惟一性,假设其相反面:对所有 $x\in S$,$f(x^*)=f(\hat{x})\geqq f(x)$,$x^*\neq\hat{x}$.设 $\tilde{x}\equiv(x^*+\hat{x})/2$,我们有 $f(\tilde{x})>f(x^*)$且 $x\in S$,这是矛盾的.

[6]第(i)条的证明不很难.既然 f 和 g_j 在 x 中都是凹的,λ_j 是非负的,$\Phi(x,\lambda)$对 x 是凹的.因此,通过定理 1.9,我们有:$\Phi(x,\lambda^*)-\Phi(x^*,\lambda^*)\leqq\Phi_x(x^*,\lambda^*)\cdot(x-x^*)$,这里 $\Phi_x(x^*,\lambda^*)$是 Φ 在(x^*,λ^*)处赋值的 x 中的梯度向量.既然由(FOC)的(2a),$\Phi_x^*\cdot x^*=0$,这推出 $\Phi(x,\lambda^*)-\Phi(x^*,\lambda^*)=\Phi_x^*\cdot x$,这里通过(2a)中的 $\Phi_x^*\leqq 0$,对所有的 $x\geqq 0$,$\Phi_x^*\cdot x\leqq 0$.利用(2b)中的 $\lambda^*\cdot g(x^*)=0$,对所有 $x\geqq 0$,$\Phi(x,\lambda^*)-\Phi(x^*,\lambda^*)\leqq 0$ 推出 $f(x^*)-f(x)\geqq\lambda^*\cdot g(x)$.由此,我们可得到结论:对所有 x,$x\geqq 0$,$g(x)\geqq 0$有 $f(x^*)\geqq f(x)$,证明完毕.第(iii)条证明难得多,对此证明见 Takayama(1985,70~73 页和 91 页).

[7]回顾例 2.2 中的$f(x)=x_1^a x_2^{\ a}$.如果 $x_1=0$,那么 $f=0$,而我们能够通过选择 $x_1>0$,$x_2>0$ 并满足 $p_1x_1+p_2x_2\leqq y$,使$f(x)>0$.因此,如果 $x=0$,f 不能达到有约束的最大值.这样在最优解处 $x_1>0$.类似地,在最优解处 $x_2>0$.一般地,在如例 2.2 中的效用函数的 Cobb-Douglas 形式下,可以保证内部解.同样,注意 $f(x)=x_1^a x_2^{1-a}$ 既是严格拟凹的又是凹的,因此通过定理 2.1 的命题(ii),最大值点是惟一的.

[8]任何(可能是长方阵)矩阵的线性独立的行的数目等于它的线性独立的列数目.这被称为秩定理(见附录 A 中定理 A.3)

[9]有兴趣的读者也可以参见古典最优化定理的证明,它的梗概在下面的注释[18]中,其中隐函数定理中的非奇异的雅可比矩阵条件起了关键性作用.

[10]海赛矩阵 $g''(x)$容易计算为

$$g''(x)=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$$

因此,对所有$(x_1,x_2)\neq 0$,$x\cdot g''(x)\cdot x=-2x_1^2-2x_2^2<0$,这说明了 $g(x)$的严格凹性(回顾第 1 章中定理 1.10).

[11]效用函数的严格凹性意味着无差异曲线严格地凸向原点.换句话说,较之消费一种商品而言,消费者更喜欢各种各样的商品:任何两种具有同等满足效用的商品束的凸组合(权数为正)较之那两种商品束更受偏好.另外回忆第1章小节1.5.4.

[12]有可能直到一特定商品的消费变得"过多"时,边际效用才不是正的.在此情形中,消费一定数量的第 i 种商品,都有 $u_i(x)>0$. 例如,考虑效用函数(在 R^2 的非负域上),定义为:

$$\text{如果 } x_2 \geqq ax_1, \text{则 } u(x_1,x_2)=x_1^a(x_2-ax_1)^{1-a}; \text{否则 } u=0$$

其中 $0<a<1$,且 a 是一个正的常数.我们可以计算:

$$u_1(=\partial u/\partial x_1)=x_1^{a-1}(x_2-ax_1)^{-a}(ax_2-ax_1)$$

如果 $x_1/x_2<a/a$,它是正的,但是对 $x_1/x_2>a/a$,它变成负的.这样一种可能性是和"弱处理性"的概念密切相关的,它是由 R.Färe 和其他人研究的,尤其在生产理论中.

[13]通过 Hicks(1946)和 Samuelson(1947)的著作以及微观理论方面的教科书,读者应该对古典最优化理论有些了解.

[14]无需多言,函数 $\lambda(w,y)$ 和 $x_i(w,y)$ 也可以不通过(8′)直接由(8)得到.类似地,根据(7′)定义的函数 $\lambda(p,y)$ 和 $x_i(p,y)$ 也可以根据(7)来定义.

[15]例如,考虑 $\Phi: R^2 \to R$,定义为 $\Phi(x,y)\equiv y^2-x^2$. 因为对所有 $(x,y)\in R^2$,$\Phi(x,0)\leqq\Phi(0,0)\leqq\Phi(0,y)$,则原点是一个鞍点,其中 $\Phi(0,0)=0$.原点(0,0)可以由马鞍图形来说明.同时注意 $\Phi'(x,y)=(-2x,2y)$,因此 $\Phi'(0,0)=(0,0)$.所以,这个例子也(以相当引人注意的方式)说明只满足(FOC)不能保证最大.这里对所有 $(x,y)\in R^2$,$\Phi(0,0)\geqq\Phi(x,y)$ 不成立.图2.10借自 Takayama(1985,67页).

[16]2.4节摘自 Takayama(1981).

[17]对于古典最优化理论的讲解,例如,可见 Hestenes(1975,第3章),Takayama(1985,第1章)和参考资料引述的 Bliss(1946)和 Carathéodory(1967)的文献.

[18]这个定理证明可以由隐函数定理和复合函数定理(定理1.5和1.4)得到.既然证明实质上是初等的,并且它将有助于对古典定理的性质和定理1.5和定理1.4利用的理解,那么这里概括地叙述一下证明是值得的.为此,首先把 n 维矢量 x 分成两部分,$(n-m)$ 维矢量 y 和 m 维矢量 z,并且假设 $y(x)\equiv g(y,z)$ 关于 z 的雅可比矩阵在 $x^*=(y^*,z^*)$ 处是非奇异的(矩阵记为 g_z).因为有秩条件(R),所以这个非奇异假设是可能的,如果必要,这里对 x_i 可重新编号码.那么,由隐函数定理,存在惟一的一个连续可微的函数 $z(y)$,使得

$$z^*=z(y^*),\text{且对 } y\in N(y^*),g[y,z(y)]=0$$

这里 $N(y^*)$ 是 y^* 的某一领域.把 $z(y)$ 代入 $f(x)$,我们可以定义函数 h 为

$$f(x)=f[y,z(y)]\equiv h(y)$$

由条件(LM*)，$x^*=(y^*,z^*)$是 f 在约束 $g(x)=0$ 条件下的局部最大点.因此 $h(g)$在 g^* 达到局部最大(无约束的).这样,我们有

(*) $$h_y^*=f_y^*+f_z^*z_y^*=0$$

这里下标表示被求导的变量,星号(*)表示这些导数在 $x^*=(y^*,z^*)$处赋值.同样,对 $g[y,z(y)]-0$ 微分,得

$$g_y^*+g_z^*z_y^*=0$$

把这代入(*),得 $f_y^*+\lambda^* g_y^*=0$,这里,

$$\lambda^*\equiv -f_z^*(g_z^*)^{-1}$$

由于 f_z 是 $1\times m$ 矢量,g_z^{-1} 是 $m\times m$ 矩阵,我们注意 λ^* 是 $1\times m$ 矢量.既然我们(平常地)有

$$f_z^*+\lambda^* g_z^*(=f_z^*-f_z^*)=0$$

那么我们也得到 $f_x^*+\lambda^* g_x^*=0$ 或 $\Phi_x^*=0$,这里 $\Phi\equiv f+\lambda\cdot g$.这就完成了(LM)和(R)推出(FOC)的证明.

[19]如果原最优化问题被叙述为一个最小化问题而不是一个最大化问题,那么(SONC)和(SOSC)将分别改写为

(SONC) 对所有使得 $B\xi=0$ 的 ξ,有 $\xi' A\xi\geqq 0$

(SOSC) 对所有 $\xi\neq 0$ 且使 $B\xi=0$ 的 ξ,有 $\xi' A\xi>0$

[20]例如,Hicks(1946,306 页)在消费者选择问题的文章中断言,"为了使 u 是最大值,有必要不仅有 $du=0$,而且 $d^2u<0\cdots$."

[21]我们假定条件(R)成立.我们可以注意到由附录 A 中的定理 A.10 的命题(i),我们有如下结论.令 A 是 $n\times n$ 对称矩阵,B 是 $m\times n$ 矩阵,$m<n$,B 的秩 $=m$.那么对 $\forall\ \xi\neq 0$ 且 $B\xi=0$ 的 ξ,有 $\xi' A\xi<0$,当且仅当

$$(-1)^k|C_k|>0,k=m+1,\cdots,n$$

其中 $|C_k|$ 是第 $(m+k)$ 个逐次主子式或定义为

$$\begin{bmatrix}0 & B\\ B^T & A\end{bmatrix}$$

的矩阵,这里 0 是 $m\times m$ 阶零矩阵.

[22]如果原最优化问题表述为最小化问题,加边海赛矩阵条件应改写为

(BHC) $$(-1)^m|C_k|>0,k=m+1,\cdots,n$$

这里 $|C_k|$ 表示 H 的第 $(m+k)$ 个逐次主子式.该结果通过定理 A.10 的命题

(iii)得到.

▶ 参考文献

122 Anderson, R. K. and A. Takayama. 1979. "Comparative Statics with Discrete Jumpts in Shift Parameters, or How to Do Economics on the Saddle(-Point)." *Journal of Economic Theory* 21, December: 491 – 509.

Arrow, K. J. and A. C. Enthoven. 1961. "Quasi – Concave Programming." *Econometrica* 29(October): 779 – 800.

Arrow, K. J. L. Hurwicz, and H. Uzawa. 1961. "Constraint Qualifications in Maximization Problems." *Naval Research Logistics Quarterly* 8(June): 175 – 191.

Bliss, G. M. 1946. *Lectures on the Calculus of Variations*. Chicago: University of Chicago Press.

Carathéodory, C. 1967. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order*. Trans. R. Dean. Part 2, especially chap. 11. San Francisco: Holden-Day.

Dantzig, G. B. 1963. *Linear Programming and Extensions*. *Princeton*, N. J.: Princeton University Press.

Dixit, A. K. 1990. *Optimization in Economic Theory*. 2d ed. New York: Oxford University Press(1st ed. 1976).

El-Hodiri, M. A. 1971. *Constrained Extrema: Introduction to the Differentiable Case with Economic Applications*. New York: Springer-Verlag.

Goldman, A. J., and A. W. Tucker. 1956. "Theory of Linear Programming." In *Linear Inequalities and Related Systems*, ed. by H. W. Kuhn and A. W. Tucker, 53 – 97. Princeton, N. J.: Princeton University Press.

Hestenes, M. R. 1966. *Calculus of Variations and Optimal Control Theory*. New York: Wiley.

——. 1975. *Optimization Theory: The Finite Dimensional Case*. New York: Wiley.

Hicks, J. R. 1946. *Value and Capital*. 2d ed. Oxford: Clarendon Press(1st. ed. 1939).

Intriligator, M. 1981. "*Mathematical Programming with Applications to Economics*." *In Handbook of Mathematical Economics*, ed. K. J. Arrow and M. D. Intriligator, 1: 53 – 81. Amsterdam: North-Holland.

123 Kuhn, H. W, and A. W. Tucker 1951. "*Non-Linear Programming*." *In Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, ed. J. Neyman. Berkeley, Calif.: University of California Press.

Kuhn, H. W, and A. W. Tucker, eds. 1956. *Linear Inequalities and Related*

Systems. Princeton, N. J.: Princeton University Press.

Luenberger, N. G. 1973. *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*. Reading, Mass.: Addison-Wesley.

Mangasarian, O. L. 1969. *Nonlinear Programming*. New York: McGraw-Hill.

Nikaido, H. 1961. *Linear Mathematics for Economics* (in Japanese). Tokyo: Baifu kan.

——. 1970. *Introduction to Sets and Mappings in Modern Economics*. Trans. K. Sato. Amsterdam: North-Holland, (Japanese original).

Samuelson, P. A. 1947. *Foundations of Economic Analysis*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press(enl. ed. 1983).

Slater, M. 1950. "Lagrange Multipliers Revisited: A Contribution to NonLinear Programming." *Cowles Commission Discussion Paper*, Math. 403 (November).

Smale, S. 1983. "On the Average Number of Steps." *Mathematical Programing* 27:241 – 62.

Takayama, A. 1981. "Classical Optimization and Nonlinear Programming," Lecture notes, Texas A & M University(October).

——. 1985. *Mathematical Economics*. 2d. ed. New York: Cambridge University Press, (1st. ed. Dryden Press, 1974).

Takayama, A. and M. A. El-Hodiri. 1968. "Programming, Pareto Optimum, and the Existence of competitive Equilihria." *Metroeconomics* 20(Gennaio-Aprile): 1 – 10.

Uzawa, H. 1958. "The Kuhn-Tucker Theorem in Concave Programming." In *Studies in Linear and Non-Linear Programming*. ed. K. J. Arrow, L. Hurwicz, and H. Uzawa: 32 – 37. Stanford, Calif.: Stanford University Press.

第 3 章　灵敏性分析与微观经济学基础

§3.1　比较静态：常规过程[1]

125　经济学中的许多重要问题可以依据非线性规划加以公式化. 当某一问题被表达为在给定参数的一定约束下，最大化或最小化某一函数的时候，下一个问题就是考虑这些参数中的改变所产生的效果. 生产者的要素需求函数可以像消费者的需求函数一样，通过这种过程得到.[2]这种方法在有约束最大化的文献中被称为**灵敏度分析**的方法，在经济学中从静态学来说称其为**比较静态**，从动态学来说称其为**比较动态**. 它在经济学中的重要性是众所周知的，怎么强调也不过分. 实际上，它是希克斯的《价值和资本》和萨缪尔森的《经济分析基础》的主要论题.[3]

为了说明灵敏度分析，我们可以考虑下面两个熟悉的问题：

【例 3.1】(成本最小化)　考虑一个竞争性公司，它选择一个要素投入组
126　合 $x\in R^n$，以使

(CM)　　Minimize $w \cdot x$

约束条件为

$$f(x) \geqq y, \text{且 } x \geqq 0$$

这里 w = 要素价格向量，y = 产出的目标水平，$f(x)$ = 生产函数，$w>0$ 和 $y>0$ 是给定的参数. 这个成本最小化问题的解 x^* 一般依赖于参数 w 和 y，因此它可以表达为 $x^* = x(w, y)$. 那么这个问题的灵敏度分析就是确定 $\partial x_i / \partial w_j$，$\partial x_i / \partial y$ 等的大小和符号. 令 $C(w, y) \equiv w \cdot x(w, y)$，它表示(最小总)成本函数. 那么 $\alpha(w, y) \equiv C(w, y)/y$ 和 $\mu(w, y) \equiv \partial C(w, y)/\partial y$，分别表示平均成本和边际成本. 中级价格理论课本中通常的 U 形平均成本曲线描述了给定一个 w 值而 y 变动的 $\alpha(w, y)$ 的轨迹. 类似地，边际成本曲线描述了给定一个 w 值而 y 变动的 $\mu(w, y)$ 的轨迹. 因此，在灵敏度分析中，把对平均和边际成本曲线形状的研究作为练习.

【例 3.2】(效用最大化)　考虑一位消费者，他(或她)选择消费束 $x \in R^n$，以使

(UM)　　Maximize $u(x)$

约束条件为

$$p \cdot x \leqq y, \text{且 } x \geqq 0$$

这里 $u(x)$ = 效用函数，p = 价格向量，Y = 收入，$p>0$ 和 $Y>0$ 是给定的参数. 问题的解 x^* 依赖于参数 p 和 Y，因此可以表达为 $x^* = x(p, Y)$. 灵敏度分析便是确定 $\partial x_i / \partial p_j$ 和 $\partial x_i / \partial Y$ 的大小和符号的问题.

一般地，设 f 和 g_j，$j = 1, 2, \cdots, m$，是定义在 R^n 上的实数值连续可微函数. 考虑下面的问题，即选择 $x \in R^n$，使得

Maximize　$f(x, \alpha^*)$

约束条件为

$$g_j(x, \alpha^*) \geqq 0, j = 1, \cdots, m, \text{且 } x \geqq 0$$

这里 $\alpha^* = (\alpha_1^*, \cdots, \alpha_l^*)$ 是给定的参数向量. 在成本最小化问题中，$\alpha \equiv (w, y)$，在效用最大化问题中，$\alpha \equiv (p, Y)$. 一般地，这个最大化问题的解 x^* 依赖于那些参数 α_k^* 的值，因此，x^* 可被表达为 $x^* = x(\alpha^*)$. 为继续我们的分析和简便起见，设 $x_i^* > 0, i = 1, 2, \cdots, n$(内部解)，$\lambda_j^* > 0, j = 1, 2, \cdots, m$. 那么上面最大化问题的一阶条件(FOC)可写作：

127

$$\partial f(x^*, \alpha^*)/\partial x_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \partial g_j(x^*, \alpha^*)/\partial x_i = 0,$$

$$i = 1, 2, 3, \cdots, n \qquad (1a)$$

$$g_j(x^*,\alpha^*)=0,j=1,2,\cdots,m \tag{1b}$$

假设(1)式为当给定 α^* 的非线性规划问题的解 $x^*>0$ 提供了一个充分必要条件.上面问题的拉格朗日函数为

$$\Phi(x,\lambda,\alpha)\equiv f(x,\alpha)+\lambda\cdot g(x,\alpha)$$

令 Φ_x 是 Φ 关于 x 的梯度向量,那么(1)可以等价地写为

$$\Phi_x(x^*,\lambda^*,\alpha^*)=0,g(x^*,\alpha^*)=0 \tag{1'}$$

令 $A=[a_{ij}]$ 和 $B=[b_{ij}]$ 分别是 $(n\times n)$ 和 $(m\times n)$ 矩阵,定义如下:

$$A\equiv\Phi_{xx}(x^*,\lambda^*,\alpha^*),\text{即 } a_{ij}\equiv\partial^2\Phi(x^*,\lambda^*,\alpha^*)/\partial x_i\partial x_j$$

$$B\equiv g_x(x^*,\lambda^*,\alpha^*),\text{即 } b_{ij}\equiv\partial g_i(x^*,\lambda^*,\alpha^*)/\partial x_j$$

令 B' 是 B 的转置,并且假设 B 的秩 $=m$ 以及行列式

$$\begin{bmatrix}0 & B\\ B' & A\end{bmatrix}\neq 0 \tag{2}$$

那么由隐函数定理,我们可以断言,存在惟一的连续可微函数 $x(\alpha)$ 和 $\lambda(\alpha)$,使得 $x^*=x(\alpha^*),\lambda^*=\lambda(\alpha^*)$,并且至少对在 α^* 的某一领域 $N(\alpha^*)$ 中的所有 α,有

$$\Phi_x[x(\alpha),\lambda(\alpha),\alpha]=0,g[x(\alpha),\alpha]=0 \tag{3}$$

在最优化的领域中,比较静态分析或灵敏度分析是通过利用(3)确定 α_k 的变化对 $x(\alpha)$ 和 $\lambda(\alpha)$ 的值的影响.对 α_k(对每一个 $k=1,2,\cdots,\ell$),微分(3)
128 得到,对所有 $\alpha\in N(\alpha^*)$,

$$\begin{bmatrix}\Phi_{xx} & \Phi_{x\lambda}\\ \Phi_{\lambda x} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\partial x(\alpha)/\partial\alpha_k\\ \partial\lambda(\alpha)/\partial\alpha_k\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\Phi_{x\alpha_k}\\ \Phi_{\lambda\alpha_k}\end{bmatrix}=0 \tag{4}$$

这里 Φ 的所有二阶偏导都在 α 处赋值,即 $\Phi_{xx}\equiv\Phi_{xx}[x(\alpha),\lambda(\alpha),\alpha]$.显然,$\Phi_{x\lambda}=\Phi_{\lambda x}=g_x[x(\alpha),\alpha]$.方程(4)可以等价地写为

$$\begin{bmatrix}0 & \Phi_{\lambda x}\\ \Phi_{x\lambda} & \Phi_{xx}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\partial\lambda(\alpha)/\partial\alpha_k\\ \partial x(\alpha)/\partial\alpha_k\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\Phi_{\lambda\alpha_k}\\ \Phi_{x\alpha_k}\end{bmatrix}=0 \tag{4'}$$

定义 $(m+n)\times(m+n)$ 矩阵 H 和 H^* 为

$$H\equiv\begin{bmatrix}0 & \Phi_{\lambda x}\\ \Phi_{x\lambda} & \Phi_{xx}\end{bmatrix},\quad H^*\equiv\begin{bmatrix}0 & B\\ B' & A\end{bmatrix}$$

由(2),H^* 是非奇异的,因此 H 对于 α^* 某一邻域 $\overline{N}(\alpha^*)$ 中所有 α 也是非奇异的,这里 $\overline{N}(\alpha^*)\subset N(\alpha^*)$,因为由函数 $x(\alpha)$ 和 $\lambda(\alpha)$ 的连续性和函数 f 和

g_i 的连续可微性，H 在 a 处是连续的. 因此，由(4′)我们得到定理 3.1.

【定理 3.1】 基于上面规定，我们有

$$\text{对 } k=1,2,\cdots,\ell,\begin{bmatrix}\partial\lambda(a)/\partial a_k\\ \partial x(a)/\partial a_k\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}0 & \Phi_{\lambda x}\\ \Phi_{x\lambda} & \Phi_{xx}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\Phi_{\lambda a_k}\\ \Phi_{xa_k}\end{bmatrix} \tag{5}$$

方程(5)被称为**比较静态基本方程**. 既然 Φ_{xx} 是 Φ 关于 x 的海赛矩阵，那么 H 是 Φ 的加边海赛矩阵(由 $\Phi_{\lambda x}=g_x$ 加边). 方程(5)包括了一个加边海赛矩阵的逆矩阵.

在第 2 章 2.4 节的定理 2.12 中，我们证明过条件(LM)和(R)推出(SONC). 由(SONC)和条件(2)，我们可以断言

$$\text{对所有 } \xi\neq 0 \text{ 且 } B\xi=0 \text{ 的 } \xi,\text{有 } \xi' A\xi<0. \tag{6}$$

129 即(SOSC)满足，这又进一步推出加边海赛条件(BHC)，也就是，H^* 的最后 $(n-m)$ 个逐次主子式交替符号. 既然 H 的每一元素在 a 处都是逐次的，那么 H 的最后 $(n-m)$ 个连续主子式对每个 $\bar{N}(a^*)$ 中的 a 在符号上交替. 换句话说，令 H_i 是 H 的第 i 个主子式，则对 $\forall a\in\bar{N}(a^*)$，我们有

$$(-1)^i H_i>0,\ i=2m+1,\cdots,m+n \tag{7}$$

由此我们可以立即得到结论

$$\text{行列式 } H \text{ 的符号}=(-1)^{m+n} \tag{8}$$

同样，令 h_{ii} 是 H 的对角线上的第 i 个元素 (i,i) 的余子式，那么 $h_{m+n,m+n}$ 是 H 的 $(m+n)\times(m+n)$ 余子式. 由(7)，它有与行列式 H 相反的符号，因此

$$h_{m+n,m+n}\text{的符号}=(-1)^{m+n-1}$$

由于行和列的同时调换不会改变行列式的符号和数值，这推出对所有 i，

$$h_{ii}\text{的符号}=(-1)^{m+n-1} \tag{9}$$

回想 H 的逆矩阵，可以得到

$$H^{-1}=\frac{1}{\det H}[h_{ji}]$$

这里 h_{ji} 是 H 的 j,i 元素的余子式，(即 $[h_{ji}]$ 是 $[h_{ij}]$ 的转置). 那么，结合(8)和(9)，我们可以得出结论，

$$\text{对所有 } i,\ h_{ii}/\det H<0 \tag{10}$$

接下来，矩阵 H 的分块形式为

$$\text{对所有 } a\in\bar{N}(a^*),\ H^{-1}=\begin{bmatrix}K_1 & K_2\\ K_3 & K_4\end{bmatrix} \tag{11}$$

这里，K_1,K_2,K_3 和 K_4 分别是 $m\times m$，$m\times n$，$n\times m$ 和 $n\times n$ 矩阵. 我们可

以注意到 K_1, K_2, K_3 和 K_4 分别与矩阵 H 中的 $m \times m$ 零矩阵，$\Phi_{\lambda x}$，$\Phi_{x\lambda}$ 和
130 Φ_{xx} 相对应. 既然 H 是对称的，那么 H^{-1} 也是对称的，并且 K_1 和 K_4 也是对称的. 进而，我们可以得出结论 K_4 是半负定的，这里注意我们假定 B 的秩 $= m$，且(6)成立.[5] 经过总结，我们有定理 3.2：

【定理 3.2】 把矩阵 H^{-1} 分块成(11)的形式. 那么 K_1 和 K_4 是对称的. 进而，K_4(H^{-1} 的右下角 $n \times n$ 矩阵)是对称的，半负定的，并且它的对角元素都是负的.

【例 3.3】 考虑例 **3.2** 的效用最大化问题. 这个问题的拉格朗日函数可以定义为 $\Phi(x, \lambda, p^*, Y^*) \equiv u(x) + \lambda(Y^* - p^* \cdot x)$，其中价格向量 p^* 和收入 Y^* 的值给定. 假定在最优解点 $x^* > 0, \lambda^* > 0$，这个问题的一阶条件(FOC)可写作：

$$Y^* - p^* \cdot x^* = 0; u_i(x^*) - \lambda^* p_i^* = 0, i = 1, 2, \cdots, n$$

这里 $u_i \equiv \partial u / \partial x_i$，它与上面的(1)相对应. 该问题的加边海赛矩阵 H 可写作：

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -p \\ -p' & (u_{ij}) \end{bmatrix}$$

这里 $u_{ij} \equiv \partial^2 u / \partial x_i \partial x_j$，并且 (u_{ij}) 是以 u_{ij} 为元素的 $n \times n$ 阵列. 在 H 中，将 u_{ij} 在 x^* 处赋值，并设 $p = p^*$，并用 H^* 表示它. 假定 $\det H^* \neq 0$，这与上面的(2)
131 对应. 由此，运用隐函数定理，对于 (p^*, Y^*) 的某一邻域中所有 (p, Y)，我们可以得到

$$Y - p \cdot x(p, Y) = 0, u_i[x(p, Y)] - \lambda(p, Y) p_i = 0, i = 1, 2, \cdots, n$$

然后利用定理 3.1，我们可以得到 Hicks－Slutsky 方程，并利用定理 3.2，我们可以得到(净)替代矩阵的主要特征(详细情况见 Takayama 1985, 163～166 页). 我们将在 3.3 节用更简单的方式得到这些性质.

上面借助定理 3.1 和 3.2 描述的过程是在由 Hicks(1939, 1946)和 Samuelson(1947)发展的消费者选择和生产者选择的传统结论中所使用过程. 然而，正如前面提到的，这个过程时常是非常冗长且麻烦的. 幸运的是，涉及灵敏度的重要方面的一些更简单的方法得到了发展. 尽管决不能低估 Samuelson 和 Hicks 关于消费和生产的经典文章和一般过程的用处，但现在我们将转向讨论这个重要的简单过程.

§3.2 包络线定理

同前一节那样，我们考虑这样的问题，即对给定的 α，求 x，使得

$$\text{Maximize} \quad f(x, \alpha)$$

约束条件为

$$g_j(x,\alpha)\geqq 0, j=1,2,\cdots,m, \quad 且\ x\geqq 0$$

其中，$\alpha\in R^{\ell}$. 灵敏度分析讨论 α_k 的一个变化对 x_i 的影响. 有一个称为"包络线定理"的结论，它能使我们以非常简单的方式进行灵敏度分析. 在这节中，我们讨论这个定理. 为此，假定对所有 i，$x_i(\alpha)>0$（一个内部解）和对所有 j，$\lambda_j(\alpha)>0$. 令 $\Phi(x,\lambda,\alpha)\equiv f(x,\alpha)+\lambda\cdot g(x,\alpha)$ 为拉格朗日函数，对这个问题我们可以写出(FOC)如下：

$$\Phi_x[x(\alpha),\lambda(\alpha),\alpha]=0, g[x(\alpha),\alpha]=0 \tag{12}$$

进一步假定(12)对于最优解是充分必要的. 保证这一点的条件在第二章中已讨论过. 在这样的条件下，满足(12)的 $x(\alpha)$ 是这个最大化问题的解. $\lambda(\alpha)$ 是
132 相关的拉格朗日乘数向量. 我们假设 $x(\alpha)$ 和 $\lambda(\alpha)$ 是连续可微的. 不必说，(12)可以等价地重写为

$$f_x[x(\alpha),\alpha]+\lambda(\alpha)\cdot g_x[x(\alpha),\alpha]=0 \tag{12'a}$$

$$g[x(\alpha),\alpha]=0 \tag{12'b}$$

其中，f_x 和 g_x 分别是 f 关于 x 的梯度向量和 g 关于 x 的雅可比矩阵. 我们假定对在 R^{ℓ} 的一定区域 D 中的所有 α，(12′)成立. 我们进一步假定满足(12′)的 $x(\alpha)$ 和 $\lambda(\alpha)$ 对 D 中的所有 α 是连续可微的.

给定上面最大化问题的解 $x(\alpha)$，我们定义函数 $F(\alpha)$ 和 $\Psi(\alpha)$ 为

$$F(\alpha)\equiv f[x(\alpha),\alpha] \tag{13}$$

$$\Psi(\alpha)\equiv f[x(\alpha),\alpha]+\lambda(\alpha)\cdot g[x(\alpha),\alpha]$$

$$(\equiv\Phi[x(\alpha),\lambda(\alpha),\alpha]) \tag{14}$$

函数 $F(\alpha)$ 被称为**最大值函数**. 那么我们有定理 3.3，它被称作"**包络线定理**".[6]

【定理 3.3】 假设 F 和 Φ 是连续可微的. 那么 $F_\alpha=\Phi_\alpha=\Psi_\alpha$，即

$$\frac{\partial F(\alpha)}{\partial\alpha_k}=\frac{\partial\Phi(x,\lambda,\alpha)}{\partial\alpha_k}=\frac{\partial\Psi(\alpha)}{\partial\alpha_k}, k=1,2,\cdots,\ell \tag{15}$$

这里，$\Phi(x,\lambda,\alpha)\equiv F(x,\alpha)+\lambda\cdot g(x,\alpha)$，因此

$$\partial\Phi(x,\lambda,\alpha)/\partial\alpha_k=\partial f(x,\alpha)/\partial\alpha_k+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\partial g_j(x,\alpha)/\partial\alpha_k$$

133 **证明**：利用链式法则，简单地发现[7]

$$\Psi_\alpha=\Phi_x\cdot x_\alpha+\Phi_\lambda\cdot\lambda_\alpha+\Phi_\alpha=\Phi_x\cdot x_\alpha+g\cdot\lambda_\alpha+\Phi_\alpha$$

$$-\Phi_\alpha \qquad [利用(12)]$$

$$
\begin{aligned}
F_a &= f_x \cdot x_a + g \cdot \alpha \\
&= -\lambda \cdot g_x \cdot x_a + f_a && [\text{因为由(12′a)得 } f_x = -\lambda \cdot g_x] \\
&= \lambda \cdot g_a + f_a && [\text{因为由(12′b)得 } g_x \cdot x_a + g_a = 0] \\
&= \Phi_a && (\text{证毕})
\end{aligned}
$$

注：注意$\partial\Psi/\partial\alpha_k$是度量$\alpha_k$的变化对于拉格朗日函数的**总**影响，而$\partial\Phi/\partial\alpha_k$是度量$\alpha_k$的变化对于$x$和$\lambda$保持常数的拉格朗日函数的**部分**影响.

F和Φ可能不是连续可微的. 例如 Samuelson(1958).

现在我们举几个包络线定理应用的例子. 我们希望这些例子说明该定理的用处.

【例 3.4】(消费者选择) 考虑前面讨论过的效用最大化(UM)问题. 设$p>0$,且对最优点处的所有i,$u_i(x)(\equiv\partial u/\partial x_i)>0$,令$x(p,Y)>0$是它的解,令$\lambda(p,Y)$是对应的乘数. 这里$\alpha=(p,Y)$. 定义函数$U$为

$$U(p,Y)\equiv u[x(p,Y)]\text{(间接效用函数)} \tag{16}$$

那么由包络线定理和$\Phi=u(x)+\lambda(Y-p\cdot x)$,得

$$\partial U/\partial Y=\partial\Phi/\partial Y=\lambda(p,Y) \tag{17}$$

由此,拉格朗日乘数表示**收入边际**效用. 我们还得到

$$\partial U/\partial p_j=\partial\Phi/\partial p_j=-\lambda x_j,\ j=1,2,\cdots,n \tag{18}$$

134 这意味着任何价格中的一个增长将降低顾客的满足程度(正如所期望的). 结合(17)和(18)得出

$$\partial U/\partial p_j+x_j\partial U/\partial Y=0,\ j=1,2,\cdots,n \tag{19}$$

这称为**Roy 的恒等式**(Roy 1942,18～19 页). 注意当它们对相关范围内的所有(p,Y)都成立时,(17)到(19)是恒等式.

【例 3.5】(乘数的解释) 一般地,考虑下面问题,在$g_j(x)\leqq b_j$,$j=1,2,\cdots,m$,且$x\geqq 0$的约束下,选择$x\in R^n$,使$f(x)$最大. 令$x(b)$和$\lambda(b)$是它的解和拉格朗日乘数向量,其中$b\equiv(b_1,b_2,\cdots,b_m)$. 定义$F(b)\equiv f[x(b)]$且

$$\Phi(x,\lambda,b)\equiv f(x)+\lambda[b-y(x)]$$

那么由包络线定理,我们得到

$$\frac{\partial F(b)}{\partial b_j}=\partial\Phi/\partial b_j=\lambda_j(b),\ j=1,2,\cdots,m \tag{20}$$

这样,第j个拉格朗日乘数表示了目标函数的最优值相对于第j个约束改变时的边际变化率. 例 3.4 中等式(17)明显是它的一种特殊情形. 当b_j被解释

为第j种原料供给的数量时，λ_j度量当一个单位的第j种原料收回时最大值$F(b)$的损失.也就是说，λ_j表示在基于"损失原则"的Carl Menger的"机会成本"理论中所表述的第j种原料的**影子价格**问题(见Samuelson 1985和Takayama 1977,22～24页).

【例3.6】(成本最小化) 考虑以前讨论的成本最小化问题(CM).假定在最优解处$w>0$且对所有i,$f_i(x)(\equiv\partial f/\partial x_i)>0$,令$x(w,y)$是最优投入向量,$\lambda(w,y)$是相应的乘数,定义最小总成本函数为

$$C(w,y)\equiv w\cdot x(w,y) \tag{21}$$

拉格朗日函数为

$$\Phi(x,\lambda,w,y)\equiv -w\cdot x+\lambda[f(x)-y]$$

135 那么由包络线定理,我们可得到

$$\frac{\partial C}{\partial y}=\lambda(w,y)>0,\frac{\partial c}{\partial w_i}=x_i(w,y)>0,i=1,2,\cdots,n \tag{22}$$

即乘数表示边际成本以及一个要素价格的增长将总是使总成本增长.结论$\partial C/\partial w_i=x_i$称为**Shephard(－McKenzie)引理**(见Shephard 1993和McKenzie 1957).[8]

假定成本函数$C(w,y)$是二阶连续可微的,那么它的海赛矩阵是对称的.那么利用(22),对所有i和j,我们立即得到

$$\frac{\partial x_i}{\partial w_j}=\frac{\partial x_j}{\partial w_i},\frac{\partial x_i}{\partial y}=\frac{\partial \lambda}{\partial w_i} \tag{23}$$

这被称为**Samuelson交互作用关系**.(23)的第一个结论表明,当产出保持常数时,第j种要素投入的改变相对第i种要素价格的改变,一定等于第i种要素投入的改变相对于第j种要素价格的改变(Samuelson 1947,64页).由于运用了包络线定理,(23)的推导大大简化了.

【例3.7】(利润最大化) 考虑一个使用投入向量x生产产出向量y的竞争性公司,这里产出价格向量$p>0$和投入价格向量$w>0$对于公司来说都是给定的.假定公司的生产函数约束写为$g(x,y)\geqq 0$.如果像前面成本最小化问题一样,y是标量并且$f(x)$是生产函数,则$g(x,y)\equiv f(x)-y$.假定公司选择$x\in R^n$和$y\in R^m$,以使

(PM) Maximize $p\cdot y-w\cdot x$

约束条件为

$$g(x.y)\geqslant 0,x\geqslant 0,y\geqslant 0$$

令$x(p,w)$和$y(p,w)$是上面问题的解.定义最大利润函数为

136 $$\pi(p,w)\equiv p\cdot y(p,w)-w\cdot x(p,w) \tag{24}$$

拉格朗日函数为

$$\Phi(x,y,\lambda,p,w)\equiv p\cdot y \quad w\cdot x+\lambda g(x,y)$$

那么由包络线定理,我们立即得到

$$\frac{\partial\pi}{\partial p_i}=y_i>0,i=1,2,\cdots,m \tag{25a}$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial w_i}= \quad x_i<0,i=1,2,\cdots,n \tag{25b}$$

也就是说,任何产出价格上的增长将提高最大利润,而任何投入价格上的增长将降低最大利润.(25)中的关系式称为 **Hotelling 引理**(1932,594 页).[9] 假定利润函数 $\pi(p,w)$是二阶连续可微的,则它的海赛矩阵是半负定的.那么使用(25),对所有 i 和 j,我们可容易得到

$$\frac{\partial y_i}{\partial p_j}=\frac{\partial y_j}{\partial p_i},\frac{\partial x_i}{\partial w_j}=\frac{\partial x_j}{\partial w_i},\frac{\partial x_i}{\partial p_j}=-\frac{\partial y_j}{\partial w_i} \tag{26}$$

137 注意,(26)的第一个关系式与(22)的第一个关系式一样,它也被称为 **Hotelling 对称关系**(1935,69 页).对于目前的问题既然利润最大化预先假定成本最小化,那么得到同样的对应结论$\partial x_j/\partial w_i=\partial x_i/\partial w_j$ 就不足为奇了.注意,同单一产品情形一样(即前面成本最小化问题中的情形),这个关系式对于多种产品情形也成立,其中,y 是向量.

注:本节中得到的传统比较静态结论考虑的是一个参数中或几个参数中的一个"无限小"变动的影响.参数中的离散跳跃的影响也可以简单的方式进行分析(见 Anderson 和 Takayama,1979).正如前面所提到的那样,最优解的鞍点特征在得到允许参数离散跳跃的比较静态分析结论中起着决定性作用.

关于对偶性的注释

在前面的讨论中,作为包络线定理的应用,我们得到了 Roy 恒等式,Shephard引理,Hotelling 引理和 Hotelling 对称关系式.然而值得注意的是,这些作者并没有通过预先假设效用函数 $u(x)$和生产函数 $f(x)$的存在来得到这些关系式.他们依据的是被称为**对偶关系式**(对此极好的概括见 Diewert 1982).因此,通过包络线定理得到的结论应区别于由前面提及的 Roy(1942),Shephard(1953 和 1970),McKenzie(1957)和 Hotelling(1932 和 1935)得到的原始结论.关于对偶理论,Diewert(1982,548 页)评论说"关于对偶理论的英文文

献看来开始于 Hotelling(1932 和 1935)的两篇论文……. 下一个对于对偶理论的重要贡献是由 Roy 作出的."正如 Diewert(1982)中所全面评述的那样,现在可以使用对偶定理的各种形式,这里对偶定理现代的巨大发展归功于 Shephard(1953 和 1970). 在此简要解释包络线结论与对偶结论的差别可能是有用的.

问题中的要点最好依据利用(22)中的$\partial C/\partial w_i = x_i$ 的生产理论来说明.

138 这个关系是通过预先假定生产函数 $f(x)$以及假定理性行为(成本最小化),并作为包络线定理的一个应用而得到的. 与此相对,由 Shephard(1953)得出的原始公式中的$\partial C/\partial w_i = x_i$ 依赖于对偶信息. 它仅仅假定成本函数的存在,而不依赖于生产函数的信息. 在这里,对**偶定理**断言,给定成本函数 $C(w,y)$和理性行为条件下,我们能够在一定正则条件下导出可以生成成本函数的惟一的生产函数. 既然这个成本最小化过程得到给定生产函数条件下的成本函数,那么,我们现在在正则条件下有生产和成本函数之间的双向关系.[10]由此,正如 Shephard 所声明的(1953,9 页),"生产函数和最小成本函数是生产技术的等价说明". 最初由 Shephard 从成本函数信息得到的真实的 Shephard 引理,$\partial C/\partial w_i = x_i$ 引理与包络线结论(22)一致. 如果这样的正则条件成立,那么对偶定理成立.[11]另一方面,如果对偶定理不成立,那么(真正的)Shephard 引理将显著地区别于包络线结论. 这样,称由包络线定理得到的(22)中的$\partial C/\partial w_i = x_i$ 为"Shephard 引理"事实上是不正确的,因为后者依赖于成本函数信息,前者依赖于生产函数信息.[12]当对偶定理不成立时,这两者并不一致. 从经验的角度看,如 Shephard 指明的,后者可能更有意义.

在本节的剩余部分,我们简单概括 Shephard 对偶定理(1953 和 1970). 在 Shephard 公式中,"距离函数"的概念起了关键作用. 距离函数 D 定义为

$$D(y,x) \equiv \max_k \{k \in R : f(\frac{x}{k}) \geqq y, k > 0\} \tag{27}$$

用这样的描述,生产函数和成本函数可写作

139

$$f(x) = \max_y \{y : D(y,x) \geqq 1, y \geqq 0\} \tag{28}$$

$$C(w,y) = \max_x \{w \cdot x : D(y,x) \geqq 1, x \geqq 0\} \tag{29}$$

这里我们可以注意到,$D(y,x) \geqq 1$ 与 $f(x) \geqq y$ 相一致. 进而,我们也有

$$D(y,x) = \max_w \{w \cdot x : C(w,y) \geqq 1, w \geqq 0\} \tag{30}$$

等式(29)和(30)构成了 Shephard 对偶定理的核心(见 Shephard,1953,22 页;1970,159 页). 通过(27)、(29)、(30)和(28),决定关系链为 $f \Rightarrow D \Rightarrow C \Rightarrow D \Rightarrow f$. 另外,也可以从成本函数 C 开始关系链,又在 C 处结束,即通过(30)、(28)、(27)和(29),$C \Rightarrow D \Rightarrow f \Rightarrow D \Rightarrow C$. 并且也可以考虑链条关系从距离函数 D 开始并在 D 处结束. (见 Blackorby, Primont 和 Russell,1978,39 页).[13]

§3.3 微观经济理论的基础

前面的讨论对于得到微观经济理论中的一些著名结论是有用的.这些结论的推导将进一步阐明灵敏度分析的有用性和重要性.我们将通过使用熟悉的例子说明微观经济理论中一些著名结论的推导.希望读者能够在这不是很长的一节中认识到基本微观理论的分析方法的确是简单易懂.

在开始我们的讨论之前,我们加上下面的**正则条件(RC)**.

(RC) $f(x)$是正的,有限的,二次连续可微,严格单调,并且严格拟凹

140 这里 $x\in R^n$.函数 $f(x)$可被解释为生产函数.条件(RC)在通常的成本最小化和利润最大化问题中隐含或明确地被使用.那么严格拟凹性保证了成本最小化问题解的惟一性.类似的,我们可解释 $f(x)$为效用函数 $u(x)$.另外,它通常的支出最小化和效用最大化问题中也加上(RC).我们首先考虑成本最小化问题.

成本最小化 我们再次考虑一家公司,它选择 $x\in R^n$,以使

(CM) Minimize $w\cdot x$

约束条件为

$$f(x)\geqq y \text{ 且 } x\geqq 0$$

这里 y 是一个数量,$w>0$ 被假定对一个公司而言是给定的向量.再次令 $x(w,y)>0$ 是上述问题的解,令 $C(w,y)\equiv w\cdot x(w,y)$是最小总成本函数.那么我们得到前面所讨论的(22)和(23).令 $x_{ij}\equiv\partial x_i/\partial w_j$ 并且考虑 $n\times n$ 矩阵 $S\equiv[x_{ij}]$.S 称为**替代矩**阵.条件(23)表明 S 是对称的.因为 $x_{ij}=x_{ij}(w,y)$,对于**固定的** y,S 便是 w 的函数,S(w).注意,由成本最小化问题(CM)的结构,$x(w,y)$在 w 处是零阶齐次的.因此,由 *Euler* 方程,对所有 w,

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}w_j=0 \text{ 或 } S(w)w=0$$

其中 w 是列向量,因为 $S(w)$对称,进而推出 $w'S(w)=0$,其中 w'是 w 的转置.

同样,$C(w,y)$对 w 是一阶齐次的,并且对 w 是凹的.因为 $C(w,y)\equiv w\cdot x(w,y)$且 x 对 w 是零阶齐次的,则齐次性是显然的.为了证明凹性,[14] 令 $x^0\equiv x(w^0,y)$,$x^*\equiv x(w^*,y)$且 $x^\theta\equiv x(w^\theta,y)$,其中 $w^\theta\equiv\theta w^0+(1-\theta)w^*$,$0\leqq\theta\leqq 1$,那么由成本最小化

$$w^0\cdot x^0\leqq w^0\cdot x^\theta \text{ 且 } w^*\cdot x^*\leqq w^*\cdot x^\theta$$

这里由 x^0,x^*和 x^θ 的定义,我们有 $f(x^0)\geqq y$,$f(x^*)\geqq y$ 和 $f(x^\theta)\geqq y$.因此

$$\theta w^0 \cdot x^0 + (1-\theta) w^* \cdot x^* \leqq \theta w^0 \cdot x^\theta + (1-\theta) w^* \cdot x^0 = w^\theta \cdot x^\theta$$

141 其中 $0 \leqq \theta \leqq 1$. 即 $\theta C(w^0, y) + (1 \cdot \theta) C(w^*, y) \leqq C(w^\theta, y)$, $0 \leqq \theta \leqq 1$, 它这就证明了 C 对 w 的凹性. 这样 C 关于 w 的海赛矩阵是半负定的, 因为 $x_{ij} = \partial^2 C / \partial w_i \partial w_j$, 因此 S 是半负定的. 对所有 z, 我们有 $z'S(w)z \leqq 0$. 在 S 是半负定的条件下, 我们可以很容易得出对所有 i, $x_{ii} \leqq 0$. 另外, 如果我们假定对于所有不与 w 成比例的 z, $z'S(w)z < 0$, 那么我们可以证明 S 的秩等于 $(n-1)$[15]. 这进一步推出(根据矩阵代数中著名的定理)通过去掉 S 中的第 k 行和第 k 列而得到的 $(n-1) \times (n-1)$ 矩阵是负定的. 这又推出 $x_{ii} < 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 总之, 我们有下面经济学中的命题.

【命题 3.1】 令 $S \equiv [x_{ij}]$ 是成本最小化问题(CM)的替代矩阵.

(i) $C(w, y)$ 是 w 的一阶齐次的和凹的函数, 并且 $\partial C / \partial w_i = x_i > 0$.

(ii) S 是对称的和半负定的, 并且对所有的 i, $x_{ii} \leqq 0$. 同时有 $S(w)w = 0$ 和 $w'S(w) = 0$ (w 是列向量, 于是 w' 是行向量).

(iii) 另外, 如果我们假定对所有与 w 不成比例的 $z \neq 0$ 有 $z'S(w)z < 0$, 那么 S 的秩是 $(n-1)$, 且对所有的 $i = 1, 2, \cdots, n$, $x_{ii} < 0$.

注: 命题 3.1 的(i)指明了成本函数 $C(w, y)$ 的所有基本性质. 命题(ii)和(iii)指明了替代矩阵 S 的所有基本性质. 命题(iii)中的条件, 即对所有与 w 不成比例的 z 有 $z'S(w)z < 0$, 被称为 **Samuelson 正则条件**(见 Samuelson 1947, 68 页). 这个条件也将在附录 A 中的例 A.7 中讨论.

当产出水平(y)保持常数时, x_{ij} ($\equiv \partial x_i / \partial w_j$) 度量了第 j 种要素需求引起
142 的第 i 种要素价格的变化. 如果 $x_{ij} > 0$, 那么要素 i 称为要素 j 的(**Hicks - Allen**)**替代品**, 如果 $x_{ij} < 0 (i \neq j)$, 要素 i 称为要素 j 的(**Hicks - Allen**)**互补品**(见 Hicks 1946, 第 7 章). 既然 $x_{ij} = x_{ji}$, 这个定义是完全对称的. 也就是说, 如果 i 是 j 的替代品(或互补品), 那么 j 也是 i 的替代品(或互补品). 如果要素 j 的价格上涨, 要素 j 的使用减少, 那么有 $x_{jj} < 0$. 如果当要素 j 的价格上涨时(产出保持常数情况下), 要素 $i (\neq j)$ 的使用增加, 那么要素 i 是 j 的替代品; 如果 i 的使用减少, i 是 j 的互补品. 例如, 设 w_1 是工资率(劳动雇佣的价格), 假使其余情况均相同, w_1 的增长将降低对劳动 x_1 的需要, 那么有 $x_{11} < 0$. 如果 x_2 是使用的资本量, 劳动力和资本彼此是替代品($x_{12} > 0$), 那么, 这将导致对资本需求的增长. 另一方面, 如果 w_1 表示熟练劳动的工资率并且熟练劳动和资本彼此是互补品($x_{12} < 0$), 那么 w_1 的增长导致对熟练劳动力 x_1 需求的下降以及对资本 x_2 需求的下降. 回忆 $Sw = 0$, 即 $x_{i1}w_1 + x_{i2}w_2 + \cdots + x_{in}w_n = 0$, $i = 1, 2, \cdots n$. 由 $x_{ii} < 0$, 这意味着至少一对要素是替代品(即, 不可能所有要素都是互补的). 如果 $n = 2$, $x_{ii} < 0$ 意指 $x_{12} = x_{21} \geqq 0$. 当 $n \geqq 3$ 互补性会出现.

在中级价格理论课本中，通常的利润最大化问题被考虑为两阶段问题，其中 $x(w,y)$ 通过解成本最小化问题而得到（这里 y 是标量），然后选择 y 使 $py-C(w,y)$ 最大，其中 $C(w,y)\equiv w\cdot x(w,y)$. 对于一个竞争公司，第二个问题的解得出熟悉的结论，$p=\partial C/\partial y$ 或价格 = 边际成本.

命题 3.1 和前面的讨论不要求生产函数 $f(x)$ 的齐次性. 现在我们考虑 $f(x)$ 是一阶齐次的情形（规模收益不变）. 在此情形中，通过利用一阶条件，$w_i=\lambda f_i$，$f(x)=y$，以及 $f(x)$ 的齐次性，我们可以观察到（假定内部解，对所有 i，$x_i>0$ 且 $\lambda>0$）：

$$C=w\cdot x=\lambda\sum_{i=1}^{n}f_ix_i=\lambda f(x)=\lambda y$$

这里 $f_i\equiv\partial f/\partial x_i$. 由此我们可以断言 $\lambda=C/y$，由(22)这最终推出 $\partial C/\partial y=$
143 C/y. 由此我们可观察到

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y}=\frac{1}{y^2}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}y-C\right)=\frac{1}{y}\left(\frac{\partial C}{\partial y}-\frac{C}{y}\right)=0$$

这意味着 λ 独立于 y，因此 λ 可写成 $\lambda=c(w)$，即 λ 仅是 w 的函数. 回忆 $\lambda=C/y$，我们有 $C=c(w)y$. 总之，我们有命题 3.2 中称为 **Shephard－Samuelson 定理**的结论（Shephard，1953 和 Samuelson，1953）.

【命题 3.2】 如果生产函数显示规模收益不变，那么对于成本最小化公司，我们有

$$C/y=\partial C/\partial y=\lambda，且\ C=c(w)y$$

也就是说，平均成本 C/y 等于边际成本 $\partial C/\partial y$，并且这两者与产出 y 无关.[16]现在我们转到消费者选择问题.

消费者选择 考虑下面的“支出最小化问题”（EM），消费者选择他（或她）的消费束 $x\in R^n$，以使

(EM) Minimize $p\cdot x$

约束条件为

$$u(x)\geqq u，令\ x\geqq 0$$

这里 p = 价格向量，$u(x)$ = 效用函数，并且 u = 效用的目标水平，对于消费者而言 $p>0$ 是给定的向量. 消费者在使他或她的效用不低于 u 的条件下使他或她的支出最小. 设 $x^*(p,u)$ 是该问题的解，它被称作**补偿需求函数（或 Hicksian 需求函数）**. 令 $E(p,u)\equiv p\cdot x^*(p,u)$. 函数 E 被称为**最小支出函数**，它表示在 p 变化时使效用水平 U 保持不变的最低支出水平，因此函数 $x^*(p,u)$ 的补偿一词表示当 p 变化时，沿着无差异曲线或曲面的运动.

144 现在，比较上面的支出最小化问题（EM）和公司的成本最小化问题（CM），注意，这两个问题彼此是完全类似的，这里问题（EM）中的 p，$u(x)$ 和 u 分别

与问题(CM)中的 $w, f(x)$ 和 y 一致. 那么我们可以立刻知道在目前的支出最小化问题中命题 3.1 成立. 令 $x_{ij}^* \equiv \partial x_i^* / \partial p_j$, $S^* \equiv [x_{ij}^*]$ 是 $n \times n$ 矩阵. 因为 $x_{ij}^* = x_{ij}^*(p, u)$, S^* 对于 u 的一个固定值是 p 的函数, 则 $S^* = S^*(p)$. 现在, 我们可以陈述一个与命题 3.1 完全相似的命题.

【命题 3.3】 对于前面的消费者支出最小化问题, 我们有:

(i) $E(p, n)$ 对 p 是有一阶齐次的和凹的函数, 并且对所有 i 有 $\partial E / \partial p_i = x_i^*$.

(ii) S^* 是对称的且是半负定的, 并且所有的 i, $x_{ii}^* \leqq 0$. 同样, $S^*(p)p = 0$ 且 $p' S^*(p) = 0$(这里 p' 是列向量 p 的转置).

(iii) 另外, 如果我们假设, 对所有与 p 不成比例的 z 有 $z' S^*(p) z < 0$, 那么 S^* 的秩是 $(n-1)$, 并且对所有 $i = 1, 2, \cdots, n$, $x_{ii}^* < 0$.

现在, 我们得到 Hicks－Slutsky 方程. 为实现这一目的, 我们回忆一下效用最大化问题, 在这个问题中, 消费者选择他(她)的消费束 $x \in R^n$, 以使

(UM) Maximize $u(x)$

约束条件为

$$p \cdot x \leqq Y, x \leqq 0$$

这里, $p > 0$ 对于消费者来说是给定的向量. 记这个问题的解为 $x(p, Y)$, 令 $U(p, Y) \equiv u[x(p, Y)]$ 是消费者他(她)收入为 Y 且面对价格向量 p 时所能达到的最大效用. 那么我们可以观察到下面的对偶关系式:

$$E(p, U) = Y \text{ 且 } x(p, Y) = x^*(p, U) \tag{31}$$

这里 $U = U(p, Y)$.[17] 即如果 U 是在 (p, Y) 下所获得的最大效用, 那么, 达到效用 U 的最小支出是 Y.

145 当 $U = U(p, Y)$ 时, 在收入 Y 处的效用最大化需求与在效用 U 处的补偿需求一样. 由(31)我们可以断言

$$x[p, E(p, U)] = x^*(p, U) \tag{32}$$

对此式关于 p_j 求导, 我们得到 **Hicks－Slutsky 方程**, 或者价**值理论**中的**基本方程**

$$\partial x_i / \partial p_j = x_{ij}^* - x_j(\partial x_i / \partial Y), i, j = 1, 2, \cdots, n \tag{33}$$

这里我们可以回想一下 $\partial E / \partial p_j = x_j^*$.[18] 项 x_{ij}^* 是**净替代项**, 它的性质我们已在命题 3.3 中得到, 而 $x_j(\partial x_i / \partial Y)$ 表示**收入效应**. 差不多所有关于价格理论的教科书都包括(33)的图示. 注意到 $S \equiv [x_{ij}^*]$, 我们由(33)可以立刻得到下面的定理.

【命题 3.4】 令 $x(p, Y)(>0)$ 是作为(UM)的解而得到的需求函数的一个向量. 那么, 我们有 Hicks－Slutsky 方程(33)和满足命题 3.3 的性质(ii)和

(iii)的矩阵 S^*.

注:矩阵 S^* 称为(净)替代矩阵,并且命题 3.3 的性质(ii)和(iii)给出了净替代矩阵的所有基本性质.

146 如果 $\partial x_i(p, Y)/\partial p_i > 0$,则商品 i 被称为**吉芬商品**;如果 $\partial x_i(p, Y)/\partial Y < 0$,[19]则被称为**劣等品**.因此由(33),很明显每一个吉芬商品都是劣等品,但不是反过来也是这样.在经济学家中通常接受这样的观点,即尽管劣等品偶尔看到(例如使用 Greyhound/Trailway 巴士与飞机之间),但吉芬悖论却是非常特殊的.[20]因此,我们可以有把握地排除这样的悖论,从而得出结论,一种商品价格上的相对增长会降低对该商品的需求($\partial x_i/\partial p_i < 0$),这被称为**需求法则**.

注意,$x_{ij}^*(\equiv \partial x_i^*/\partial p_j)$度量当 p_j 变化而保持效用水平 U 固定时,对第 i 个商品的需求的变化(即**收入中的补偿变化**).如果 $x_{ij}^* > 0$,两种商品 $i \neq j$ 称为**替代品**;若 $x_{ij}^* < 0$,称为**互补品**.既然 $x_{ji}^* = x_{ij}^*$,则替代品和互补品的定义是对称的.如果 i 是 j 的替代品(或互补品),那么 j 也是 i 的替代品(或互补品).消费中的替代品和互补品定义完全类似于生产理论中的定义.

例如,如果 p_1 是咖啡的价格,那么由 $x_{11}^* < 0$,p_1 的增长将降低对咖啡 x_1 的需求.如果商品 2 是茶且茶是咖啡的替代品($x_{12}^* > 0$),那么这将提高对茶的需求.另一方面,如果 p_1 是网球拍的价格,p_1 的上涨会降低对其需求,$x_{11}^* < 0$.如果商品 2 是网球,网球是网球拍的互补品($x_{12}^* < 0$),那么这将导致对网球需求的下降.

147

注:如同在成本最小化问题中,我们很容易得出下列断言.因为 $S^* p - 0$,我们有

$$x_{i1}^* p_1 + x_{i2}^* p_2 + \cdots + x_{in}^* p_n = 0, i = ,1,2,\cdots,n$$

由于 $x_{ii}^* < 0$,这意味着至少一对商品必须是替代品(即,不可能所有的商品都是互补品).如果 $n = 2$,$x_{ii}^* = 0$ 推出 $x_{21}^* = x_{12}^* > 0$,因此两种商品必定是替代品,而如果 $n \geqq 3$,互补品会出现.

同消费理论中一样,生产理论中一个重要的概念是位似函数,这归于 Shephard(1953).

【定义 3.1】 如果存在连续的正的单调递增变换 $\phi(f)$ 使 $g(x) \equiv \phi[f(x)]$ 是一次齐次的,[21]则函数 $f(x)$ 称为是**位似的**.

明显地,如果 $f(x)$ 是一次齐次的(线性齐次),那么因为 $\phi(f) = f$,它是一个位似函数.因此,这样位似函数的种类比线性齐次函数的种类多.假定 f 表现良好,即满足(RC).那么,下面的定理总结了位似函数的重要特征.这里,我

们利用成本最小化问题(CM)来说明基本结论,其中 $f(x)$ 被解释为生产函数.通过将 $f(x)$ 解释为效用函数,对于消费者选择理论,我们可得到类似的结论.

【命题 3.5】

(i) $f(x)$ 是位似的,当且仅当它是"可分"的,即

$$\text{对所有 } w>0 \text{ 和 } y>0, C(w,y)=h(w)\phi(y) \tag{34}$$

的情况下,这里,h 和 ϕ 都与位似定义中所用到函数的一样,$g(x)=\phi[f(x)]$.[22]在此情形中,我们有 $\lambda(w,y)=h(w)\phi'(y)$.

148 (ii) $f(x)$ 是位似的,当且仅当

$$\text{对所有 } w>0 \text{ 且 } y>0, x_i(w,y)=h_i(w)\phi(y) \tag{35}$$

其中 $h_i \equiv \partial h(w)/\partial w_i, i=1,2,\cdots,n$

(iii) $f(x)$ 是位似的,当且仅当对所有投入价格向量 $w>0$,每一扩展路线是从原点开始的射线.

注:由命题(i)和 Shephard 引理,$\partial C/\partial w_i = x_i$,立刻有命题(ii),我们可以毫不困难地断言,如果 $f(x)$ 是位似的,那么(35)成立,因此对每一个 i 和 j 比率 x_i/x_j 都和 y 是相对独立的:扩展路径是从原点开始的直线.这证实了命题(iii)的"仅当"部分.命题(iii)的"当"部分的证明典型地利用了偏微分方程(Lau 1969 和 Førsund 1975),或者使用相当冗长的集合论证明(Färe 和 Shephard 1977a 和 1977b). Ide 和 Takayama(1986)[23]提了一个简单且基本的证明.

149 注:注意 Shephard - Samuelson 定理(命题 3.2)是一特殊情形,其中 $\phi(y)=y$,因为如果 $\phi(y)=y$,那么 $C/y=\partial C/\partial y=h(w)=\lambda$.在此情形中,$w_i x_i/y = w_i h_i(w)$ 与产出 y 独立.即,如果 $f(x)$ 是一次齐次的,第 i 个相对份额(在 f 的线性齐次性下,它也等于第 i 个成本份额)与 y 独立.

注:命题 3.4 的命题(iii)指出了位似函数的一个显著特征,表明任一通过原点的射线将在斜率相同点处(即 w 是固定的)与投入空间中的等产量线相交,并且对任一固定的 $w>0$,如果我们把等成本线与等产量线的切点相连,则这样的曲线都是从原点开始的直线.

给定此性质(iii),位似函数已经广泛地应用在生产和消费理论中.线性齐次函数,一组特殊的位似函数,也已经被广泛用在经济学中,产生了许多有趣又有用的结论.然而,一般地,既然每一扩展线不必是从原点开始的射线,位似性假设也被认为太具约束性.实际上,在消费理论中,每一 Engel 曲线(也就是扩展路径)线是从原点开始的直线的断言常常被认为太奇异,因为它看起来几乎与所有经验上的证据相矛盾.

为了进一步探讨这一点，令 μ_i 为

$$\mu_i \equiv [\partial x_i(w,y)/\partial y](y/x_i), i=1,2,\cdots,n \tag{36}$$

也就是，μ_i 表示对要素 i 的需求产出弹性. 如果 $f(x)$ 是位似的，我们可以很容易由(35)得到

$$\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_n[=\phi'(y)y/\phi(y)] \tag{37}$$

反过来，如果(37)成立，$f(x)$ 是位似的. 这样，函数 $f(x)$ 是齐次的，当且仅当所有要素的要素需求产出弹性是相等的.

如果 $f(x)$ 是一次齐次的，那么 $\phi(f)=f$，因此我们有

150

$$\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_n=1 \tag{38}$$

也就是，要素需求的产出弹性对所有要素而言都等于 1.

令 θ 定义为

$$\theta \equiv [\partial C(w,y)/\partial y](y/C) \tag{39}$$

那么 θ 表示产出的成本弹性，并且它也等于边际成本与平均成本的比率. 令第 i 个成本份额 $\theta_i \equiv w_i x_i/C$. 那么我们不难说明

$$\theta=\theta_1\mu_1+\theta_2\mu_2+\cdots+\theta_n\mu_n \tag{40}$$

也就是，θ 是 μ_i 的凸组合. 参数 θ 在近来的文献中经常被用作规模收益的一种度量. 我们可以说，如果 $\theta<1$，**递增的规模收益**；如果 $\theta>1$，**递减的规模收益**；并且如果 $\theta=1$，**不变的规模收益**(对规模收益概念的进一步讨论，见 3.5 节). 如果 $f(x)$ 是一次齐次的，那么我们可以说明对所有 y，$\theta=1$.

对于经验性地检验 $f(x)$ 的位似性，方程(37)被用作原假设. 如果这被拒绝，那么 $f(x)$ 不是位似函数. 一旦我们估计出 μ_i，(40)也能被用作计算规模收益的量度 θ. 利用来自美国制造业的数据，Chao 和 Takayama(1991)尝试了这样一个实证性研究，其中它们说明要素需求的产出弹性因要素不同而不同，且 $\theta<1$(递增的规模收益).[24]

§3.4 要素替代弹性及其估计

151

在近来的实证性研究中，要素替代弹性的概念已经变得日益重要. 在本节中，我们简要讲解它及其相关问题. 微观理论与实证性研究紧密相联，该节将举出一个这样的研究例子.

考虑通常的成本最小化问题，令 $x_i(w,y)$ 是对第 i 种要素的需求. 令 $x_{ij} \equiv \partial x_i/\partial w_j$. 正如前面提到的，如果 $x_{ij}>0$，要素 i 和 j 彼此相互替代；如果 $x_{ij}<0$，要素 i 和 j 彼此互补. 按传统方式定义要素需求的价格弹性为

$$e_{ij} \equiv (\partial x_i / \partial w_j)(w_j / x_i)(= x_{ij} w_j / x_i), i, j = 1, 2, \cdots, n$$

这表示相对于第 j 种要素价格每百分之一的变化，第 i 种要素需求变化的百分比. 这个定义的一个重要特点是 e_{ij} 不对称，也就是说，一般地 $e_{ij} \neq e_{ij}, i \neq j$. 为解决该问题，我们可以定义 σ_{ij} 为

$$\sigma_{ij} \equiv e_{ij} / \theta_j, \text{这里 } \theta_i \equiv w_i x_i / (w \cdot x), i, j = 1, 2, \cdots, n \tag{41}$$

这里，θ_j 表示第 j 种要素的成本份额(在成本最小化的最优解处). 不难证明 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$，也就是说，$\sigma_{ij}$ 是对称的. σ_{ij} 被称为**要素替代的(Allen-偏)弹性(ES)**.[25]

明显地，如果要素 i 和 j 彼此替代(或互补)，则 $\sigma_{ij} > 0$(或 < 0). 这样，ES 的符号被用来决定一对特定的要素是替代品还是互补品.

ES 的简明特点在于它不仅是对称的，而且它对于基础生产函数也有重要的含义. 例如，Cobb－Douglas 生产函数对所有 $i \neq j$，$\sigma_{ij} = 1$，并且反过来也是这样. 对于两个要素的情形，由(41)和 $x_{i1} w_1 + x_{i2} w_2 = 0 (i = 1, 2)$，在位似性的条件下，我们容易得到下面著名的关系式：

$$dz / z = -\sigma (dw / w), z \equiv x_1 / x_2, \omega \equiv w_1 / w_2$$

152 这里 $\sigma \equiv \sigma_{12} = \sigma_{21}$. w 的百分之一的增长将导致 z 的百分之 σ 的下降. 对于两种要素的情形，ES 度量等产量线的“曲率”. 同样，既然 $\theta_1 / \theta_2 = (w_1 x_1) / (w_2 x_2)$，如果 $\sigma > 1$(或 $\sigma < 1$)，w 的增长将导致一个相对份额比例 θ_1 / θ_2 的下降(或上升). (见 Hicks1932). 如果 σ 沿着整条等产量线都是常数，那么生产函数采用下面 **CES** 形式，这归功于 Arrow, Chenery, Minhas 和 Solow(1961)：

$$y = f(x_1, x_2) = (a x_1^{\rho} + b x_2^{\rho}), \text{这里 } \rho \equiv (\sigma - 1) / \sigma$$

CES 已激发了大量的实证上的和理论上的研究，尽管在扩展到多要素的情况时已面临一些重大困难(例如，见 Fuss, McFadden 和 Mundlak, 1978).

这样，Allen 弹性化简为通常的两种要素情况的要素替代的 Hicks 弹性 σ. 假如生产函数是位似的，这就会发生(证明它). 在两种要素情形中，我们可得到“良好的特征”，例如依据等产量线的曲率解释弹性以及对于收入分配或相对份额的含义. 另一方面，对于一般的 n 种要素的情形，当我们使用 Allen 弹性，这些良好特征绝大部分消失. 看起来我们从 Allen 弹性得到的惟一有用的信息是这些能告诉我们两种特定的要素(i 和 j)是否彼此是替代品或互补品(见 Blackorby 和 Russell 1989). Blackorby 和 Russell 后来提倡使用“Morisbima 弹性”.

令 $C(w, y)$ 同以前一样是(最小)总成本函数. 令 $C_i \equiv \partial C / \partial w_i$ 且 $C_{ij} = \partial^2 C / \partial w_i \partial w_j$，并且回想 Shephard 引理，我们容易证明，对所有 w 和 y，

$$\sigma_{ij} = C C_{ij} / C_i C_j, i, j = 1, 2, \cdots, n \tag{42}$$

类似的关系式由 Uzawa(1962)以更冗长的形式得到. 另外，他假定生产函数

$f(x)$是一次齐次的.如果 $f(x)$是一次齐次的,那么由命题 3.2,$C(w,y)=c(w)y$,因此(42)能容易地简化为 Uzawa 公式(1962,293 页):

$$\sigma_{ij}=cc_{ij}/c_ic_j,\text{其中 } c_i=\partial c/\partial w_i,c_{ij}=\partial^2 c/\partial w_i\partial w_j \tag{43}$$

如 Brown 和 Christensen(1981,209 页)所写,"对偶理论在经济分析中的广泛应
153 用以及灵活的函数形式的伴随发展"在实证性文献中引起了很大的注意,尤其自 70 年代以来.为说明这一点,我们着重考虑生产理论的情形,尤其是估计要素需求函数 $x(w,y)$的问题.常规的过程是先指定生产函数 f 的明确形式,然后解成本最小化问题,或者加上考虑了像 FS 这样的关键参数的严格的限制性假设[26],或者得出由实证性估计的角度来看的难题.更确切地说,后一个问题起源于依据用以刻画生产函数 f 的特性的实证性可操作的(未知)参数来得到 $x(w,y)$的代数表达式的困难.特别当我们要求 f 光滑,即是说它提供了任意一个二阶连续可微函数的二阶微分近似时,这种情况便出现了.[27]

然而,另一方法近来已经引起了很大注意.这一替换方法是利用 Shephard 对偶性(它保证了当给定具备一定正则条件的惟一的成本函数存在时,惟一的生产函数的存在)和 Shephard 引理($\partial c/\partial w_i=x_i$).最初由 Shephard(1953)得到的 Shephard 引理只假定这样一个成本函数,并且不需要生产函数的具体形式.第二个方法也能使我们避免在按常规方法借助 Lagrangian 乘数导出 $x(w,y)$时有时棘手的代数学.总之,第二种方法指定了带有适当正则条件的成本函数的(灵活)形式,利用 Shephard 对偶性和 Shephard 引理,然后通过简单的回归估计得出相关的参数.

更具体地,我们通过下面由 Christensen,Jorgenson 和 Lau(1971 和 1975)等人介绍的超对数(超对数函数)来指定成本函数.超对数形式显得灵活,并且它
154 在当前的经验性研究[28]中很流行.超对数函数可被表示如下:

$$\begin{aligned}\log C(w,y)=a_0&+\sum_{i=1}^{n}a_i\log w_i\\&+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\log w_i\log w_j\\&+\sum_{i=1}^{n}b_i\log w_i\log y\\&+\left[c_1\log y+\frac{1}{2}c_2(\log y)^2\right]\end{aligned} \tag{44}$$

其中,对所有 i,$\sum_{i=1}^{n}a_i=1$,$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=0$

对所有 i 和 j,$a_{ij}=a_{ji}$,且 $\sum_{i=1}^{n}b_i=0$ (45)

(45)中的条件被用来保证 $C(w,y)$对于 w 是一次齐次的且海赛矩阵 $\partial^2C/\partial w_i\partial w_j$是对称的.[29]超对数函数可以被看做任意函数的二次对数近似.[30]

155 关于 w_i 微分(44),并运用 Shephard 引理,我们得到

$$\theta_i(w,y)\equiv w_i x_i / C(w,y)$$

$$= a_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\log w_j + b_i \log y, i=1,2,\cdots,n \tag{46}$$

这里 θ_i 表示第 i 种要素的份额(总成本中第 i 种要素的成本比例).[31]注意,(46)中,θ_i 对于未知参数 a_i,a_{ij} 和 b_i 是线性的.既然 θ_i 是可观测的,那么(46)允许利用普通的线性回归来估计这些参数.在作回归时,我们需要谨慎,因为 $\sum_i \theta_i = 1$,故(46)中的 n 个方程只有 $(n-1)$ 个是统计上独立的.给定成本份额、要素价格和产出的数据,通过把(44)附加到 $(n-1)$ 个方程中,我们可估计所有参数.另外,如果生产函数已知是齐次的,那么正如前面提到的 C 是可分的,$C(w,y)=h(w)\Phi(y)$,这里又推出对所有 i,$b_i=0$.这意味着我们能够通过检验由(46)估计出的参数 b_i,在统计学上检验生产函数的位似性,来看看它们是否显著地不等于零.[32]注意,如果我们预先假定生产函数是位似的,既然由(34)和(35),θ_i 独立于 y,那么估计(46)简化为

$$\theta_i \equiv w_i x_i / C = a_i + \sum_{j=1}^{n} \log w_j, i=1,2,\cdots,n \tag{47}$$

也就是,在 a_i 和 a_{ij} 的估计中,我们不需要在某些实证性研究中有用的 y(产出)的数据.[33]另外,如果生产函数是一次齐次的,我们有 $C(w,y)=h(w)y$,因此在(44)中,对于所有的 i,我们一定有 $b_i=0$ 及 $c_1=1$ 和 $c_2=0$.

下一步,由(44)注意,

156

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 \log C(w,y)}{\partial \log w_i \partial \log w_j} = w_i w_j \frac{\partial}{\partial w_i}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial w_j}\right), \text{如果 } i \neq j$$

$$a_{ii} = w_i^2 \frac{\partial}{\partial w_i}\left(\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial w_i}\right) + \left(\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial w_j}\right) w_j$$

那么回想 $\partial C/\partial w_i = x_i$(Shephard 引理)和(41),我们可得到下面的公式来利用由(47)估计出的 a_{ij} 的值计算要素替代的 Allen 弹性 σ_{ij}:

$$\sigma_{ij} = (a_{ij} + \theta_i\theta_j)/(\theta_i\theta_j), i \neq j$$

$$\sigma_{ii} = (a_{ii} - \theta_i + \theta_i^2)/\theta_i^2 \tag{48}$$

这个公式也可以把(44)用于(43)而得到.注意,既然 θ_i 可以不时改变,σ_{ij} 就不必是常数(不像 CES 生产函数的情形).根据四要素模型,Berndt 和 Wood (1975)利用 1947 到 1971 年间美国制造业的总量数据,得到如下结论:由于 $\sigma_{KE} = -3.2$ 且 $\sigma_{LE}=0.65$,资本(K)和能源(E)是互补品,劳动力(L)和能源是替代品(而由于 $\sigma_{LK}=1.01$,劳动力和资本是替代品).这意味着能源价格上涨(例如 1973 年后期)会减少资本的使用(由于 E-K 的互补性),增加劳动力的使用(由于 E-L 的替代性).这时常被认为与 1973 后美国劳动生产率的增长率的急剧下降一致.Berndt 和 Wood 的研究激发其他许多人来实证性的确定 E-K 的互补性.尽管这些研究看起来远非结论性的,更多的似乎支持 E-K

157 互补性(它与 E-K 替代性相对).关于这个题目的许多研究的一个弱点是它们忽略了半固定要素和可变要素之间的区别.例如,正在缓慢调整的资本是半固定要素.20 世纪 80 年代人们做了大量实证性尝试来加入这种区别(例如注释[24]引用的文献).对于最近的研究,见 Chao 和 Takayama(1991),其中他们发展了一个理论公式来估计长期弹性.[34]

§3.5 关于规模收益的概念

在文献中,诸如规模收益递增,规模收益递减和规模收益不变等术语常被使用.然而,这些概念的不同定义和它们之间的关系经常是含糊的.本节中我们将阐明这些定义和它们之间的关系.[35]不用说,在涉及规模经济和不经济的任何严肃的研究中,理解这些问题是很重要的.

令 $f(x)$是生产函数,$C(w,y)$是由通常的成本最小化过程得到的成本函数.令 $w>0$ 是固定的要素价格向量.那么 $\theta(y)\equiv(\partial C/\partial y)/(C/y)=MC/AC$,这也表示成本的产出弹性,正如在关于(40)的式子中所看到的,它作为规模收益的一个度量.可以依据 θ 定义**规模收益递增(IRS)**.

【定义 3.2】 如果 $\theta<1$,我们称 IRS(θ)奏效.这里 IRS(θ)表示依据 θ 的 IRS.

这意味着如果产出 1% 的增长导致总成本小于百分之一的增长,则 IRS(θ)奏效.类似地,递减规模收益(DRS)和不变规模收益(CRS)根据 θ 定义如下:

158 (i) 如果 $\theta>1$,DRS(θ)奏效;

(ii) 如果 $\theta=1$,CRS(θ)奏效.

另外,我们可以依据平均成本曲线的形状来定义规模收益.为此,我们令 $\beta(y)\equiv C(w,y)/y$,这里 w 被假定为固定向量,$\beta(y)$表示平均成本.那么,我们得到下面的定义,这里 IRS(β)表示依据 β 的 IRS.

【定义 3.3】 如果 $\beta'(y)<0$,则称 IRS(β)奏效,面如果 $\beta'(y)>0$,则 DRS(β)奏效.如果 $\beta'(y)=0$,则 CRS(β)奏效.即如果 AC 曲线随着产出的增加面下降,则 IRS(β)奏效.规模收益的定义 3.2 和 3.3 等价.即,我们有下列结论:

【命题 3.6】 当且仅当 IRS(β)奏效,IRS(θ)奏效.

证明:简单地观察

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{C}{y}\right)=\frac{1}{y}\left(\frac{\partial C}{\partial y}-\frac{C}{y}\right)=\frac{C}{y^2}(\theta-1)$$

由此,我们立刻可得出结论:$\beta'<0$,当且仅当 $\theta<1$.[36] (证毕)

类似地,我们可以证明 $\theta>1$,当且仅当 $\beta'>0$.然后我们可得到 $\theta=1$,当且仅当 $\beta'=0$.

在生产理论中，在产出水平的一定范围内限制规模收益的定义性质经常是有用的. 例如，在通常的∪形 AC 曲线中，AC 曲线下降到产量的一定水平（在此，$\beta'<0$ 且 $\theta<1$），然后，随产量的增加而上升（在此，$\beta'>0$ 且 $\theta>1$）. 那么将规模收益的概念限制在产量水平的一定范围内就变得重要了. 通过在规模收益的定义中约束 y 的范围容易使该问题解决. 然而，既然这一点很显然，我们不必修正我们的定义，由此避免了讲解中的杂乱.

现在注意规模收益最广泛使用的（Hanoch 1975，492 页）概念不同于上面. 其定义如下：如果在所有要素都增加 k 倍时产出的增长超过 k 倍，则称 IRS 奏效（$k>1$）. 定义参数 α 为

159

$$\alpha(k,\bar{x})\equiv f(k\bar{x})/[kf(\bar{x})] \tag{49}$$

这里 $\bar{x}$ 是固定的（参与）投入向量. 那么递增规模收益最广泛使用的概念，依据 α 的 IRS，表示为 IRS(α)，定义如下：

【定义 3.4】 如果

$$\alpha(k,\bar{x})>1, \text{对所有的 } k>1 \tag{50a}$$

$$\alpha(k,\bar{x})<1, \text{对所有的 } k>, \text{满足 } 0<k<1 \tag{50b}$$

则称 IRS(α)奏效，这里对 $k=1$，$\alpha(k,\bar{x})=1$. 标量 k 称为**规模系数**或者**规模因子**.[37] 如果(50)中 α 的不等式反向，那么我们称 DRS(α)奏效. 如果对所有的 k，$\alpha(k,\bar{x})=1$，即如果 f 是一次齐次的，那么 CRS(α)奏效.

另一普遍的规模收益定义可以根据**规模弹性** ε 获得. ε 定义为

$$\varepsilon(k\bar{x})\equiv\frac{k}{f(k\bar{x})}\frac{\partial f(k\bar{x})}{\partial k} \tag{51}$$

这里假设 $w>0$ 为常数.[38] 参数 ε 度量规模系数 k 每增长 1% 时，产出增长的百分比. 然后我们可以依据 ε 定义 IRS，表示为 IRS(ε)，如下所示：

【定义 3.5】 如果对所有的 $k>0$，$\varepsilon(k,\bar{x})>1$，则称 IRS(ε)奏效. 类似地，如果对所有的 $k>0$，$\varepsilon<1$，则 DRS(ε)奏效，并且如果对所有的 k，$\varepsilon=1$，则 CRS(ε)奏效.

160

下面的命题将 IRS(α)和 IRS(ε)联系起来：

【命题 3.7】 IRS(α)奏效，当且仅当 IRS(ε)奏效.

我们通过证明辅助引理 3.1 和 3.2 来说明它.

【引理 3.1】 对所有的 $k>0$，$\partial\alpha(k,\bar{x})/\partial k>0$，当且仅当对所有的 $k>0$，$\varepsilon(k,\bar{x})>1$.

证明：简单回顾 α 和 β 的定义，并且注意到

$$\frac{\partial\alpha(k,\bar{x})}{\partial k}=\frac{1}{k^2f(\bar{x})}\left[k\frac{\partial f(k\bar{x})}{\partial k}-f(k\bar{x})\right]$$

$$=\frac{f(k\bar{x})}{k^2}f(\bar{x})[\varepsilon(k\bar{x})-1] \qquad \text{（证毕）}$$

【引理 3.2】 $\partial\alpha(k,\bar{x})/\partial k$ 等价于依据 α 的 IRS. 更具体地，我们有

(i) 对 $k>1$，$\alpha(k,\bar{x})>1$，当且仅当 $\partial\alpha(k,\bar{x})/\partial k>0$；

(ii) 对 $0<k<1$，$\alpha(k,\bar{x})<1$，当且仅当 $\partial\alpha(k,\bar{x})/\partial k>0$.

证明：为证明命题(i)，注意到对 $k>1$，有

$$\alpha(k,\bar{x})\equiv f(k\bar{x})/|kf(\bar{x})|>f(\bar{x})/f(\bar{x})=1$$

当且仅当 $\partial x(k,\bar{x})/\partial k>0$. 注意，对于 $0<k<1$，不等式反号，命题(ii)立即得出. (证毕)

综合这两个引理，命题 3.7 立即得出. 类似地，我们能够证明 DRS(α)奏效，当且仅当 DRS(ε)奏效. 这样，我们也可以断言 CRS(α)奏效，当且仅当 CRS(ε)奏效.

命题 3.8 使不变规模收益的各种概念联系起来.

【命题 3.8】 CRS(α)，CRS(ε)，CRS(θ)和 CRS(β)彼此等价.

证明：由命题 3.6 和 3.7，我们足以证明 CRS(θ)奏效，当且仅当 $f(x)$是一次齐次，这里后者等价于 CRS(α). 如果 $f(x)$是一次齐次的，那么由
161 Shephard－Samuelson 定理(命题 3.5)，我们有 $C/y=\partial C/\partial y$ 或 $\theta=1$，故 CRS(θ)成立. 相反，如果CRS(θ)奏效，$C/y=\partial C/\partial y(=\lambda)$. 然后观察

$$\lambda y=C=\sum_{i=1}^{n}w_ix_i=\lambda\sum_{i=1}^{n}f_ix_i,\text{这里 }f_i\equiv\partial f/\partial x_i$$

因此，我们必定有 $y=\sum_{i=1}^{n}f_ix_i$. 这个关系式成立(齐次函数的 Euler 等式)，当且仅当 f 是一次齐次的. (证毕)

如果离开 CRS，我们就不能得到如命题 3.8 这样的结果. 虽然IRS(θ)和 IRS(β)是相互等价的，但它们既不与 IRS(α)等价，也不与 IRS(ε)等价. 关于这点的原因是明显的. 两个概念，IRS(α)和 IRS(ε)是依据所有要素投入的一个比例增加而定义，也就是依据等产量图上从原点出发的一条射线，因此这些概念忽视了要素价格的组态. 另一方面，IRS(θ)和 IRS(β)依据成本函数定义，它是借助成本最小化程序得到. 也就是说，IRS(θ)和 IRS(β)是依据**扩展路径**(EP)定义的. 然后，很自然得出 IRS(θ)和 IRS(β)概念一般与 IRS(α)和 IRS(ε)的概念不同. 这些概念间的准确关系由 Ide 和 Takayama(1987 和 1989a)得到. 很可能一公司沿着 EP 扩展而享受到 IRS 或规模经济，但如果沿着发自原点的射线扩展，它会遭受到 DRS 或规模不经济. **既然公司沿着 EP 而不是机械的沿着发自原点的射线来扩充其经营规模，IRS(α)和 IRS(ε)的概念虽然在文章中被广泛应用，却不必与公司的理性行为相一致.**

但是，由命题 3.5 的(iii)，我们知道每个 EP 是发自原点的射线，当且仅当生产函数是位似的. 然后我们得到下面的结果就不令人惊奇了.[39]

【命题 3.9】 当且仅当 $f(x)$是位似的，依据 EP 的 IRS 是等价于依据发自原点射线的 IRS.

162 我们现在可以用图解的方式来说明图 3.1 中四个不同概念的联系.

在文献中，时常用到 IRS 的“局部”度量. 为理解这一点，定义

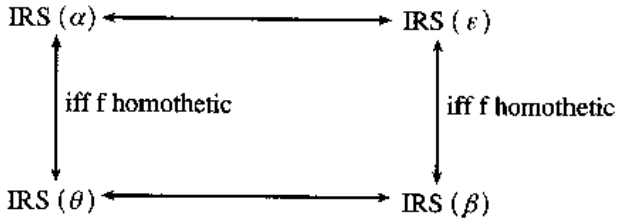


图 3.1　IRS 的不同概念

$$\alpha_1 \equiv \lim_{k\to 1}\alpha(k,\tilde{x}) \qquad \varepsilon_1 = \lim_{k\to 1}\varepsilon(k,\bar{x})$$

$$\theta_1 = \lim_{y\to y_1}(y) \qquad \beta_1 \equiv \lim_{y\to y_1}\beta(y)$$

这里 $y_1 \equiv f(\bar{x})$. 那么，我们可得到下面的结论：

【命题 3.10】 所有局部度量是等价的，即[40]

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 = \theta_1 = \beta_1$$

这个定理是近来流行用 θ_1 作规模收益的度量的根源（例如，Varian 1984；Helpman 1984；Helpman 和 Krugman 1985）. 用 θ_1 的困难是它只提供一个局部度量. 实际上，如果这四个度量在相应射线与 EP 的交点处赋值，即在规模因子 k 等于 1 的点赋值（没有要素的扩张或收缩），那么(52)意味着规模收益的四种度量是局部度量，并且它们相等. 令人惊奇的是在文献中这些概念甚至被接受了.[41]

§ 3.6　Le Châtelier-Samuelson 原则[42]

163

1844 年，法国化学家 H. L. Le Châtelier 根据他对热化学平衡的研究，总结了一个颇具启发性的原则，即

如果一个系统处于稳定平衡状态，条件之一发生改变，那么平衡将以趋于消除这一条件变化的方式转变.[43]

Samuelson(1947)从数学上系统阐述了这一点，得出比较静态问题中的一个重要的一般结论，并且将其引入经济学. 他称其为“Le Châtelier 原则”. 随后它被 Samuelson 和其他人进一步详细说明. 最近的成就也确认了这一点，例如，我们有 Pollak(1969)，Eichhorn 和 Oettli(1972)，Silberberg(1971，1974 和 1990)，Hatta(1980 和 1987)和 Otani(1982). 这个原则现在经常被称为 **Le Châtelier－Samuelson(LeS)原则**.

具体地，Samuelson(1947)说明(a)要素需求和商品供给的长期弹性比在短期中的要大，(b)有配给的顾客对一个产品的(补偿)需求弹性比没有配给的要小. 也就是说，假定将“恰当制约的”约束附加于最优化问题，这里词组“恰当制

约的"意思是:这个约束的附加并不改变最初的解.如此得到的 LeS 原则表明带有这样一个附加约束的参数的一个变动对于决策变量的最优值的(补偿性)影响比不带有约束的要小.[44]

本节中,我们以揭示原则的重要方面的方式来检验这个原则.利用包络线定理(定理 3.3),我们的讨论可大大简化.不同于用来得到 LeS 原则的其他方
164 法,包括 Hatta(1980),我们的方法对于得到变动参数对拉格朗日乘数(或资源的影子价格)以及决策变量最优值的影响也提供了一个简单途径.在通常的成本最小化问题的文章中,这意味着长期边际成本(MC)曲线比短期的要平(当 MC 上升时),并且长期供给价格大于它的短期供给价格.

令 x 和 z 分别表示可变和半固定要素向量,这里 $x\in R^n$ 且 $z\in R^m$.令 $f(x,z)$是生产函数,它被假定满足正则条件(RC).令 $w>0$ 是可变要素的价格向量,$r>0$ 是拟固定要素的使用者成本向量.公司的"短期"问题可写作:

$$\underset{x}{\text{Minimize}} \quad w\cdot x$$

约束条件为

$$f(x,z)\geqq y \text{ 且 } x\geqq 0$$

令 $x^0(w,y;z)>0$ 是该问题的惟一解,令 $\lambda^0(w,y;z)>0$ 是与此相关的拉格朗日乘数.定义 $C^0(w,y;z)\equiv w\cdot x^0(w,y;z)$,我们假定它在 w 和 y 处二阶连续可微.那么,由包络线定理,我们得到在(23)中已得到的那样:

$$\partial x_i^0/\partial w_j=\partial x_j^0/\partial w_i,\partial x_i^0/\partial y=\partial\lambda^0/\partial w_i,i,j=1,\cdots,n$$

为便于讲解,我们首先假设 $m=1$ 或者 z 是标量,表示公司的"厂房",将公司的"长期"问题写作:

$$\underset{x,z}{\text{Minimize}} \quad w\cdot x+rz$$

约束条件为

$$f(x,z)\geqq y,x\geqq 0 \text{ 且 } z\geqq 0$$

令 $x^1(w,r,y)>0$ 和 $z^1(w,r,y)>0$ 是此问题的惟一的解,$\lambda^1(w,r,y)$是与其相关的拉格朗日乘数,定义 $C^1\equiv w\cdot x^1(w,r,y)+rz^1(w,r,y)$.假定 C^1 在 (w,r,y)处二阶连续可微,那么,由包络线定理,我们得[45]

$$\partial x_i^1/\partial r=\partial z^1/\partial w_i,\partial z^1/\partial y=\partial\lambda^1/\partial r,i=1,2,\cdots,n \tag{52a}$$

165

$$\partial x_i^1/\partial w_i\leqq 0,i=1,2,\cdots,n,\partial z^1/\partial r\leqq 0 \tag{52b}$$

以下假定下列对得到 LeS 原则具有关键性的等式成立:[46]

$$x_i^1(w,r,y)\equiv x_i^0[w,y;z^1(w,r,y)],i=1,2,\cdots,n \tag{53a}$$

$$\lambda^1(w,r,y)\equiv\lambda^0[w,y;z^1(w,r,y)] \tag{53b}$$

例如,(53a)说明当长期中 z 的最优值,$z^1(w,r,y)$代入短期需求函数 x_i^0 时,对短期和长期可变要素的需求相同.对(53a)关于 w_i,对(53b)关于 y 微分,得出

$$\partial x_i^1/\partial w_i=\partial x_i^0/\partial w_i+(\partial x_i^0/\partial z)(\partial z^1/\partial w_i),i=1,2,\cdots,n \tag{54a}$$

$$\partial\lambda^1/\partial y=\partial\lambda^0/\partial y+(\partial\lambda^0/\partial z)(\partial z^1/\partial y) \tag{54b}$$

从(52a)回想$\partial z^1/\partial w_i=\partial x_i^1/\partial r$.那么,注意由(53a)$\partial x_i^1/\partial r\equiv(\partial x_i^0/\partial z)\cdot(\partial z^1/\partial r)$,我们可改写(54a)为

$$\partial x_i^1/\partial w_i=\partial x_i^0/\partial w_i+(\partial x_i^0/\partial z)^2(\partial z^1/\partial r),i=1,2,\cdots,n$$

这个方程的右边第二项表示"调整效果".因为由(52b),$(\partial z^1/\partial r)\leqq 0$,那么调整效果是非正的,我们可得出结论

$$\partial x_i^1/\partial w_i\leqq\partial x_i^0/\partial w_i(\leqq 0),i=1,2,\cdots,n \tag{56}$$

(55)把关于自我价格变化的长期投入需求函数和其短期投入需求函数联系起来,这里,调整效果将永远不是正的.同样,回想由(52a)得来的$\partial z^1/\partial y=\partial\lambda^1/\partial r$,那么注意到由(53b),$\partial\lambda^1/\partial r=(\partial\lambda^0/\partial z)(\partial z^1/\partial r)$.我们可改写(54b)为

$$\partial\lambda^1/\partial y=\partial\lambda^0/\partial y+(\partial\lambda^0/\partial z)^2(\partial z^1/\partial r)$$

因为由(52b),$\partial z^1/\partial r\leqq 0$,那么我们得

$$\partial\lambda^1/\partial y\leqq\partial\lambda^0/\partial y \tag{57}$$

在最优解处,我们假定$\partial\lambda^1/\partial y>0$.[47]既然 λ 等于边际成本(MC),那么我们由(56)得下列关系式:

$$0<\partial MC^1/\partial y\leqq\partial MC^0/\partial y \tag{58}$$

与 w_i 的变化对 x_i^0 和 x_i^1 的影响相对应,我们可以得到下面的关系式:

$$\partial MC^1\ \partial y=\partial MC^0\ \partial y+(\text{调整效果})\leqq 0$$

这里,调整效果$=(\partial\lambda^0/\partial z)^2(\partial z^1/\partial r)$,它再次将长期效果与短期效果联系起来.

假定公司是竞争公司,因此它的产出价格 $p>0$ 和要素价格向量 $w>0$ 都由外部给定.那么公司的供给反应由对 y 解 $p=\text{MC}$ 而得到.这推出公司的供给反应是与边际成本产出反应的倒数.也就是说,(57)推出

$$\partial y^1/\partial p\geqq\partial y^0/\partial p \tag{59}$$

如果我们加上前面介绍的 Samuelson 正则条件(Samuelson 1947,68 页),

那么以严格的不等式可得到自身价格效果.换句话说,

$$\partial x_i^0/\partial w_i<0,\partial x_i^1/\partial w_i<0,\partial z^1/\partial r<0,i=1,2,\cdots,n$$

在此情形中,(55),(57)和(58)能分别改写为

$$\partial x_i^1/\partial w_i<\partial x_i^0/\partial w_i<0,i=1,2,\cdots,n \tag{55'}$$

$$0<\partial MC^1/\partial y<\partial MC^0/\partial y \tag{57'}$$

$$\partial y^1/\partial p>\partial y^0/\partial p>0 \tag{58'}$$

关系式(55),(57),(58),(55′),(57′)和(58′)构成了目前问题的 LeS 原则.关系式(55′)说明**长期投入需求函数将比短期的对自我价格变化更敏感.关系式(57′)说明长期边际成本曲线比短期的更平坦.关系式(58′)说明长期供给反应比短期反应大.在弹性方面,(55′)意味着可变投入需求的长期价格弹性比短期的大,并且,(58′)意味着长期供给弹性比它的短期大.**

Hatta(1980 和 1987)借助"收益函数"导出了 LeS 结论.注意到它关于参数达到极值,一阶和二阶必要条件能使他得到关于参数变化对决策变量的影响的 LeS 结论(如$\partial x_i/\partial w_i$).尽管这个方法不错,但它不如我们的办法自然.实际上,它是迂回的并且比我们的方法复杂.同样,从他的方法做到如下结论是可能的,但却不是显而易见的,即我们能得到关于参数变化对于拉格朗日乘数的影响的 LeS 结论,如$(\partial\lambda^1/\partial y)$,(57)和(58).

我们能很容易放宽关于 z 是标量的假定,我们设定 $z\in R^m$.为此,我们定义如下符号:令 $z^s=(z_1,z_2,\cdots,z_s)$,$z_{(s)}=(z_{s+1},\cdots,z_m)$,$r^s=(r_1,\cdots,r_s)$和 $r_{(s)}=(r_{s+1},\cdots,y_m)$.这里 $0\leqq S\leqq m$.显然,$z=(z^s,z_{(s)})$和 $r=(r^s,r_{(s)})$.然后我们考虑以下最小化问题:

$$\underset{x,z^s}{\text{Minimize}}\ w\cdot x+r^s\cdot z^s$$

约束条件为

$$f(x,z)\geqq y,x\geqq 0\text{ 且 }z^s\geqq 0$$

令 $x^s(w,r,y;z_{(s)})$和 $z^s(w,r,y;z_{(s)})$是这个问题的惟一解,并令 $\lambda^s(w,r^s,y;z_{(s)})$是相应的拉格朗日乘数.定义$C^s$为$C^s(w,r^s,y;z_{(s)})\equiv w\cdot x^s(\cdot)+r^s\cdot z^s(\cdot)$,这里 $z_{(s)}$是常数向量.那么,$(C^s+r_{(s)}\cdot z_{(s)})$表示是小总成本.我们可以称该问题为"问题 s",并且将问题"$(s-1)$"与"s"的区别解释为由时间引起.也就是说,在问题 s 中,$(m-s)$个拟固定要素是固定的,而在问题$(s-1)$中,$(m-s+1)$个拟固定要素是固定的,因为时间不足够长以允许第 s 个拟固定要素的调整.不必说,在最小化函数中,x^0,λ^0 和 C^0 分别代表当 $r^s\cdot z^s=0$ 时 x,λ 和 C 的最优值.假定C^s关于(w,r^s,y)二次连续可微.注意,由包络线定理,我们立即得到

168 $$\partial C^s/\partial w_i = x_i^s, \partial C^s/\partial r_k = z_k^s, \partial C^s/\partial y = \lambda^s$$

因为C^s关于(w, r^s)是凹的，它的关于(w, r^s)的海赛矩阵是半负定的，因此我们有

$$\partial z_k^s/\partial w_i = \partial x_i^s/\partial r_k, \partial z_k^s/\partial r_j = \partial z_j^s/\partial r_k \tag{59a}$$

$$\partial z_k^s/\partial y = \partial \lambda^s/\partial r_k$$

$$\partial x_i^s/\partial w_i \leqq 0, \partial z_k^s/\partial r_k \leqq 0 \tag{59b}$$

与(53)对应，对于 $i=1,2,\cdots,n$ 和 $1\leqq s\leqq m$，我们有下列等式：[48]

$$z_i^s[w, r^s, y; z_{(s)}] \equiv x_i^{(s-1)}[w, r^{s-1}, y; z_s(\cdot), z_{(s)}] \tag{60a}$$

$$z_j^s[w, r^s, y; z_{(s)}] \equiv z_j^{s-1}[w, r^{s-1}, y; z_s(\cdot), z_{(s)}] \tag{60b}$$

$$\lambda^s[w, r^s, y; z_{(s)}] \equiv \lambda^{s-1}[w, r^{s-1}, y; z_s(\cdot), z_{(s)}] \tag{60c}$$

这里 $z_s(\cdot) \equiv z_s^s[w, r^s, y; z_{(s)}]$. 对(60a)关于 w_i 微分，对(60b)关于 r_j 微分，对(60c)关于 y 微分，我们得：对 $i=1,2,\cdots,n$ 和 $1\leqq s_i\leqq m$，

$$\partial x_i^s/\partial w_i = \partial x_i^{s-1}/\partial z_s + (\partial x_i^{s-1}/\partial z_s)(\partial z_s^s/\partial w_i) \tag{61a}$$

$$\partial z_j^s/\partial r_j = \partial z_j^{s-1}/\partial r_j + (\partial z_j^{s-1}/\partial z_s)(\partial z_s^s/\partial r_j) \tag{61b}$$

$$\partial \lambda^s/\partial y = \partial \lambda^{s-1}/\partial y + (\partial \lambda^{s-1}/\partial z_s)(\partial z_s^s/\partial y) \tag{61c}$$

同样，利用(59a)，(60a)，(60b)和(60c)，我们得到，对 $1\leqq s_j\leqq m$，

$$\partial z_s^s/\partial w_i = \partial x_i^s/\partial r_s = (\partial x_i^{s-1}/\partial z_s)(\partial z_s^s/\partial r^s), i=1,2,\cdots,n$$

$$\partial z_s^s/\partial r_j = \partial z_j^s/\partial r = (\partial z_j^{s-1}/\partial z_s)(\partial z_s^s/\partial r_s), j=1,2,\cdots,s-1$$

169 $$\partial z_s^s/\partial y = \partial \lambda_i^s/\partial r_s = (\partial \lambda^{s-1}/\partial z_s)(\partial z_s^s/\partial r_s)$$

将此与(61)结合，我们得到：对 $1\leqq s\leqq m$

$$\partial x_i^s/\partial w_i = \partial x_i^{s-1}/\partial w_i + (\partial x_i^{s-1}/\partial z_s)^2(\partial z_s^s/\partial r_s), i=1,2,\cdots,n$$

$$\partial z_j^s/\partial r_j = \partial z_j^{s-1}/\partial r_j + (\partial z_j^{s-1}/\partial z_s)^2(\partial z_s^s/\partial r_s), j=1,2,\cdots,s-1$$

$$\partial \lambda^s/\partial y = \partial \lambda^{s-1}/\partial y + (\partial \lambda^{s-1}/\partial z_s)^2(\partial z_s^s/\partial r_s)$$

因为$\partial z_s^s/\partial r_s \leqq 0$，由此我们得到下面的关系式：

$$0 \geqq \partial x_i^0/\partial w_i \geqq \partial x_i^1/\partial w_i \geqq \cdots \geqq \partial x_i^m/\partial w_i, i=1,2,\cdots,n \tag{62a}$$

$$0 \geqq \partial z_j^{s-1}/\partial r_j \geqq \partial z_j^s/\partial r_j, j=1,2,\cdots,s-1, 1<s\leqq m \tag{62b}$$

$$\partial \lambda^0/\partial y \leqq \partial \lambda^1/\partial y \leqq \cdots \leqq \partial \lambda^m/\partial y > 0 \tag{62c}$$

又，假设公司是一个竞争公司，因此它的产出价格和要素价格向量都由外部给定. 既然公司的供给反应是边际成本的倒数，(62c)推出

$$0<\partial y^0/\partial p\leqq\partial y^1/\partial p\leqq\cdots\leqq\partial y^m/\partial p \tag{63}$$

再假定 Samuelson 正则条件.那么我们有,对 $s=0,1,2,\cdots,m$,

$$\partial x_i^s/\partial w_i<0,i=1,2,\cdots,n$$

$$\partial z_k^s/\partial r_k<0,k=1,2,\cdots,s \tag{59′b}$$

那么(62)和(63)可被加强为

$$0>\partial x_i^0/\partial w_i>\partial x_i^1/\partial w_i>\cdots>\partial x_i^m/\partial w_i,i=1,2,\cdots,n \tag{62′a}$$

170

$$0>\partial z_j^{s-1}/\partial r_j>\partial z_j^s/\partial r_j,j=1,2,\cdots,s-1,1<s\leqq m \tag{62′b}$$

$$\partial MC^0/\partial y>\partial MC^1/\partial y>\cdots>\partial MC^m/\partial y>0 \tag{62′c}$$

$$0<\partial y^*/\partial p<\partial y^1/\partial p<\cdots<\partial y^m/\partial p \tag{63′}$$

(62′a)和(62′c)以及(63′)的经济解释可以与(55′),(57′)和(58′)类似的方式分别得到,而(62′b)意味着拟固定要素的"长期"需求对自身价格变化的反应将比其短期需求更敏感.[49]明显地,(62′)和(63′)构成了采取(55′),(57′)和(58′)的形式的 LeS 原则的一般化.

上面得到 LeS 原则结论的方法也能应用到消费理论中.为此,令 $u(x)$是居民的效用函数.这里 $x=(x_1,\cdots,x_n)$是他(或她)的消费束.令 $p=(p_1,\cdots,p_n)$是价格向量,令 $p^s=(p_1,\cdots,p_s)$和 $p_{(s)}=(p_{s+1},\cdots,p_n)$.类似地,用 $x=(x^s,x_{(s)})$划分 x,这里 $x^s=(x_1,\cdots,x_s),x_{(s)}=(x_{s+1},\cdots,x_n)$.则我们考虑选择 x^s,使

$$\text{Minimize } p^s\cdot x^s$$

约束条件为

$$u(x)\geqq u \text{ 且 } x^s\geqq 0$$

这里 $x_{(s)}$是固定向量.在定量配给理论中,这是"点配给"的一种形式,其中 $x_{(s)}$是配给商品向量.[50]还有其他 $x_{(s)}$是固定的例子.如 Pollak(1969,63 页)所写:

"消费者,如同公司,有在短期中固定的承诺行为,例如,一个人签订了租赁合同来租 12 个月的公寓,则他在任何一月的住房服务消费是固定的……"

171

令 $x^s(p^s,u;x_{(s)})>0$ 是上述问题的惟一解,令 $\lambda^s(p^s,u;x_{(s)})$是与之联系的拉格朗日乘数.注意,考虑符号的改变,$r\to p$ 和 $z\to x$,这个问题形式上与前面讨论的成本最小化问题完全相同.那么立即得到与(62)和(63)相对应的结果.特别地,从(62b),我们得到

$$0\geqq\partial x_i^{s-1}/\partial p_i\geqq\partial x_i^s/\partial p_i,i=1,2,\cdots,s-1,1<s\leqq n \tag{64}$$

那么这就推广了(64),由 Pollak(1969)得到的 LeS 结论,这里他假定 $s=n$.在 Samuelson 正则条件下,(64)被加强为

$$0>\partial x_i^{n-1}/\partial p_i>\partial x^s/\partial p_i, i=1,2,\cdots,s-1, 1<s\leqq n \tag{64'}$$

特别地，如果像 Pollak(1969)中一样，$s=n$，我们得到

$$0>\partial x_i^{n-1}/\partial p_i>\partial x_i^n/\partial p_i, i=1,2,\cdots,n-1 \tag{64''}$$

因此，如果第 n 种商品被配给，那么有定量配给时对商品 i 的(补偿)需求的自身价格弹性低于没有定量配给的情况.

现在我们易得到包括了上述关于生产和消费理论的一般表述的 Le Châtelier－Samuelson 结论.[51]对这样的讨论，见 Anderson－Takayama(1991).

▶ 练习题

(1)概括包络线定理的证明并且举出三个经济应用.

(2)考虑通常的消费者选择问题，选择 x，使

$$\text{Maximize } u(x)$$

约束条件为

$$p\cdot x\leqq Y \text{ 且 } x\geqq 0$$

令 $x=x(p,Y)$是由效用最大化假设得到的消费者需求函数.令 $U(p,Y)\equiv u[x(p,Y)]$是他或她的间接效用函数.假设已知函数 U 采用如下的
172 Houthakker 介绍的“和对数形式”：

$$U(p,Y)=\sum_{i=1}^{n}c_i(p_i/Y)^{-\alpha_i}$$

这里 $\beta\equiv c_i\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$是正的常数.

(i) 回想 Roy 恒等式

$$(\partial U/\partial p_i)/(\partial U/\partial Y)=-x_i, i=1,2,\cdots,n$$

证明他或她的需求函数可得到为

$$x_i(p,Y)=[\beta_i(p_i/Y)^{\gamma_i}]/[\sum_{i=1}^{n}\beta_i(p_i/Y)^{-\alpha_i}]$$

这里 $\gamma_i\equiv-(1+\alpha_i)$.

(ii) 令 $v_i\equiv p_i/Y(i=1,2,\cdots,n)$，间接效用函数写作

$$U(p,Y)=\phi(v)\equiv\phi(v_1,v_2,\cdots,v_n)$$

这里我们可回想 $U(p,Y)$在 p 和 Y 处是零次齐次的.定义 $\psi(v)\equiv 1/\phi(v)$，证明 Roy 恒等式可写作

$$x_i = \phi_i / [\sum_{i=1}^{n} \phi_i v_i], i = 1, 2, \cdots, n$$

这里 $\phi_i = \partial \phi / \partial v_i$，即 $x = \phi' / (\phi' \cdot v)$.

注：Houthakker 的和对数间接效用函数在 Houthakker(1960)中可找到. 近来，已有大量的关于消费者需求的实证性研究. 这些研究与通过指定间接效用
178 函数和利用 Roy 恒等式来导出需求函数有关. 该题目的参考见 Berndt - Darrough - Diewert(1977)和 Christensen - Jorgenson - Lau(1975)中引用的论文. 这两篇论文提倡"超对数的对反效用函数"，它指定了问题(2)中函数 $\psi(v)$ 为

$$\psi(v) = \alpha_0 + \sum_i \alpha_i \log v_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \beta_{ij} \log v_i \log v_j$$

作为进一步的练习，你可以从这一间接效用函数的限定中导出需求函数 $x(p, Y)$. 这个问题的答案可在 Berndt - Darrough - Diewert (1977) 和 Christensen - Jorgenson - Lau(1975)中找到.

参考文献

Berndt, E. R., M. N. Darrough, and W. E. Diewert. 1977. "Flexible Functional Forms and Expenditure Distribution: An Application to Canadian Consumer Demand Functions." *International Economic Review* 18, October: 651 - 675.

Christensen, L. R., D. W. Jorgenson, and L. J. Lau. 1975. "Transcendental Logarithmic Utility Functions." *American Economic Review* 65, June: 367 - 383.

Houthakker, H. S. 1960. "Additive Preferences." *Econometrica* 28, April: 244 - 257.

(3)考虑通常的成本最小化问题，选择 x，使得

Minimize $w \cdot x$

约束条件为

$f(x) \geqq 0$ 且 $x \geqq 0$

其中 $f(x)$表示生产函数，y 是表示产出的目标水平的正标量. 令 $x(w, y)$是公司的最优投入向量，$C(w, y) = w \cdot x(w, y)$是它的(总)最小成本函数. 假定公司使用两种要素：即 $x = (x_1, x_2)$. 令 $w = (w_1, w_2)$是它的价格向量. 假设成本函数在计量经济学上估计为

$$C(w, y) = w_1^{\alpha} w_2^{1-\alpha} y^{\beta}, 0 < \alpha < 1, \beta > 0 \tag{1}$$

其中 α 和 β 是估计的常数.

(i) 回想 Shephard 引理，证明公司的生产函数可得到为

$$f(x) = (A x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha})^{1/\beta}, \text{这里 } A \equiv \alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{\alpha-1}$$

174

提示：为简化计算，对 Shephard 引理的计算表达式取对数，然后从两个方程中消去 $w \equiv w_1/w_2$.

(ii) 设 $\beta=1$. 注意到对上面的成本函数(1)成立的 Shephard－Samuelson 定理，即

$$\partial C/\partial y = C/y = \lambda(w,y), \text{且} \partial\lambda/\partial y = 0$$

这里，我们回想一下由包络线定理得到的 $\partial C/\partial y=\lambda$.

(4) 考虑消费两种商品(1 和 2)的一个居民，并且他的效用函数给定为

$$u(x_1,x_2)=\alpha\log x_1+\beta\log x_2 \tag{2}$$

其中 α 和 β 是正的常数. 该人选择 (x_1,x_2) 在他的预算约束 $p_1x_1+p_2x_2\leqq Y$ 和非负约束 $x_1\geqq 0, x_2\geqq 0$ 下使 u 最大，其中 p_i 为第 i 种($i=1,2$)商品的价格，Y＝收入，这里 p_1,p_2 和 Y 是正的常数. 明显地，U 定义在 R^2 的非负域的内部，即在 $X\equiv\{x\in R^2: x_i\geqq 0, i=1,2\}$ 上.

(i) 证明函数 U 是严格凹的.

提示：证明海赛矩阵 u'' 是负定的.

(ii) 省略(*)来表示最优解，写出我们的问题的一阶条件(FOC)，这里我们注意到在最优解处 $x_1>0$ 且 $x_2>0$. 你不必证明 $x_1,x_2>0$(因为这是显然的). 但是一定要证明在最优解处 $\lambda>0$(尽管这也是显然的).

(iii) 证明上面得到的(FOC)对于全局最大值是充分必要的.

提示：回想 Arrow－Hurwicz－Uzawa 和 Arrow－Enthoven 定理.

(iv) 证明上面问题的解为

175

$$x_1(p,Y)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{Y}{p_1} \tag{3a}$$

$$x_2(p,Y)=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{Y}{p_2} \tag{3b}$$

$$\lambda(p,Y)=\frac{\alpha+\beta}{Y} \tag{3c}$$

注：因此，如果效用函数由(2)给定，我们有

$$\partial x_1/\partial p_2=\partial x_2/\partial p_1=\partial\lambda/\partial p_1=\partial\lambda/\partial p_2=0$$

(v) Hicks－Slutsky 方程写作

$$\partial x_i/\partial p_j=S_{ij}-x_j\partial x_i/\partial Y$$

令 $S\equiv[s_{ij}]$ 是该问题的净替代矩阵.

(a) 利用 Hicks－Slutsky 方程计算 S_{ij} 的表达式，$i,j=1,2$(依据 p_1,p_2 和 Y).

注：这提供了一个由观测的数据得到 S_{ij} 的方法.

(b) 证明 S 是对称的($S_{12}=S_{21}$)，且 $S_{11}<0, S_{22}<0$. 利用半负定矩阵的定义，同样证明 S 是半负定的.

提示:为证明 S 是半负定的,证明下面矩阵 A 是半负定就足以证明该命题.

$$A=\begin{bmatrix}-1/p_1^2 & 1/p_1p_2\\ 1/p_1p_2 & -1/p_2^2\end{bmatrix}$$

(c) 证明

$$\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12}\\ S_{21} & S_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1\\ p_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

(d) 间接效用函数被定义为 $U(p,Y)=u[x(p,Y)]$. 证明目前问题的 $U(p,Y)$可写作:

$$U(p,Y)=A+\alpha\log\frac{Y}{p_1}+\beta\log\frac{Y}{p_2} \tag{4}$$

这里

$$A\equiv\alpha\log\frac{\alpha}{\alpha+\beta}+\beta\log\frac{\beta}{\alpha+\beta}$$

(vi) 利用(4)和(3),证明

$$\partial U/\partial Y=\lambda,\partial U/\partial p_i=-\lambda x_i,i=1,2 \tag{5}$$

注:(5)式证实了消费者选择理论文章中的包络线关系式.(5)式明显地推出 Roy 恒等式

$$\partial U/\partial p_i+x_i\partial U/\partial Y=0,i=1,2$$

(5)考虑下面通常的成本最小化问题:

$$\underset{x}{\text{Minimize}}\ w\cdot x$$

约束条件为

$$f(x)\geqq y,x\geqq 0,x\in R^n$$

这里,$w>0$ 是给定的要素价格向量,$y>0$ 是产出的目标水平,$f(x)$是一给定公司的生产函数.我们假定 $f(x)$是连续可导的,且对所有 x,$f_i(x)\equiv\partial f(x)/\partial x_i>0,i=1,2,\cdots,n$.假定下面的条件对最优解是充分必要的:

$$w_i=\lambda f_i(x),i=1,2,\cdots,n,f(x)=y$$

这些条件最终决定了 $n+1$ 个值,$x_i(w,y),i=1,2,\cdots,n$ 和 $\lambda(w,y)$.函数 $x(w,y)$和 $\lambda(w,y)$被假定是连续可微的.设 $C(w,y)\equiv w\cdot x(w,y)$是最小成本函数.我们假定它是二阶连续可微的.

(i) 证明如果 $f(x)$关于 ϕ 是齐次的,那么 $C(w,y)$可用"可分"的形式写作

$$C(w,y)=h(w)\phi(y) \tag{6}$$

177 (ii) (6)的逆命题也成立.利用它,证明如果 $\lambda(w,y)=h(w)\phi'(y)$,那么 $f(x)$关于 ϕ 是位似的.这里为了简单起见,我们假定 $C(w,0)=0$ 且 $\phi(0)=0$.

(iii) 证明如果 $f(x)$是位似的,那么任何一对要素的 MRS(边际替代率)与 y 独立:即,证明如果 $f(x)$是位似的,那么对所有 i 和 j,$x_i(w,y)/x_j(w,y)$独立于 y.

提示:

(a) 为证明(6)式,只需证明$\partial(C/\phi)\partial y=0$,或$(\partial C/\partial y)-C\phi'/\phi=0$(为什么?).既然$\partial C/\partial y=\lambda$,那么只需证明 $C\phi'/\phi=\lambda$.为此,简单地观察下列关系在最优解处成立:

$$C=\sum w_i x_i=(\lambda/\phi')\sum g_i x_i=\lambda\phi/\phi'$$

这里 $g_i\equiv\partial g/\partial x_i$.

(b) (ii)的"仅当"部分立即由(i)可得.(ii)的"当"部分可重述为$\partial C/\partial y=h(w)\phi'(y)$推出 $C=h(w)\phi(y)$.(为什么?),然后固定 w,从 0 到 y,关于 z 积分$\partial C(w,z)=h(w)\phi'(z)$得到 $C(w,y)=h(w)\phi(y)$.也有其他的证明.

(c) 你需要证明如果 $f(x)$是位似的,那么$\partial(x_i/x_j)/\partial y=0$.为此,回想 $C=h\phi$,当且仅当 f 是位似的,并且利用 Shephard 引理.

注:

(a) 由证明,显然(i)的逆命题也成立.

(b) 由(i)的逆命题,(ii)的逆命题也立即成立.

(c) 命题(iii)说明如果函数 f 是位似的,那么每个扩展路径(EP)是由原点开始的射线.正如本文中所讨论的,这个命题的逆命题也为真.

178 (6)考虑成本最小化问题,选择 $x=(x_1,x_2)$,使

Minimize $w\cdot x$

约束条件为

$$f(x)\geqq y,x\geqq 0$$

令 $x_i>0(i=1,2)$是它的解,且假定在最优点 $f(x)=y$.(最小)总成本函数定义为 $C(w,y)\equiv w\cdot x(w,y)$.要素替代的(Allen 偏)弹性可定义为

$$\sigma_{ij}=\frac{w_j x_{ij}}{x_i\theta_j},\text{这里 } x_{ij}\equiv\frac{\partial x_i}{\partial w_j},\text{且 } \theta_j\equiv\frac{w_j x_j}{c},i,j=1,2 \tag{7}$$

如果生产函数是位似的,我们有

$$x_i(w,y)=h_i(w)\phi(y) \tag{8}$$

(i) 证明当生产函数是位似的时，下列关系式成立，这里 $z\equiv x_1/x_2$.

$$\frac{dz}{z}=\frac{1}{x_1}(x_{11}dw_1+x_{12}dw_2)-\frac{1}{x_2}(x_{21}dw_1+x_{22}dw_2) \tag{9}$$

提示：利用 $\hat{z}=\hat{x}_1-\hat{x}_2$，这里 $\hat{z}\equiv dz/z$，等等.

(ii) 证明(9)可被写作

$$\hat{z}=-\sigma\hat{w}，这里\ w\equiv w_1/w_2\ 且\ \sigma_{12}=\sigma_{21}\equiv\sigma \tag{10}$$

提示：回想一下，由 $x(w,y)$ 在 w 处的齐次性，并且利用(7)，我们有

$$x_{i1}w_1+x_{i2}w_2=0,i=1,2$$

179 同样，记 $\hat{w}=\hat{w}_1-\hat{w}_2$，并且证明 $\theta_1+\theta_2=1$.

注：方程(10)是两要素模型中著名的关系式.

(7) 令成本函数 $C(w,y)$ 由下列超对数形式指定：

$$\log C(w,y)=a_0+\sum_{i=1}^{n}a_i\log w_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\log w_i\log w_j+\sum_{i=1}^{n}b_i\log w_i\log y+c_1\log y+\frac{1}{2}c_2(\log y)^2 \tag{11}$$

这里，对所有的 i 和 j，

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=1,\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=0,\sum_{i=1}^{n}b_i=0,a_{ij}=a_{ji} \tag{12}$$

(i) 令 $\theta_i\equiv w_ix_i/C(w,y)$(第 i 个成本所占份额)．那么由(11)得下面关系式：

$$\theta_i=a_i+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\log w_j+b_i\log y \tag{13}$$

(ii) 证明下面的关系式：

$$对\ i\neq j,\sigma_{ij}=(a_{ij}+\theta_i\theta_j)/\theta_i\theta_j \tag{14a}$$

$$对\ i=j,\sigma_{ii}=(a_{ii}-\theta_i+\theta_i^2)/\theta_i^2 \tag{14b}$$

提示：

(a) 为解答(i),令 $z_i \equiv \log w_i$, $u \equiv \log y$. 那么 $C(w,y)$可重写为 $C(e^{z_1},\cdots,e^{z_n},e^u) \equiv C^*(z,u)$,且(11)可重写为

$$\log C^*(z,u) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i z_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_i z_j + \sum_{i=1}^{n} b_i z_i u + c_1 u + \frac{1}{2} c_2 u^2 \quad (11')$$

其中

180

$$C^*(z,u) = C(e^{z_1},\cdots,e^{z_n},e^u)$$
$$= C(w_1,w_2,\cdots,w_n,y)$$

这里我们注意 $dz_i = dw_i/w_i$,因此 $dw_i/dz_i = w_i$. 那么对于左边,我们可以观察到

$$\frac{\partial \log C^*}{\partial z_i} = \frac{1}{C^*}\frac{\partial C^*}{\partial z_i} = \frac{1}{C}\frac{\partial C^*}{\partial z_i}$$

$$= \frac{1}{C}\frac{dw_i}{dz_i}\frac{\partial C}{\partial w_i} = \frac{1}{C} w_i \frac{\partial C}{\partial w_i} = \theta_i$$

这里我们可回想一下 Shepherd 引理. 对于等式右边,首先注意$\partial(a\cdot z)/\partial z_i = a_i$,然后回想一下二次型的微分公式. 也就是,写二次型为

$$Q(z) = z'Az \equiv \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_i z_j$$

我们有

$$\partial Q/\partial z_i = 2\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j$$

(b) 为解答(ii),由(11)注意到

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 \log C(w,y)}{\partial \log w_i \partial \log w_j} = \frac{1}{\partial \log w_j}\frac{\mathrm{dw_j}}{\mathrm{d}log\mathrm{w_i}}\frac{\partial \log C}{\partial w_i}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \log w_i}\left(\frac{w_i}{C}\frac{\partial C}{\partial w_i}\right) = \frac{dw_j}{d\log w_j}\frac{\partial}{\partial w_j}\left(\frac{w_i}{C}\frac{dC}{dw_i}\right)$$

然后回想 Shephard 引理和

$$\sigma_{ij} \equiv \frac{1}{\theta_j}\frac{\partial x_i}{\partial w_j}\frac{w_j}{x_i}$$

注:公式(13)可在约束(12)下通过利用 Zellner 的表面上不相关的回归方

181 法来估计 a_{ij}的值. 这样估计出的 a_{ij}可通过利用(14)来计算要素替代的 Allen 偏弹性 σ_{ij}.

注:如果 $f(x)$是位似的,那么可证明对所有的 i, $b_i = 0$. 进而,如果 $f(x)$是一次齐次的,那么 $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ 以及对所有的 i, $b_i = 0$. (同样,自己试着证明这些命题. 这是很显然的.)

▶ 注　释

[1]这里的讨论摘自 Takayama(1985,159～168 页).尽管尽了最大的努力使比较静态学的 Hicks－Samuelson 理论的讲解容易些,它仍然是固有的冗长.那么读者可以考虑跳过本节讨论的大部分.

[2]通过采用离散时间公式(与连续时间公式相对),许多动态问题可以利用第二章所描述的一般非线性规划技巧来分析.对于总量新古典经济的最优增长问题的离散时间公式的阐述见 Takayama(1985,458～485 页,1977,33～35 页).

[3]Paul Samuelson 是 1970 年经济学诺贝尔奖得主.John Hicks 爵士在 1972 年获此殊荣.

[4]这来自下面的事实,如果 A 是半负定的且非奇异的,那么 A 是负定的.

[5]一般地,关于矩阵代数学我们有如下定理,它可以称作 **Carathéodory-Samuelson 定理**.令 H 是任何一个 $(m+n)\times(m+n)$ 实对称矩阵.假定 H 以 H^* 的形式被分解.另外假定 B 的秩 $=m$,在 $Bh=0$ 的条件下 A 是负定的.那么 H^{-1} 存在并且 H^{-1} 的 K_4[这里 H^{-1} 被分解为(11)]是对称的、半负定的.见 Carathéodory(1967,195～196 页)和 Samuelson(1947,378～379 页).因此,到目前为止所做的一部分断言(如 H 的非奇异和 K_4 的半负定)也可以作为 Carethéodory-Samuelson 定理的直接应用而得到.注意,B 的秩 $=m$ 的条件与古典最优化的秩条件(R)相对应,而等式(6)与局部最大值的二阶充分条件(SOSC)相对应,这里我们可以回想第二章中对条件(R)和(SOSC)的讨论.在文献中,(R)和(SOSC)时常直接地在最优化过程中被假定.这样一个直接的假定能使研究者利用 Carathéodory－Samuelson 定理,由此定理,可以得到加边海赛矩阵的非奇异性和 K_4 的半负定性.

[6]结论 $F_\alpha=\Phi_\alpha$ 来自 Afriat(1971,355～357 页).这个定理的基本思想在 Samuelson(1947)中找到.现在的公式也是在 Takayama(1985,137～153 页)中找到的.

[7]这里乘号被用来使与简单数乘相对的矩阵乘法的性质更清楚.例如,$\Phi_x,\Phi_\alpha,\Phi_\lambda,\Phi_\alpha$ 和 Φ_α 分别是 $1\times n$ 向量,$n\times l$ 矩阵,$1\times m$ 向量,$m\times l$ 矩阵,$1\times l$ 向量,这样乘法运算 $\Phi_x\cdot\Phi_\alpha$ 和 $\Phi_\lambda\cdot\Phi_\alpha$ 就被很好地定义下来,并且它的意思应是很清楚的.

[8]我们通过预先假定生产函数 $f(x)$ 和援引包络线定理得到 $x_i=\partial C/\partial w_i$.这不同于 Shephard 和 McKenzie 采用的方法,他们直接从函数 C 入手.我们将在这一节的后面讨论这点.

[9]前面讨论的成本最小化问题假设 Y 是矢量.它易扩展到 y 是向量的联合产出情形.对此情形的生产函数约束写为 $g(x,y)\geqq 0$(同现在利润最大

化问题中的一样),成本最小化问题可以表述为:在 $g(x,y)\geqq 0$ 且 $x\geqq 0$ 的约束下,选择 $x\in R^n$ 使 $w\cdot x$ 最小,这里 $w>0$ 和 $y>0(y\in R^m)$是给定的向量.记这个问题的解为 $x(w,y)$,定义 $C(w,y)\equiv w\cdot x(w,y)$.那么由包络线定理的应用易得出

$$\partial C/\partial w_i = x_i, i=1,2,\cdots,n$$
$$\partial C/\partial y_j = \partial g/\partial y_j, j=1,2,\cdots,m$$

这里第一个关系式与前面得到的单一产品情形的 Shephard 引理相一致.既然最优点处 $\lambda>0$,由第二个关系式,我们立刻可以得到下面的结论:

$$\frac{\partial C/\partial y_i}{\partial C/\partial y_j}=\frac{\partial g/\partial y_i}{\partial g/\partial y_j}, i,j=1,2,\cdots,m$$

见 Hall(1973)和 Takayama(1977,22 页).

[10]尽管有"正则条件"的其他限定,但生产函数 $f(x)$的这样一个限定是:它是连续的,单调递增的且拟凹的,$f(0)=0$.见 Diewert(1982,537～566 页).

[11]此文中,我们也可以注意到 McKenzie(1957)在他的消费者选择的讨论中,类似地没用假定效用函数而从"最小支出函数"(与成本函数对应)开始,得到了与 Shephard 引理一致的关系式,他通过它推导出了 Hicks－Slutsky 替代矩阵的所有基本性质.

[12]进一步,对偶关系式一侧的信息能够暗示另一侧的信息.例如,Saijo(1983)证明,在生产函数严格单调的假设下,成本函数的可微性等价于生产函数的严格拟凹性,即"可微性的假设决定了生产结构"(Saijo 1983,135 页).尽管在我们沉迷于可微性问题之前,明显有许多有趣且重要的经济问题需要我们去分析,理解它的含义却是重要的.

[13]距离函数的用处已被 R. Färe 和其他人探究过.近来,对于 Shephard 对偶理论的简明讨论见 Färe 和 Primont(1990).也见 Afriat(1980).

[14]这里的证明方法来自 McKenzie(1957).

[15]为说明这一点,令 $N\equiv\{z:Sz=0\}$,即 N 是 S 的零空间.因为 $Sw=0$,对所有与 w 不成比例的 z,有 $z'Sz<0$,$N=\{z:z=tw,t\in R\}$,则 N 的秩等于 1.那么由矩阵代数中关于零空间的秩的一个著名定理,S 的秩是 $n-1$.见附录 A 的(25).由于齐次性质(正如前面所看到的)要求 $Sw=0$.所以对于 z 值的约束是必要的.

[16]取 y 为水平轴,这意味着平均成本曲线和边际曲线一致,并且这一曲线是平行于水平轴的直线.规模收益不变的生产函数的结论将与中级价格理论教科书中成本曲线的通常讲解形成对照,在那里,平均成本曲线是 U 形的,边际成本曲线穿过它的最小值并在该点上升.

[17]通过画传统的无差异曲线和预算线的二维图有助于对(31)的理解.尽管(31)可能因此是直观明显的,但它需要一个经常在课本讲解中被忽略的证明.为证明 $Y=E(p,U)$,首先观察对所有使 $u(x)\geqq U$ 的 x,$E(p,U)\leqq$

$p \cdot x$(由 EM 的定义).令 $x = x(p, Y)$,那么我们有 $E(p, U) \leqq p \cdot x(p, Y) = Y$.现在假设 $E(p, U) < Y$,或者 $p \cdot x^* < Y$,这里 $x^* = x^*(p, U)$.那么存在一个 x^1,使 $p \cdot x^* < p \cdot x^1 < Y$,且 $x^1 \geqq x^*$.假定 u 单调,那么 $u(x^1) > u(x^*) = U$.但是既然 $U = u[x(p, Y)]$,则 $u(x^1) > u[x(p, Y)]$.这样 x^1 比 $x(p, y)$达到更高的效用,而它在收入 Y 处是可负担的.这与 $x(p, Y)$是收入 Y 的最大效用点矛盾.因此 $E(p, U) < Y$ 是不可能的,这最终表明 $E(p, U) = Y$.

[18]实质上,这里的证明仿效 McKenzie(1957),它被 Karlin(1959,271～273 页),Takayama(1977,1985,142～143 页),Varian(1984,130～131 页),Okuno Suzumura (1985,196～197 页)和 Silberberg(1990,329～332 页)所重复.方程(33)经常被作为 Slutsky 方程.然而这个特殊的形式是由 Hicks(1939,1946)得到的,它略微不同于 Slutsky(1915)的形式.对于 Slutsky 和 Hicks 之间在净替代项上涉及的补偿概念的区别的讨论,见 Silberberg(1990,351～353 页).把 $\partial x_i / \partial p_j$ 分解成替代效应和收入效应应归功于 Slutsky(1915,1952).它被 Hicks 和 Allen(1934)重新发现.Hicks 的《价值与资本》(1939,1946)包括(33)和相关论题的经典讨论,它进而又对许多重要研究起了促进作用.

[19]对预算条件 $p_1 x_1(p, Y) + p_2 x_2(p, Y) + \cdots + p_n x_n(p, Y) = Y$ 关于 Y 求偏微分,我们得到

$$p_1 \partial x_1 / \partial Y + p_2 \partial x_2 / \partial Y + \cdots + p_n \partial x_n / \partial Y = 1$$

这样,不可能所有的商品都是劣等商品.

[20]吉芬悖论是由 Marshall 在他的"原理"第三版(1895)中首先指出的,其中他赞扬了 Robert Giffen 爵士.然而,Stigler(1947)和 1963)断言,包括 Giffen 在内,没有人曾发现 Giffen 商品的任何例子.近来,Negishi(1989,45～46 页)提出了下面的阐述 Giffen 商品不寻常特性的论点.如果一些商品是大量的,每一商品在个人预算中的消费份额很小,那么每一种商品的收入效应也小.另一方面,替代效应的值不必随商品数量的增长(或商品的分类变得更精细)而变小.实际上后者随商品数量增加而增加.例如,Java 和 Columbia 咖啡之间的替代性将比咖啡和茶叶之间的替代性更大.顺便提一句,可以认为长途汽车不是一个劣等品的情况,面只是对某些人来说是个时间太昂贵的问题(要求用此种方式来旅游的时间).

[21]另外,如果 $f(x)$可以被表示为函数 $g(x)$的连续单调递增的变换 ϕ,其中 $g(x)$是一次齐次的,则 $f(x)$被称为是**位似**的,即 $f(x) = \phi[g(x)]$,其中 $g(x)$是一次齐次的(Shephard,1953,41 页).不必说,位似的这两个定义是同一的.

[22]为证明(34),说明 $\partial(C/\varphi)/\partial y = 0$,或 $(\partial C/\partial y) - C\varphi'/\varphi - 0$ 就足够了.既然由(22)$\partial C/\partial y = \lambda$,那么说明 $C'\varphi/\varphi = \lambda$ 就足够了.为此,简单地考虑下列关系式在最优点处成立

$$C = \sum w_i x_i = \sum \lambda f_i x_i = \sum \lambda (g_i/\varphi') x_i = (\lambda/\varphi') \sum g_i x_i$$

$$= \lambda g(x)/\varphi' = \lambda\varphi[f(x)]/\varphi'.$$

这里 $f_i \equiv \partial f/\partial x_i$ 且 $g_i \equiv \partial g/\partial x_i$

[23]Ide 和 Takayama(1989b)同时得到"当"和"仅当".既然他们的证明短小,这里可以复写一下.定义由给定的 $w>0$ 决定的扩展路径为

$$S(w) \equiv \{x>0: f_i(x)/f_j(x) = w_i/w_j, i,j=1,2,\cdots n, i\neq j\}$$

只要 w 固定,它也固定.我们通过说明下面两个命题对任何随意固定的 $w>0$ 是等价的来证明命题(iii):

(A)EP 是发自原点的射线,即 $\bar{x}\in S(w)$ 推出对所有的 $k>0, k\bar{x}\in S(w)$.

(B)最小成本函数是"可分的",对 $y>0, C(w,y)=h(w)\varphi(y)$.

我们首先说明命题(A)推出命题(B).令 $y\equiv f(k\bar{x})$.由 f 的严格单调性和连续性,我们可解得对 k,当 $\bar{x}$ 固定时,$k=k(y,\bar{x})\equiv\varphi(y)$.由命题(A),$\bar{x}\in S(w)$且对所有的 $k>0, k\bar{x}\in S(w)$.因此我们可以观察到 $C(w,y)\equiv w\cdot\varphi(y)\bar{x}=\varphi(y)w\cdot x[w,f(\bar{x})]=\varphi(y)h(w)$,这里 $h(w)\equiv w\cdot x[w,f(\bar{x})]$,这证实了命题(B).

为了说明逆命题,假定命题(B),$C(w,y)=h(w)\phi(y)$.由 f 的严格单调性和连续性,从而得出 ϕ 的这些性质,我们可选择 $\bar{y}$,使 $\phi(\bar{y})=1$.相应地,对这样一个 $\bar{y}$,我们可选择 $\bar{x}\in S(w)$ 使 $w\cdot\bar{x}=h(w)$.乘以 $\phi(y)$,我们得到 $C(w,y)=\phi(y)h(w)=\phi(y)(w\cdot\bar{x})=w\cdot\phi(y)\bar{x}$.因此 $\phi(y)\bar{x}\in S(w)$.这证明了命题(A).这样(A)和(B)等价.既然 W 的选择是任意的,(A)和(B)的等价性对任意 $w>0$ 都成立.因此,定理 3.4 的命题(iii)的证明完毕.

[24]Chao 和 Takayama(1991)的实证性过程强调了可变要素和半固定要素(或固定要素)之间的区别,它最终把"短期"和"长期"之间的马歇尔区别包括在实证分析中.关于这个题目的一些研究预先假定了位似性,在 Chao 和 Takayama(1991)中,这样的假设在短期和长期中都被避免,因为他们旨在导出用以得到规模收益和要素替代弹性估计的实证性过程.他们的研究试图与 Brown 和 Christensen(1981)以及 Morrison,Berndt(1981),Morrison(1986)的相关研究有所分别.

[25]替代弹性的概念首先是由 Hicks(1932)对于两要素情况而发展的.当 $n\geqslant 3$ 时,可以有其他替换概念.这些替换概念是重要的.现在的概念是沿着 Allen 的著作(1938)的思路.

[26]Cobb－Douglas 函数对所有 i 和 j,限制 $\sigma_{ij}=1$.两种要素情形的 CES 函数假定关系 ES 是恒定的,而对这样的约束没有明显的技术上的正当理由.把 CES 函数扩展到两个要素以上的情况要求,"在有着不重要的例外的情况下",每一对要素的 ES 相等且恒定.见 Fuss,McFadden 和 Mundlak(1978,240 页).

[27]如果 $f(x^0)=\bar{f}(x^0), f'(x^0)=\bar{f}'(x^0), f''(x^0)=\bar{f}''(x^0)$,那么函数 $\bar{f}$ 称为提供了任意一个二阶连续可微函数 f 在点 x^0 的**二阶近似值**,见 Diewert

(1982,574 页)和 Fuss,McFadden 和 Mundlak(1978).

[28]注意在 $c_1=0$ 和 $c_2=0$ 的条件下对所有 i 和 j,如果 $a_{ij}=b_i=0$ 且 $a_i>0$,那么由(44)定义的 $C(w,y)$ 化为 Cobb－Douglas 成本函数.由此,我们可以构建一个 Cobb－Douglas 生产函数.不用说,除了超对数函数,成本函数的另一个灵活的函数形式是可能的.

[29]注意 $\partial^2 C/\partial w_i \partial w_j = a_{ij}$,因此海赛矩阵的对称性意味着 $a_{ij}=a_{ji}$.把线性齐次性加于(44).对所有 $\alpha>0$,$C(\alpha w,y)=\alpha C(w,y)$(不考虑生产函数的形式,此式成立),我们得到(45)的其余部分.

[30]将超对数函数看做真实函数的近似.既然不是所有基础的真实函数的特性都被近似函数所继承,那么人们就会对加上像凹性这样的各种约束的合理性提出质疑.然而,如 Lau(1978,418～419 页)所提出的:

如果我们把注意力限制在那些在近似点有着一致的一阶和二阶导数的二阶近似函数,那么与其相对应的单调的、凸或拟凸的近似函数将在近似点处表现出与原函数相似的行为,在近似点,近似函数的非凸性必定推出原函数的非凸性.

[31]在(44)式的微分中,利用下面矩阵代数中著名的结论.令 $Q(x)\equiv x\cdot A\cdot x$,这里 $A=[a_{ij}]$是 $n\times n$ 矩阵.那么,我们有 $\partial Q/\partial x_i=2\sum_j a_{ij}x_j$,$i=1,2,\cdots,n$.这样将(44)关于 w_i 微分得出

$$(\partial C/\partial w_i)/C=a_i/w_i+\sum a_{ij}\log w_j(1/w_i)+b_i\log y(1/w_i).$$

[32]如果我们能够对所有的 i,拒绝 $H_0:b_i=0$,那么我们能够拒绝位似性.当我们不能拒绝这个零假设时,既然(对所有的 i,$b_i=0$)只是位似性的必要条件,我们需要检查位似性的充分必要条件.对于此检验,见 Berndt－Christensen(1973).

[33]例如,当这些研究涉及诸如金融服务,运输服务,医疗服务以及研究成果之类事物时,产出数据可能不可获得或者"产出"的定义变得含糊.作为这种估计的一个例子,见 Sims,Takayama 和 Chao(1987).由于许多金融资产的交易可以通过电话等方式很快完成,那么在一些金融资产的研究中,生产模型中的可变因素和半固定因素之间的区别就不重要了.利用这种观点,Sims,Takayama 和 Chao(1987)估计了被称为"准货币"的不同资产之间替代和互补的程度.他们利用 Allen 弹性度量这种程度,根据 Blackorby 和 Russell(1989),它们可以给出现代的度量结果.

[34]利用与 Berndt 和 Christensen(1975)所用的实质上相同的、但是区别了半固定要素和可变要素的数据,Chao 和 Takayama(1991)得到了下列美国制造业的估计,这里 M 代表原料:$\sigma_{KE}=-0.57$,$\sigma_{LK}=0.41$,$\sigma_{LM}=0.31$,$\sigma_{LE}=1.59$,$\sigma_{KM}=-0.08$,$\sigma_{EM}=-0.07$.规模经济起作用(产出的成本弹性小于 1),并且技术变化解释了观察期中大约 28% 的产出增长.正如理论所指出,自我价格弹性都是负的.

[35]这一节总结了一部分包含在 Ide 和 Takayama(1987 和 1991)中的结论.为避免杂乱,这里我们简单忽略一些如"固定成本"和"不可分性"这些熟知

的因素，这些内容的介绍并不难，留给感兴趣的读者考虑.

[36]类似的关系在关于命题 3.2 的证明中得到.

[37]尽管(50a)和(50b)不独立(因为一个可由另一个推出)，但是提及两个条件是有用的.

[38]参数 ε 与 Frisch 的(1965，65 页)"传递系数"一致. Frisch 指出这个概念已经被一些杰出的经济学家所使用.

[39]这一点的严密讨论见 Ide 和 Takayama(1989a).

[40]$\theta_1=\varepsilon_1$ 由 Ohta(1974，64 页)和 Hanoch(1975，493 页)得到. 在统一结构下的(52)的证明，见 Ide 和 Takayama(1989a).

[41]对于(52)的局部性质和沿过原点的射线而定义的概念与按沿 EP 而定义的概念的区别的图形解释见 Ide 和 Takayama(1989，377 页).

[42]本节的讨论基于 Anderson 和 Takayama(1991).

[43]见 Eichhorn 和 Oettli(1972，711 页). Samuelson(1960a)以有些生动的方式陈述了这一点，"如果你保持气球温度恒定，挤压它所减少的体积将大于如果你允许挤压生热时所造成的体积膨胀(当密封时)"(368 页). 这些启发式陈述的清楚解释见 Samuelson1960 和 Eichhorn 和 Oettlli(1972). 正如这些作者所解释的，事实上有两种形式的 Le Châtelier 原则，即"弱形式"和"强形式". 它的弱形式可依据一个例子来解释. 令 $x_i(w,y)$ 是要素 i 的需求函数(例 3.6). 那么，弱形式简单地说明我们在定理 3.1 中得到的 $\partial x_i/\partial w_i\leqq 0$. 本节中，我们关注强形式. 对于弱形式的全局性扩展，见 Eichhorn 和 Oettli(1972)，Takayama (1977)以及 Anderson 和 Takayama(1979).

[44]本段摘自 Hatta(1987，157 页).

[45]由于 C^1 关于 w 和 Y 是凹的，其海赛矩阵是半负定的. 那么注意由包络线定理，$\partial C^1/\partial w_i=x_i^1$，$\partial C^1/\partial r=z^1$ 和 $\partial C^1/\partial y=\lambda^1$，我们得(52a)和(52b). (52a)和(23)一致，(52b)与替代矩阵的对角元素是非正的特性一致.

[46]见 Samuelson(1947，36 页). 对此假设，他写到，"只有当短期总成本尽可能低时，长期总成本才能达到最小值，所以短期条件在长期中也成立."

[47]这是文献中通常的假设. 也可证明对所有 y，$\partial\lambda^1/\partial y\geqq 0$，当且仅当 f 是凹的. 也就是说，边际成本曲线非降，当且仅当生产函数是凹的. 见 Marino，Otani 和 Sicilian(1981).

[48]需求函数 $x_i^s(w,r^s,y;z_{(s)})$ 与 Pollak(1969)"条件需求函数"一致. 他的公式是我们公式的一个特例.

[49]这个结论与下面 Samuelson(1947，38～39 页)得出的结论一致："允许新要素变化的时期的延长将在价格已改变的要素中导致更大的变化……"但正如 Pollak(1969，76 页)所评论的，"Samuelson 对该定理的证明要求处理繁琐的雅可比矩阵和使用雅可比定理."

[50]反思战时的经历，在 40 年代和 50 年代早期，定量配给被广泛讨论. 对于此问题的概览，见 Tobin(1952). 关于这个论题的权威工作或许是 Tobin 和 Houthakker(1951). 他们的分析相当乏味，因为它是根据加边海矩阵进行推导的(自然地反映了那些时候的学术状态). 但他们的分析提供了对"LeS 原

则"问题的进一步探求.例如,见 Pollak(1969)和 Hatta(1980).

[51]见 Samuelson(1947,168 页).另见 Pollak(1969).

参考文献

Afriat, S. N. 1971. "Theory of Maxima and the Method of Lagrange." *SIAM Journal of Applied Mathematics* 20(May):343-57.

——. 1980. *Demand Functions and the Slutsky Matrix*. Princeton: Princeton University Press.

Allen, R. G. D. 1938. *Mathematical Analysis for Economists*. London: Macmillan.

Anderson, R. K., and A. Takayama. 1979. "Comparative Statics with Discrete Jumps in Shift Parameters, or, How to Do Economics on the Saddle(-Point)." *Journal of Economic Theory* 21(December):495 - 509.

——. 1991. "On the Le Châtelier-Samuelson Principle." To appear in *Keio Economic Studies*.

Arrow, K. J., H. B. Chenery, B. Minhas, and R. M. Solow. 1961, "Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency." *Review of Economics and Statistics* 43(August):225 - 50.

Berndt, E. R., and L. R. Christensen, 1973. "The Translog Function and the Substitution of Equipment, Structures, and Labor in U. S. Manufacturing 1929 - 68." *Journal of Econometrics* 1(February):81 - 114.

Berndt, E. R., and D. O. Wood. 1975. "Technology, Prices and the Derived Demand for Energy." *Review of Economics and Statistics* 62(February):259 68.

Bernstein, B., and R. A. Toupin. 1962. "Some Properties of the Hessian Matrix of a Strictly Convex Function." *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 210:65 - 72.

Blackorby, C., and R. R. Russell. 1989. "Will the Real Elasticity of Substitution Please Stand Up?" *American Economic Review* 79(September):882 - 88.

Blackorby, C., D. Primont, and R. R. Russell. 1978. *Duality, Separability and Functional Structure: Theory and Economic Applications*. New York: North-Holland.

182 Brown, R. S., and D. O. Christensen. 1981. "Estimating Elasticities of Substitution in a Model of Partial Static Equilibrium: An Application of U. S. Agriculture, 1947 - 1974." In *Modeling and Measuring Natural Resource Substitutions*, ed. E. R. Berndt and B. C. Field: 209 - 29. Carmbridge, Mass:

MIT Press.

Carathéodory, C. 1967. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order*. Trans. R. Dean. Part 2, especially chap. 11. San Francisco: Holden Day (German original 1935).

Chao C. C., and A. Takayama. 1991. "Long-Run Output Elasticities of Factor Demands, Non-Homotheticity, and Scale Economies in U. S. Manufacturing." To appear in *Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft*.

Christensen, L. R., D. W. Jorgensen, and L. J. Lau. 1971. "Conjugate Duality and the Transcendental Logarithmic Production Function." *Econometrica* 39 (July): 206 (Abstract).

——. 1975. "Transcendental Logarithmic Utility Function." *American Economic Review* 65 (June): 367 – 83.

Diewert, W. E. 1974. "Applications of Duality Theory." In *Frontiers of Quantitative Economics*. ed. M. D. Intriligator and D. A. Kendrick, 106 – 71. Amsterdam: North-Holland. See also "Comments by S. E. Jacobson, L. J. Lau, and R. W. Shepherd, 2: 171 – 203.

——. 1982. "Duality Approaches to Microeconomic Theory." In *Hand-book of Mathematical Economics*, ed. K. J. Arrow and M. D. Intriligator, vol. 2, chap. 12, 535 – 99. Amsterdam: North-Holland.

Eichhorn, W., and W. Oettli. 1972. "Generalized Formulation of the Le Châtelier-Samuelson Principle." *Econometrica* 40 (July): 711 – 19.

Epstein, L. G. 1981. "Generalized Duality and Integrability." *Econometrica* 49 (May): 655 – 78.

Färe, R., and D. Primont. 1990. "The Completion of Ronald W. Shephard's Duality Theory." Presented at the Midwest Mathematical Economics Meeting at the University of Illinois, November.

Färe, R., and R. W. Shephard. 1977a. "Ray-Homothetic Production Functions." *Econometrica* 45 (January): 133 – 46.

——. 1977b. "On Homothetic Scalar Valued Production Functions." *Scandinavian Journal of Economics* 79 (1): 131 – 32.

Førsund, F. R. 1975. "The Homothetic Production Function." *Scandinavian Journal of Economics* 77 (2): 234 – 44.

Frisch, R. 1965. *Theory of Production*. Dordrecht, Holland: Reidel.

Fuss, M., D. McFadden, and Y. Mundlak. 1978. "A Survey of Functional Forms in Economic Analysis of Production." In *Production Economics*, ed. M. Fuss and D. McFadden, 1: 219 68. Amsterdam: North – Holland: 219 – 68.

Fuss, M. and D. McFadden, eds. 1978. *Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications*. 2 vols. Amsterdam: North – Holland.

183 Gorman, W. M. 1976. "Tricks with Utility Functions." In *Essays in Economic Analysis*, ed. by M. J. Artis and A. R. Nobay. Cambridge: Cambridge University

Press.

Hanoch, G. 1975. "The Elasticity of Scale and the Shapes of Average Costs." *American Economic Review* 65(June):492 – 97.

Hall, R. E. 1973. "The Specification of Technology with Several Kinds of Output." *Journal of Political Economy* 81(July/August):878 – 92.

Hatta, T. 1980. "Structure of the Correspondence Principle at an Extreme Point." *Review of Economic Studies* 47(October):987 – 97.

——. 1987. "Le Chatelier Principle." In *The New Palgrave: A Dictionary of Economics*, ed. J. Eatwell, M. Milgate, and P. Newman, 3: 155 – 57. London, Macmillan.

Helpman, E. 1984. "Increasing Returns, Imperfect Markets and Trade Theory." In *Handbook of International Economics*, **1**: 325 – 65. Amsterdam: North-Holland.

Helpman, E., and P. R. Krugman. 1985. *Market Structure and Foreign Trade*. Cambridge, Mass.: MIT Press.

Hicks, J. R. 1932. *Theory of Wages*. London: Macmillan.

——. 1946. *Value and Capital*. 2d ed. Oxford: Clarendon Press (1st ed. 1939).

——. 1970. "Elasticities of Substitution Again: Substitutes and Complements." *Oxford Economic Papers* 22(November):289 – 96.

Hicks, L. R., and R. G. D. Allen. 1934. "A Reconsideration of the Theory of Value, Ⅰ, Ⅱ." *Economica* 1(February, May):52 – 75, 196 – 219("Part Ⅰ" and "Part Ⅱ" are, respectively, written by Hicks and Allen).

Hotelling, H. 1932. "Edgeworth's Taxation Paradox and the Nature of Demand and Supply Function." *Journal of Political Economy* 40(October):577 – 616.

——. 1935. "Demand Functions with Limited Budgets." *Econometrica* 3 (October):66 – 78.

——. 1938. "The General Welfare in Relation to Problems of Taxation and of Railway and Utility Rates" *Econometrica* 6(July):242 – 269.

Ide, T., and A. Taksyama. 1987. "On the Concepts of Returns to Scale." *Economics Letters* 23(4):329 – 34.

——. 1989a. "Returns to Scale under Non-Homotheticity and Homotheticity, and the Shape of Average Cost." *Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft* 145(December):367 – 88.

——. 1989b. "On Homothetic Functions." *Scandinavian Journal of Economics* 91(3):621 – 23.

Karlin, S. 1959. *Mathematical Methods and Theory in Games, Programming, and Economics*, Vol. Ⅰ. Reading, Mass.: Addison-Wesly.

Lau, L. J. 1969. "Duality and the Structure of Utility Functions." *Journal of*

Economic Theory 1(December):374－96.

——. 1976. "Characterization of the Normalized Restricted Profit Function." *Journal of Economic Theory* 12(January):131－63.

——. 1978. "Testing and Imposing Monotonicity, Convexity and Quasi-Convexity Constraints." In Fuss and McFadden(1978). 1:409－53.

Mckenzie, L. W. 1957. "Demand Theory without a Utility Index." *Review of Economic Studies* 24(June):184－89.

Marino, A., Y. Otani, and J. Sicilian, 1981. "Rising Marginal Cost and Concavity of the Production Function." *Economics Letters* 8(3):293－99.

Marshall, A. 1920. *Principles of Economics*. 8th ed. London: Macmillan(1st ed. 1890).

Morrison, C. J. 1986. "Structural Models of Dynamic Factor Demands with Static Expectations: An Empirical Assessment of Alternative Expectation Specifications." *International Economic Review* 27(June):365－86.

Morrison, C. J., and E. R. Berndt 1981. "Short-Run Labor Productivity in a Dynamic Model," *Journal of Econometrics* 16(August):339－65.

Negishi, T. 1989. *Lectures on Microeconomics* (in Japanese). Tokyo: University of Tokyo Press.

Newman, P. 1982. "Mirrored Pairs of Optimization Problems." *Economica* 49 (May):109－19.

Ohta, M. 1974. "A Note on Duality Between the Lost Functions: Rate of Returns to Scale and Rate of Technological Progress." *Economic Studies Quarterly* 25(December):63－65.

Okuno, M., and K. Suzumura, K. 1985. *Microeconomics* 1 (in Japanese). Tokyo: Iwanami.

Otani, Y. 1982. "A Simple Proof of the Le Châtelier-Samuelson Principle and the Theory of Cost and Production." *Journal of Economic Theory* 27(August): 430－38.

Pollak, R. A. 1969. "Conditional Demand Functions and Consumption Theory," *Quarterly Journal of Economics* 83(February):60－78.

Roy, R. 1942. *De l'utilité*. Paris: Hermann.

Saijo, T. 1983. "Differentiability of Cost Functions is Equivalent to Strict Quasiconcavity of the Production Functions." *Economics Letters* 12(2):135－39.

Samuelson, P. A. 1947. *Foundations of Economic Analysis*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press(enl. ed.).

——. 1953. "Prices of Factors and Goods in General Equilibrium," *Review of Economic Studies* 21:1－20.

——. 1958. "Frank Knight's Theorem in Linear Programming." *Zeitschrift für Nationalökonomie* 18(August):310－17.

185 ——. 1960a. "An Extension of the Le Cbetelier Principle." *Econometrica* 28,

April: 368 – 79.

——. 1960b. "Structure of a Minimum Equilibrium System." In *Essays in Economics and Econometrics: A Volume in Honor of Harold Hotelling*, ed. R. W. Phouts, 1 – 33. Chapel Hill, N. C.: University of North Carolina Press.

——. 1966. "the Le Chatelier Principle in Linear Programming." In *Collected Scientific Papers of Paul A. Samuelson*, ed. J. E. Stiglitz, 1: 638 – 50. Cambridge, Mass.: MIT Press. See also "1965 Postscript." 684 – 86.

Shephard, R. W. 1953. *Cost and Production Functions*. Princeton, N. J.: Princeton University Press.

——. 1970. *Theory of Cost and Production Functions*. Princeton. N. J.: Princeton University Press.

Silberberg, E. 1971. "The Le Chatelier Principle as a Corollary to a Generalized Envelope Theorem." *Journal of Economic Theory* 3(June): 146 – 55.

——. 1974. "A Revision of Comparative Statics Methodology in Economics, or, How to Do Comparative Statics on the Backof an Envelope." *Journal of Economic Theory* 7(February): 159 – 72.

——. 1990. *The Structure of Economics* 2d ed. New York: McGraw-Hill(1st ed. 1978).

Sims, G. E., A. Takayama, and C. C. Chao. 1987. "A Dual Approach to Measuring the Nearness of Near-Monies." *Review of Economics and Statistics* 69 (February): 118 – 27.

Slutsky, E. 1915. "Sulla Teoria Del Bilancio Del Consumatore." *Giornale Degli Economisti* 51: 1 – 26. [1952] "On the Theory of the Budget of the Consumer." Trans. O. Ragusa. In *Readings in Price Theory*, ed. G. J. Stigler and K. E. Boulding, 27 – 56. Homewood, Ⅲ.: Richard D. Irwin.

Stigler, G. 1947. "Notes on the History of the Giffen Paradox." *Journal of Political Economy* 55(April): 152 – 56.

——. 1966. *The Theory of Price*. 3d ed. New York: Macmillan.

Takayama, A. 1977. "Sensitivity Analysis in Economic Theory." *Metroeconomica* 29(January – December): 9 – 37.

——. 1982. "On theorems of General Competitive Equilibrium of Production aod Trade: A Survery of Some Recent Developments in the Theory of International Trade." *Keio Economic Studies* 19: 1 – 37.

——. 1985. *Mathematical Economics*. 2d ed. New York: Cambridge University Press.

Tobin, J. 1952. "A Survey of the Theory of Rationing." *Econometrica* 20 (October): 521 – 53.

Tobin, J. and H. S. Houthakker, 1951. "The Effects of Rationing on Demand Elasticities." *Review of Economic Studies* 18(3): 140 – 53.

Uzawa, H. 1962. "Production Functions with Constant Elasticities of

Substitution." *Review of Economic Studies* 29(October):291－99.

186 ——. 1964. "Duality Principles in the Theory of Cost and Production." *International Economic Review* 5(May):216－20.

Varian, H. R. 1984. *Microeconomic Analysis*. 2d ed. New York: Norton(1st ed. 1978).

第 4 章　微观经济理论中的其他问题

187

在这一章中，我们集中讨论微观经济理论中其他一些重要问题. 这些问题的讨论将有助于说明前几章中所建立的技巧的运用(非线性规划和灵敏性分析). 这些问题也论及了微观理论的一些重要方面；这样它们不只是数学技巧的简单说明. 我们可以注意到在文献中这些问题中的某些问题并非理解得很好. 既然相关的数学技巧在前面几章中已被详细地解释，那么我们的重点将放在经济学上，而不是个别数学定理应该如何应用于所考虑的经济学问题中.

§4.1　劣等投入、边际及平均成本[1]

4.1.1　劣等投入

自从 Jacob Viner(1931 年)的古典讨论描述了局部均衡分析的核心问题，边际和平均成本曲线充满了中级价格理论的教科书中，且这种方法的作用和益处已被充分表现(例如，见 Stigler 1966 和 Friedman 1962). 这样的成本曲线

的一个更严密的公式在 Hicks(1946)和 Samuelson(1947)的经典专题论文中得出，它的现代解释在前几章中已介绍.尽管如此，一些疑惑仍然存在.尤其是人们经常断言：

(a) 要素价格的上涨总使边际成本增加；

188 (b) 公司理论和消费理论之间有完全相似之处，替代效应和收入或规模效应均可向相反方向变动，因此，Giffen 悖论也应用到公司理论中.

后来证明这两个命题都是错误的.另外，许多相关问题也已阐明.这个方面的一些重要著作是 Ferguson 和 Saving(1969)，Syrquin(1970)，Portes(1971)，Puu(1971)，Sakai(1973)，和 Nagatani(1978).本节的目的是以最简单的可能方式讲解这类文献的主要结论.与许多关于该问题的论文不同，我们将避免不必要地使用令学生烦恼的加边海赛矩阵.关键思想是利用 Shephard 引理(或者包络线定理)，这样便遵循了由 Protes(1971)和 Nagatani(1978)发展的思想.回想一个竞争公司通常的成本最小化问题，即，选择一投入向量 $x\in R^n$，使

$$\text{Minimize } w\cdot x$$

约束条件为

$$f(x)\geqq y \text{ 且 } x\geqq 0$$

其中 y 表示产出水平且为正标量，w 和 $f(x)$分别表示投入价格向量和生产函数.我们假定 $w>0$，对公司而言是由外部给定的.令 $x(w,y)$是该问题的解，$\lambda(w,y)$是与其相关的拉格朗日乘数.令 $C(w,y)\equiv w\cdot x(w,y)$是最小成本函数.我们假定在最优解处对所有 i，$x_i>0$(内部解)且 $\lambda>0$。由 $\lambda(w,y)>0$ 推出 $f(x)=y$.我们可回想一下 $\lambda(w,y)=\partial C(w,y)/\partial y$.

接下来，我们回想通常的利润最大化问题，对于一个竞争公司，选择(单一)产出 y，在 $y\geqq 0$ 的条件下使利润 $py-C(w,y)$最大，这里 $p>0$ 和 $w>0$ 对公司而言是给定的.对于一个正产出，该问题的最优化条件可写作

$$p=\lambda(w,y),\text{这里 } \lambda(w,y)\equiv\partial C(w,y)/\partial y \quad [\text{边际成本}] \tag{1}$$

这是著名的产品价格等于边际成本(MC)的条件，这里我们假定在最优解处

$$\partial\lambda(w,y)/\partial y[=\partial^2 C(w,y)/\partial y^2]>0 \tag{2}$$

以保证惟一的最大值.条件(2)表明 MC 曲线在产量的最优处向上倾斜.这是在中级价格理论教科书中的标准假设.我们记最优产量，即满足(1)的 y 为 $y(p,w)$.

189 继续我们的分析，假定所有有关的函数都是连续可微的.微分(1)，得出

$$dp=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\lambda}{\partial w_i}dw_i+\frac{\partial\lambda}{\partial y}dy \tag{3}$$

由此，我们可确定 $y(p,w)$关于 w_i 的偏导数为

$$\frac{\partial y}{\partial w_i} = -\frac{\partial \lambda}{\partial w_i} \Big/ \frac{\partial \lambda}{\partial y}, i = 1,2,\cdots,n \tag{4}$$

因为由假设在最优解处$\partial \lambda / \partial y > 0$,我们立即可得到下列结论:

【引理 4.1】 我们有下列关系式:

$$\partial y / \partial w_i \gtrless 0, \text{根据是否} \partial \lambda / \partial w_i \lessgtr 0, i = 1,2,\cdots,n \tag{5}$$

这里$\partial y / \partial w_i < 0$意味着投入价格的增长将降低利润最大时的产出.虽然$\partial y / \partial w_i < 0$可能更与传统常识相一致,这不一定就是实际情况(后面我们将证明).

下面,回想一下成本最小化的最优投入向量写作 $x(w,y)$.那么我们定义函数 $x^*(p,w)$为

$$x = x[w, y(p,w)] \equiv x^*(p,w) \tag{6}$$

也就是说,当价格向量为(p,w)时,$x^*(p,w)$表示达到最优产出 y 时的最小成本投入向量.对(6)关于 w_i 微分得[2]

$$\partial x_i^* / \partial w_i = (\partial x_i / \partial w_i) + (\partial x_i / \partial y)(\partial y / \partial w_i), i = 1,2,\cdots,n \tag{7}$$

(7)式右侧的第一项表示**(自身)替代效应**,而第二项表示**规模效应**(或**扩张效应**).任何要素价格变化的**总效应**可被分解为替代效应和规模效应.总效应的
190 分解被 Ferguson 和 Saving(1969),Syrquin(1970),Puu(1971),Sakai(1973)和 Nagatani(1978)观察到.现在我们要决定这三个效应的符号:替代效应,规模效应和总效应.回想定理 3.2,我们可以断言,对每一个 i,(自身)替代效应$\partial x_i / \partial w_i$是负的,这里我们假定 Samuelson 正则条件成立.

规模效应的符号怎么样?这个问题自然地导致对$\partial x_i / \partial y$ 符号的探究,这里我们回想下列在中级价格理论中生产要素的重要分类.

【定义 4.1】 如果$\partial x_i / \partial y > 0 (\partial x_i / \partial y < 0)$,即(为了使公司达到成本最小化)如果产量的增加导致第 i 种要素的使用增加(下降),那么,第 i 种要素被称为是**正常的(劣等的)**.[3]

在投入空间中利用等产量线图可以很容易地图示劣等要素.图 4.1(a)中,要素 1 是劣等的,图 4.1(b)中,要素 2 是劣等的.明显地,图 4.1(a)中的要素 2 是正常的,图 4.1(b)中的要素 1 是正常的.

在此,复习一些价格理论可能是有用的.正如 Nagatani(1978,521 页)所指出的,在基础教科书中,似乎有两个答案:

(a) 如果要素是严重的劣等,那么反常的效应可能超过正常的替代效应,因此$(\partial x_i^* / \partial w_i)$可能是正的(参见 Ferguson1969,197 页).

(b) 在要素需求中只有一个替代效应,即$\partial x_i^* / \partial w_i = \partial x_i / \partial w_i$:因此,没有像"Giffen 投入"这样的东西,就是说没有$\partial x_i^* / \partial w_i > 0$(参见Henderson和 Quandt 1958,75 页;1971,70 页;1980,81 页和 Burstein 1968,103 页).

191 这两个命题都不正确.这已由 Syrquin(1970)指出.注意,(7)已指出规模

效应确实存在.接下来,我们证明命题(a)和(b)都是错误的,实际上我们能得到下列结论,其中命题(iii)特别否定了命题(a)和(b).

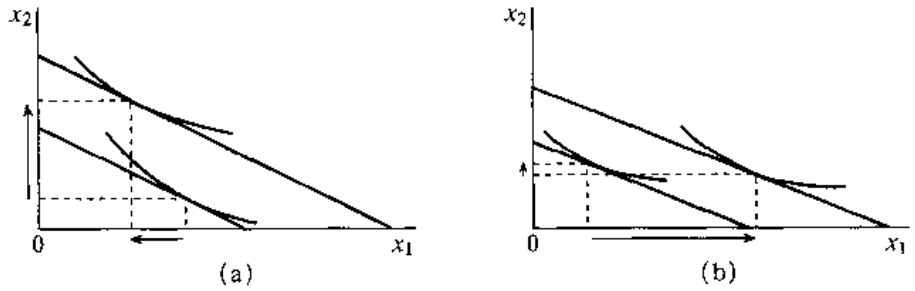


图 4.1

【命题 4.1】 假设在最优解处,对所有 $i, x_i>0$,且假设函数 $C(w,y)$二次连续可微.那么我们有:

(i) 某要素价格的增加使边际成本曲线是向上还是向下移动,取决于此要素是正常的还是劣等的.更精确地,

$$\frac{\partial \lambda}{\partial w_i}=\frac{\partial x_i}{\partial y}, i=1,2,\cdots,n^{[4]} \tag{8}$$

(ii) 某要素价格的增加是降低还是增加最优产出,取决于此要素是正常的还是劣等的.更明确地,

$$\operatorname{sign}\left(\frac{\partial y}{\partial w_i}\right)=-\operatorname{sign}\left(\frac{\partial x_i}{\partial y}\right), i=1,2,\cdots,n^{[5]} \tag{9}$$

192 (iii) 不管所考虑的要素是正常的还是劣等的,规模效应总是为负的,因此总效应总是为负的,即

$$\frac{\partial x_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w_i}<0$$

因此总有

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial w_i}<0, i=1,2,\cdots,n \tag{10}$$

证明:二次微分 $C(w,y)$,我们可看到

$$\frac{\partial^2 C}{\partial y \partial w_i}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial C}{\partial w_i}\right)=\frac{\partial x_i}{\partial y} \tag{11}$$

这里最后一个等式来自 Shephard 引理,$\partial C/\partial w_i = x_i$.由于 $C(w,y)$是二次连续可微的,我们可以改变微分的顺序,使得

$$\frac{\partial^2 C}{\partial y \partial w_i}=\frac{\partial^2 C}{\partial w_i \partial y}=\frac{\partial C}{\partial w_i}\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)=\frac{\partial \lambda}{\partial w_i} \tag{12}$$

这里最后一个等式来自于 $\lambda \equiv \partial C/\partial y$.结合(11)和(12),我们得到(8).

为证明命题(ii),使用(5)和(8),简单观察

$$\operatorname{sign}\left(\frac{\partial y}{\partial w_i}\right) = -\operatorname{sign}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial w_i}\right) = -\operatorname{sign}\left(\frac{\partial x_i}{\partial y}\right) \tag{13}$$

为证明命题(iii),利用(9),它表明

$$\operatorname{sign}\left(\frac{\partial x_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w_i}\right) = \operatorname{sign}\left(\frac{\partial x_i}{\partial y}\right)^2 < 0 \tag{14}$$

根据(7),这推出$\partial x_i^* / \partial w_i < 0$. (证毕)

命题 4.1 的(iii)由 Syrquin(1970),Puu(1971)和 Sakai(1973)得到,它说明导出的要素需求函数总是与其自身的要素价格负相关.替代效应和规模效应
193 总是向相同方向变化(因此没有像"Giffen 投入"这样的东西),这正好同消费理论构成了对比.命题(ii)由命题(i)可立即得到.这由 Ferguson 和 Saving (1969)明确指出.命题(i)由 Mosak(1938),Samuelson(1947),和 Syrquin(1970)证明.文献中所有这些命题的证明都涉及了大量矩阵代数的使用(例如加边海赛矩阵的使用).前面的证明没有要求任何这样的讨论.它只是 Shephard 引理的简单运用.它是 Nagatani(1978)的一个扩展,在那篇文章中他也提供了命题(iii)的图形说明.

命题 4.1 的命题(i)表明,如果问题中的投入是劣等的,那么投入价格的下降总是使边际成本增加.因此,劣等投入的存在证明了文献中包含的一些陈述是错误的.例如,Friedman 的"暂定教本"中(1962,179 页)叙述说:

> 如果 A 的价格下降且产出保持不变,A 将替代其他要素,…,然而 A 的价格下降已经,…,增加了通过花费额外一美元所能得到的产出的单位数量,即,它减少了边际成本.

Friedman 的陈述是正确的,当且仅当问题中的要素是正常的.由命题(ii),$\partial y/\partial w_i < 0$ 当且仅当第 i 种要素是正常的.因此,我们也可以得出结论,"传统常识"$\partial y/\partial w_i < 0$ 不成立,当且仅当要素是劣等的.

4.1.2 要素价格和平均成本曲线的移动

现在我们将注意力移到要素价格的变化对平均成本(AC)曲线的影响上.特别地,我们得到下面的结论:

【命题 4.2】 假定在最优解处对所有的 i,$x_i > 0$,并且进一步假定函数 $C(w,y)$是连续可微的.那么我们有:

(i) 不管问题中的要素是正常的还是劣等的,要素价格的上涨总是使 AC 曲线向上移动;

(ii) 第 i 种要素价格的上涨使 AC 曲线的最小点的产出水平降低,当且仅

当对第 i 种要素需求的产出弹性(μ_i)大于 1,即当且仅当

194

$$\mu_i \equiv \frac{\partial x_i}{\partial y}\frac{y}{x_i} > 1, i = 1,2,\cdots,n \tag{15}$$

证明:为证明命题(i),只需注意到平均成本函数(定义为)$a(w,y) \equiv C(w,y)/y$,那么简单观察

$$\frac{\partial a}{\partial w_i} = \frac{1}{y}\cdot\frac{\partial C}{\partial w_i} = \frac{x_i}{y} > 0, i = 1,2,\cdots,n \tag{16}$$

我们立即可得到命题(i),其中第二个等式利用了 Shephard 引理,

$$\partial C/\partial w_i = x_i$$

假定 AC 曲线正如文献中经常假定的那样是 U 形的.AC 曲线的最小值点由 MC 和 AC 曲线的交点来刻画.它由如下等式确定:

$$\lambda(w,y) = C(w,y)/y \tag{17}$$

这进一步定义 AC 曲线的最小值点为 $y = y^*(w)$.为得到$\partial y^*/\partial w_i$ 的表达式,我们微分(17),保持除 w_i 以外的所有 w_j 为常数,

$$\lambda_i dw_i + \lambda_y dy = \frac{x_i}{y}dw_i + \left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{C}{y}\right)\frac{dy}{y} = \frac{x_i}{y}dw_i \tag{18}$$

其中 $\lambda_i \equiv \partial\lambda/\partial w_i$ 且 $\lambda_y \equiv \partial\lambda/\partial y$,并且$\partial C/\partial w_i = x_i$.(18)的最后一个等式来自(17).由(18)我们立即得到

$$\frac{\partial y^*}{\partial w_i} = -\left(\frac{\partial x_i}{\partial y} - \frac{x_i}{y}\right)/\lambda_y \tag{19}$$

这里我们需回顾(8).既然 i 的选择是任意的,那么(19)对任何 i 成立.因此,我们可得出结论:

$$\frac{\partial y^*}{\partial w_i} < 0, \text{当且仅当} \frac{\partial x_i}{\partial y}\frac{y}{x_i} > 1, i = 1,2,\cdots,n \tag{20}$$

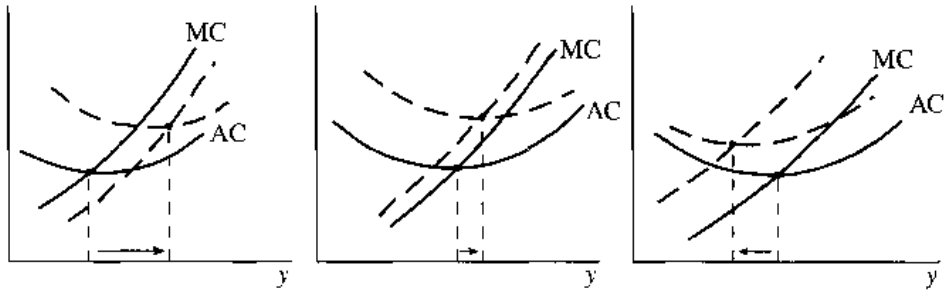
这里我们需回顾一下,由假定 $\lambda_y > 0$. (证毕)

195 命题 4.2 与 Ferguson 和 Saving(1969)利用加边海赛矩阵方法[6]得到的类似结论相一致,其中他们依据第 i 种要素的"支出弹性"来刻画$\partial y^*/\partial x_i$ 的符号特征.[7]当$\partial y^*/\partial w_i < 0$ 时,Ferguson 和 Saving(1969)称第 i 种要素是"优良的".按照此定义的精神,当第 i 种要素需求的产出弹性(μ_i)大于 1 时,我们可称第 i 种要素为**优良的**.命题 4.2 和命题 4.1 的(i)完整地总结了要素价格的变化对 AC 和 MC 曲线的影响.我们可在图 4.2 中说明这一点(Ferguson 和 Saving 中也提供过类似的图,1969,779 页).[8]

196 注:在前面的讨论中,我们考虑了公司是竞争公司,且对公司而言,p 是外部给定不变的情形.如果公司是垄断者,我们令 $p(y)$是它的反需求函数并且假定 $p'(y) < 0$.公司选择 y 使$R(y) - C(w,y)$最大,其中 $R(y) \equiv p(y)y$.一阶条件可写作 $R'(y) = \lambda(w,y)$,它是 MC = MR 的一般法则.这个条件决定

了作为 w 函数的 y，其中 $y=y^0(w)$. 明显地，y^0 与由(2)得到的函数 $y(p,w)$ 相对应. 进行与前面类似的分析，我们可得出结论，命题 4.1 和命题 4.2 对于一个垄断公司也成立. 证明留给有兴趣的读者.

注：图 4.2 中，我们假定了通常的 U 形 AC 曲线，它是迄今为止 AC 曲线最被接受的形式. 在下面的 4.3 节中，我们将得到一个对这样形状的质疑评论，其中要素价格变化的影响起了关键的作用.



(a) 低级要素　(b) 一般要素　(c) 一般（高级）要素

图 4.2　要素价格上涨的效应

§4.2　边际成本定价

像公共事业和铁路这样的公司，在某些地方通常是完全垄断者. 如果价格的制定是为了公司的利润最大化，那么从社会的观点来看，这样的价格可能不
197 是最优的. 那什么是从社会观点看的最优价格？这是一个很困难的问题，因为我们不能找到任何可以指示社会福利水平的有意义的指标.[9] 抛开什么能用来衡量社会福利的困难问题，文献中长期讨论一个简单的定价原则. 关于这个专题的古典文章是 Dupuit(1844)和 Hotelling(1938). 从社会观点来看，“最优”的定价原则是**边际成本定**价. 粗略说来，它指出价格应定在等于边际成本的水平. 在这一节中，我们将以最简单可能的方式阐述这一点. 为此，我们要省略问题的某些有用方面.

考虑一个使用 n 种投入生产单一产品的完全垄断公司. 生产函数再次写为 $f(x)$，这里 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 令行业的反需求函数给定为 $p(y)$，这里 p 表示产品的价格. 利润最大化的垄断者将选择 x 和 y 以最大化 $p(y)y-w\cdot x$，约束为 $f(x)\geqq y$，$x\geqq 0$ 和 $y\geqq 0$，这里 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$ 是外部给定的价格向量. 这个问题可被分解为两个问题. 一个是成本最小化问题. 给定 y 的水平，公司首先选择 x 以最小化 $w\cdot x$，约束为 $f(x)\geqq y$ 和 $x\geqq 0$. 令 $x(w,y)$ 是该问题的解. 定义 $C(w,y)\equiv w\cdot x(w,y)$ 为(最小)总成本函数. 为简化记号，去掉 w，以 $C(y)$ 代替 $C(w,y)$，w 在这节里认为是固定的. 公司将

选择 y 以最大化 $p(y)y - C(y)$. 这给出了 $MR = MC$ 的通常法则，即

$$R'(Y^0) = C'(Y^0) \tag{21}$$

这里 $R(y) = p(y)y$，是总收益函数，且 Y^0 代表利润最大化的产出水平. 则利润最大化价格由 $p^0 = p(Y^0)$ 得到.

我们现在考虑能最大化社会福利的价格决定问题. 由应用经济学的通常做法，我们定义“社会福利”为消费者剩余加上总收益和减去总成本.[10] 虽然
198 社会福利的这个定义会导致社会选择理论所阐明的众所周知的困难，我们仍遵循这个定义. 我们的目的在于简单地说明. 假定公司是通常的成本最小化者. 我们记它的成本函数为 $C(y)$.

消费者剩余(CS)加上总收益(TR)的大小由图 4.3 的阴影区域表示. 当公司的产出水平由 Y 决定时，由 $p(Y)$ 得到产品的价格. 则“社会福利”定义为

$$W(Y) = \int_0^Y p(y)dy - C(Y) \tag{22}$$

假定公司选择 Y 以最大化 W. 一阶条件由 $W'(Y^*) = 0$ 给定，这里假定 $Y^* > 0$. 使用积分的微分法则(它将被简短解释)，条件 $W'(Y^*) = 0$ 可写为

$$p(Y^*) = C'(Y^*) \tag{23}$$

199 这说明价格等于 MC，这就是边际成本定价法则. 最优解的二阶充分条件由 $W''(Y^*) < 0$ 给出. 这可重新写成

$$p'(Y^*) < C''(Y^*) \tag{24}$$

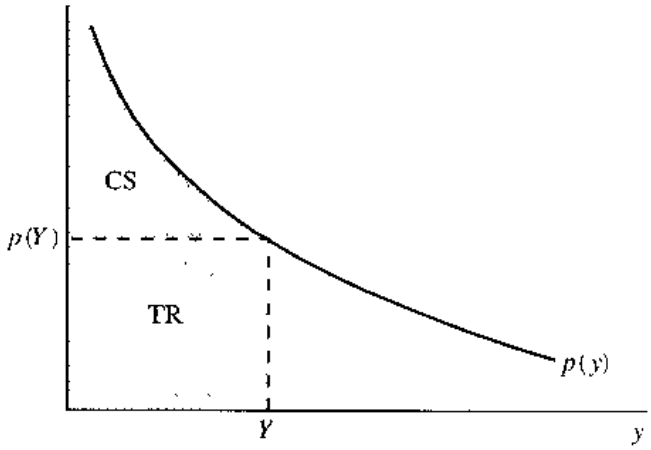


图 4.3 消费者剩余加上总收益

如果 MC 曲线在交点处上升，$C''(Y^*) > 0$，那么这个条件总是满足的. 另一方面，如果 MC 曲线在交点处下降，$C''(Y^*) < 0$，那么此条件意味着 MC 曲线在交点处比(负斜率的)反需求曲线更平滑. 我们可在图 4.4 中说明 MC 定价准则.

图 4.4(a)是关于 $C''(Y^*) > 0$ 的情形，而图 4.4(b)处理 $C''(Y^*) < 0$ 的情

形.注意在两种情形中,社会福利最大化的价格(p^*)低于利润最大化的价格(p^0),其中 $p^*=p(Y^*)$.

总之,我们可以得到下面的定理:

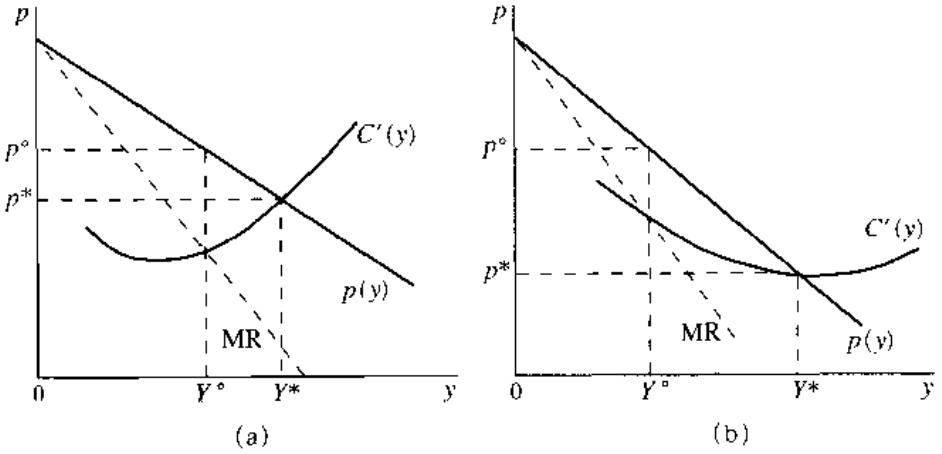


图 4.4 边际成本定价

【命题 4.3】 假设社会福利由(22)定义.若(24)成立,那么达到社会福利最大化的准则由(23)给出,其中价格等于 MC.

注:假定问题中的产业不只包含一家公司,而是包括大量的每一个都是价格接受者的公司.每一个公司最大化它的利润 $py-C(y)$,其中对公司而言,p 是给定不变的常数.(按通常的方式)假定一条在 Y^0 处上升的边际成本曲线,
200 利润最大化得出通常条件 $p=C'(Y^0)$,价格=MC.对产业中所有的公司将此相加,我们可以看到:可得到作为整个产业的 MC 定价准则.即,我们得到 MC 定价对于竞争性产业成立的著名结论.

注:为得到(23),我们利用了关于**积分微分**的著名结论.这里值得写下这个有用的结论,因为它时常用于文献中.为此,令 $f(x,\alpha)$是实值可微函数,其中 $x\in R^n$ 且 $\alpha\in R$.定义积分 $F(\alpha)$为

$$F(\alpha)\equiv\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)}f(x,\alpha)dx \tag{25}$$

其中我们可注意到 a 和 b 是 α 的可微函数.那么得到 $F'(\alpha)(\equiv dF/d\alpha)$如下:

$$F'(\alpha)\equiv\int_a^b f_\alpha(x,\alpha)d\alpha+f(b,\alpha)b'(\alpha)-f(a,\alpha)a'(\alpha) \tag{26}$$

其中 $f_\alpha\equiv\partial f/\partial\alpha$,$b'\equiv db/d\alpha$,且 $a'\equiv da/d\alpha$.函数 f,b 和 a 被假定为在 α 处可微,并且 f 在 x 处连续.对于此结论的证明,见任何一本高等微积分的教科书.如果 $b(\alpha)=\alpha$,$a(\alpha)=$常数,且 $f(x,\alpha)=f(x)$,那么(26)被简化为

$$F'(\alpha)=f(b) \tag{26'}$$

这是用来得到(23)的法则.

注：诸如公用事业公司之类的垄断公司经常用递减的成本(规模经济)来表示其特性."递减的成本"由下降的 AC 曲线所定义.[11]下降的 AC 曲线表示 $d[C(y)/y]dy<0$. 这可等价地改写为

$$C'(y)<C/y$$

201 因此 AC 曲线下降，当且仅当 MC 曲线位于 AC 曲线的下方.[12]在 MC 定价条件下，$p(Y^*)=C'(Y^*)$，因此，我们可看到

$$\begin{aligned} p^*Y^*-C'(Y^*)&=C'(Y^*)Y^*-C(Y^*)\\ &=[C'(Y^*)-C(Y^*)/Y^*]Y^*<0 \end{aligned}$$

因此对于成本递减的产业而言，在 MC 定价条件下，利润一定总是负的.[13]那么，如果在成本递减的条件下，MC 定价准则被强加于垄断公司，那么，如果没有适当的补贴给公司，公司将从市场上退出. 甚至把采用提高税收以便为补贴提供资金所可能产生扭曲的重要问题放在一边，这个用来防止公司亏损的补贴仍造成了一个基础性问题. 也就是，如果公司因亏损而被补贴，那么它将失去一个使生产成本最小的重要激励. 实际上，这种非成本最小化的行为好像经常在依靠政府补贴运转的公用事业中看到.[14]

§4.3 要素价格与平均成本曲线的形状[15]

图 4.2 明确地或含蓄地使用了通常的 U 形的 AC 曲线，这毫无疑问地体现在 Ferguson 和 Saving(1969)的思想中，他们使用类似的图. 实际上，自从 Viner(1931)的有影响的著作问世以来，通常的 U 形 AC 曲线充满于文献中. 另一方面，它也是要求学生通过通常的成本最小化过程，从给定的生产函数得
202 出成本函数的微观理论课程中的一个标准练习. 然而，如果我们不将一定的特定假设加到生产函数上，那么很难(如果不是不可能的话)得到通常的 U 形 AC 曲线的适当的生产函数. 尽管 U 形 AC 曲线可能直观上是"似乎有理的"，但是这好像大大地削弱了它的价值.

众所周知，要素价格确实影响 MC 和 AC 曲线，尽管关于这些曲线如何被影响的问题还有一些疑问. 命题 4.2 阐明了这个问题. 然而，很少有人知道，要素价格的轻微变化能导致 AC 曲线形状的剧烈变化，而不是曲线的简单移动. 同样，很少有人知道规模收益的概念也对要素价格的变化敏感：要素价格的变化能将技术从递增规模收益改变到递减规模收益，反过来也是这样. 在这一节中，我们通过一些简单例子来说明这些问题. 这些问题将帮助我们提高对诸如生产函数，AC，要素价格和规模收益等重要概念的理解，并且我们的阐述对于产业组织(例如，特定产业结构的决定)和国际贸易(例如，比较利益)能够有重要的应用.

为了简单起见，我们的例子是关于两种投入的情形(用 x_1 和 x_2 以及单一产出 y 表示)．我们用 $f(x)$表示生产函数，其中 $x=(x_1,x_2)$．令 $w=(w_1,w_2)$是投入价格向量，令成本函数 $C(w,y)$由通常的成本最小化得到，其中 $C(w,y)=w\cdot x(w,y)$，令 AC 和 MC 函数分别由 $a(w,y)\equiv C(w,y)/y$ 和 $\mu(w,y)\equiv\partial C/\partial y$ 定义．我们假定 $w_1>0,w_2>0$ 且 $y>0$．

【例 4.1】 $f(x)=x_1+\log(x_2+0.5)$，其中 $x\in\{x\geqq 0;f(x)\geqq 0\}$．

通常的成本最小化得出

$$x_1(w,y)=y-\log q,x_2(w,y)=q-0.5$$

$$C(w,y)=w_1(y-A),a(w,y)=w_1(1-A/y)$$

$$\mu(w,y)=w_1$$

其中，$q=w_1/w_2$，且 $A\equiv\log q-1+1/(2q)\equiv A(q)$．假定一个内部解，$x_1(w,y)>0,x_2(w,y)>0$，它进一步分别要求 $y>\log q$ 和 $q>0.5$．同样，$C(w,y)>0$ 也需求 $y>A$，它对所有 $q>0.5$ 都满足(因为 $q>0.5$ 时 $\log q>A$)．注意，A 仅由要素价格决定．接着我们用 $A(q^*)=0$ 定义 q^*，即用 $\log q^*=1-1/(2q^*)$定义 q^*．明显地，这样一个 q^* 惟一地存在，且 $q^*>1$．通过简单的迭代，可计算出 q^* 为 $q^*=2.1555\cdots\cdots$．另外，我们有

$$A(q)<0,\text{当 } 0.5<q<q^*;A(q)>0,\text{当 } q<q^*$$

注意，如果 $q>1$，则对 $y>a(\equiv\log q)$定义 AC 曲线，而如果 $0.5<q<1$，对所有的 y 定义 AC 曲线．在这些准备下，我们能在图 4.5 中说明平均成本(AC)和边际成本(MC)曲线，其中 $b\equiv A(q)$．

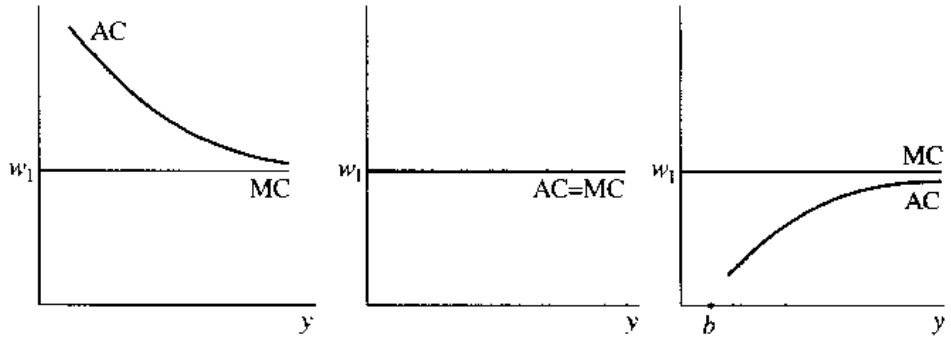


图 4.5 例 4.1 的 AC 和 MC 的形状

这样，对于例 4.1，我们可得出下列结论：

(i) 不管产出水平如何，MC 是常数，即 AC 线平行于产出轴，其中 MC=w_1．

(ii) 存在一个“关键值”q^*，使得如果 $q(\equiv w_1/w_2)<q^*$，那么 AC 曲线总是在 MC 线的上方，且随 y 的增加而下降，渐近地接近 MC 线．另一方面，如果 $q>q^*$，那么 AC 曲线总是在 MC 线的下方，且随 y 的增加而上升，渐近地接

近 MC 线.因此,AC 曲线不是 U 形的,并且它的形状由于投入价格结构的轻微变化而剧烈变化,尽管 $\alpha(x,y)$ 在 w 处连续.

204 (iii) 不变的规模收益(即 AC=MC)奏效,当且仅当 $q=q^*$,在此情形中 $AC=w_1$.递增规模收益(IRS)对所有 $q,0.5<q<q^*$ 奏效,递减规模收益(DRS)对 $q>q^*$ 奏效.也就是说,q 在 q^* 附近很小的变动,递减规模收益(IRS)会剧烈地变化到(DRS)(或者,反过来也是这样).

让我们举一个国际贸易中的例子.考虑包括两个国家"J"和"K"(比如说日本和韩国)的世界,在 y(比如说"钢铁")的生产中有相同的技术,其中我们分别称 x_1 和 x_2 为"资本"和"劳动力".既然在两个国家间,要素价格结构一般是不同的,那么 AC 的形状也不同,假定 K 国相对地比 J 的劳动力丰富,就是说 $q^J<q^K$,其中 $q\equiv w_1/w_2$.如果 $q^J<q^*<q^K$,那么对每一产出水平,K 国能比 J 国更便宜地生产商品,这里规模经济在 J 国奏效,规模不经济在 K 国奏效.

【例 4.2】 我们现在考虑下面的生产函数:

$$f(x)\equiv[x_1+\log(x_2+0.5)]^{1/2},\text{其中 } x\in\{x\geqq 0;f(x)\geqq 0\}$$

在例 4.1 中,$\partial^2 f/\partial x_1^2=0$ 且 $\partial^2 f/\partial x_2^2<0$,而在例 4.2 中,我们可通过简单地计算证明 $\partial^2 f/\partial x_1^2<0$ 和 $\partial^2 f/\partial x_2^2<0$.也就是说,例 4.2 体现了边际生产力递减的法则.通常的成本最小化得出

$$x_1(w,y)=y^2-\log q,x_2(w,y)=q-0.5$$

$$C(w,y)=w_1(y^2-A),\alpha(w,y)=w_1(y-A/y)$$

$$\mu(w,y)=2w_1y$$

同前面一样,这里 $q\equiv w_1/w_2$ 和 $A\equiv\log q-1+1/(2q)$.同样,$x_1(w,y)>0$,$x_2(w,y)>0,y>0$ 和 $C(w,y)>0$ 要求 $q>0.5$ 并且 $y^2>A$.对于 $w_1=w_2=1$ 和 $w_1=e,w_2=1$ 的 AC 和 MC 的形状在图 4.6 中图示.也就是说,当 $w_1=w_2=1$ 时,AC 是 U 形的,包括 IRS 和 DRS 部分.当 $w_1=e$ 且 $w_2=1$ 时,IRS 部分消失,且 AC 总是单调递减.在 AC 和 MC 之间没有相交.

在例 4.1 和 4.2 中,为简便起见,我们的假定排除了由诸如"固定成本"和"不可分性"之类因素造成的复杂情况.强调这类因素有重要的真实性成分,它在文献中为得到下降的成本曲线经常可见.另一方面,尽管我们的例子能够相应地修改,但我们有关 AC 曲线形状和规模收益对要素价格敏感的基本结论仍将持不变.同样,我们不能过分强调这些因素,或者至少我们应该正确地理解它们.为此,只需回忆一下 Frank Knight 的重要论文(1921),例如,其中他陈述到:"过分强调任何数量的商品可以由一种可行的办法制造出来这一事实是错误的"(333 页).同样,下面 Kaldor(1935,34 页)的评论应有些趣味:"在长期经营中,所有要素的供给——甚至由企业家自己提供的资源——能够被假设为可变的,因而没有'固定成本'".

205

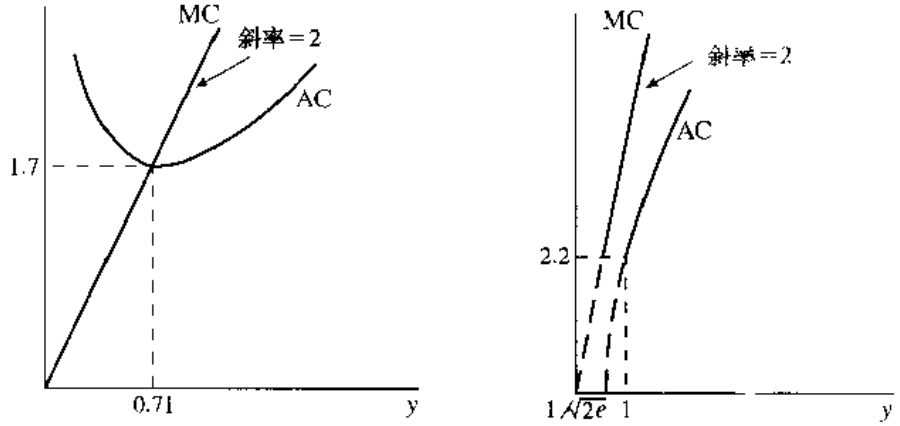


图 4.6　例 4.2 的 AC 和 MC 的形状

在文献中,经常主张直到一定产量水平(比如说,y^*)为止,规模经济皆奏效,而超出 y^* 后,它们被"耗尽",其中规模经济依据下降的 AC 曲线而被定义.然后我们经常看到确定这样一个命题的特殊产业的实证性研究.我们的例
206 子说明,既然要素价格确实随时间而变化,基于时间序列数据的研究就应谨慎进行.

§ 4.4　劳动力供给:收入—闲暇选择

通过教科书和专业杂志中论文的各种讲解,关于在个人的理性行为下对劳动供给曲线讨论,对我们来说已很熟悉.至今人们已清楚地知道,根据消费者选择理论中的 Hicks－Slutsky 等式,我们能很好地进行这个问题的分析.本节中,我们将讲解这一讨论的要旨,并得到劳动供给曲线向上倾斜的充要条件.[16]我们首先考虑非工资收入被忽略的较简单的情形,然后考虑有非工资收入的情形.这两种情形的分析是 Hicks　Slutsky 等式的一个应用.

4.4.1　无非工资收入的情形

我们考虑一位最大化其效用 $u(c,x)$ 的消费者,其中 c 和 x 分别度量实际消费和每单位时间(比如说一天)闲暇的数量.假定他或她由工资得到他或她的全部收入.每单位时间他或她的劳动数量是 $(a-x)$,其中 a 是正的常数(比如说,24 小时).令 p 是消费的价格水平,w 是每单位时间的货币工资率.那么他或她的预算条件可写作

$$pc \leqq w(a-x) \text{ 或 } pc \leqq w\ell$$

其中 $\ell \equiv a - x$，它表示劳动的供给.这个预算条件可等价地重写为

$$pc + wx \leqq wa (\equiv Y) \tag{27}$$

一般地，c 是向量.然而对此情形的分析类似于随后的分析，因此将其留给有兴趣的读者.

收入—闲暇选择(ILC)的问题现在能用公式表示为消费者选择(c, x)，以使

207

(ILC) Maximize $u(c, x)$

约束条件为

$$pc + wx \leqq wa (\equiv Y), c \geqq 0, a \geqq 0, x \geqq 0$$

令 $q \equiv w/p$(实际工资率)，上面最大化问题的最优点能很容易地图示为图4.7中的点 A 和 B，其中最优点随实际工资率 q 的增长而从 A 移动到 B.图4.7中，实际工资率 q 的增长减少了闲暇消费的数量 x，因此增加了劳动的供给 ℓ，它导致了通常的向上倾斜的劳动供给曲线.另一方面，读者应能容易构造出相反结论成立的图表.通过画一族不同构形的无差异曲线，我们能画出一个图，其中 q 上升时 x 上升，导出一条"向后弯"的劳动供给曲线(当实际工资率上升时劳动供给下降).

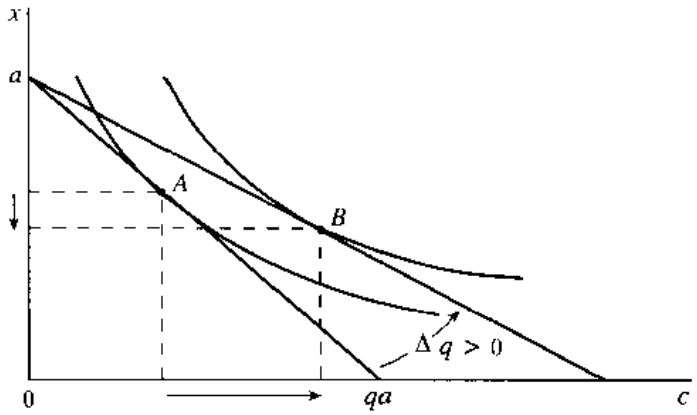


图 4.7 收入—闲暇替换的图示

读者可能疑惑在什么情况下我们得到通常的上升的劳动供给曲线，在什么情况下我们得到一条向后弯的劳动供给曲线.图 4.8 表明问题的关键在于无差异曲线斜率，即，消费 c 和闲暇 x 之间的**边际替代**率(MRS).在图4.8(a)，实际工资率 q 低且预算线陡，因此无差异曲线也陡(至少在预算线的切点处).当实际工资率 q 充分低时，消费 c 的水平非常小，且 c 和 x 之间的 MRS 非常有利于 c（为得到一个单位的 c 增长，消费者愿意牺牲更多单位的 x）.

208 在此情形中，当 q 上升时 x 趋于下降，因此，我们得到通常的上升的劳动供给

曲线.

另一方面,图 4.8(b)中,实际工资 q 高并且消费水平 c 也高,在此情形中预算线将是平的并且在切点处的无差异曲线也将非常平.那么 x 和 c 之间的 MRS将不利于 c.为了得到一个单位的 x 增长,消费者愿意牺牲更多单位的 c.因此,如果 q 充分高,那么我们得到一条向后弯的劳动供给曲线.

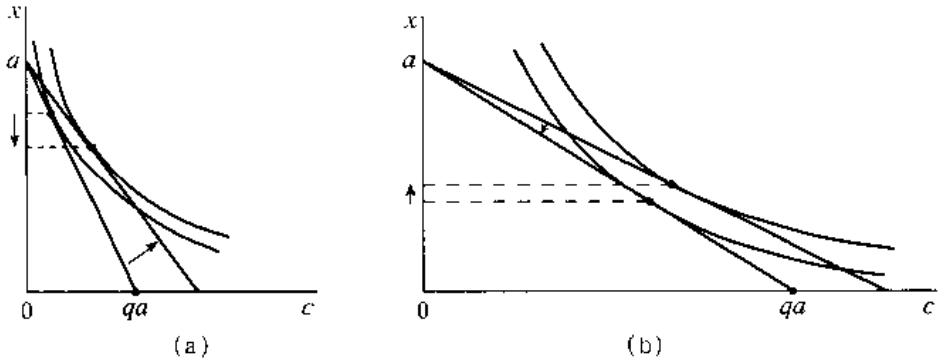


图 4.8　上升/向后弯的劳动供给曲线后面的选择

为了使上面的讨论更准确和严密,我们现在进行数学分析.为此,回想前面的效用最大化问题(ILC),并且假定在最优解处 $c>0, a>x>0$(内部解)和 $pc+wx=wa$ 或者 $pc=w\ell$(非饱和).我们可以将这个最优化问题的解写作

$$c=c(p,w,Y)=c(p,w,wa)\equiv\tilde{c}(p,w) \tag{28a}$$

$$x=x(p,w,Y)-x(p,w,wa)\equiv\tilde{x}(p,w) \tag{28b}$$

收入 Y 依赖于(要素)价格 w,使该问题有点不同于传统的消费者选择理论.

209　由 Hicks－Slutsky 等式,我们可立即得到

$$\frac{\partial c}{\partial p}=s_{11}-c\frac{\partial c}{\partial Y},\frac{\partial c}{\partial w}=s_{12}-x\frac{\partial c}{\partial Y} \tag{29a}$$

$$\frac{\partial x}{\partial p}=s_{21}-c\frac{\partial x}{\partial Y},\frac{\partial x}{\partial w}=s_{22}-x\frac{\partial x}{\partial Y} \tag{29b}$$

其中 s_{ij}是净替代项.令 $S\equiv[s_{ij}]$,S 是 2×2 的净替代矩阵.回想定理 2.4,S 是半负定的,且

$$s_{11}<0, s_{22}<0, s_{12}=s_{21}>0 \tag{30a}$$

$$s_{11}p+s_{21}w=0, s_{21}p+s_{22}w=0 \tag{30b}$$

回想 $Y\equiv wa$,因为 $a-x=\ell$,我们可以由(28a)和(28b)算出

$$\frac{\partial\tilde{x}}{\partial w}=\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial x}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial w}=(s_{22}-x\frac{\partial x}{\partial Y})+\frac{\partial x}{\partial Y}a=s_{22}+\ell\frac{\partial x}{\partial Y} \tag{31}$$

定义劳动供给函数 ℓ 为

$$\ell(p,w)\equiv a-\tilde{x}(p,w) \tag{32}$$

那么由(31),我们得到

$$\partial \ell / \partial w = - s_{22} - \ell \partial x / \partial Y \tag{33}$$

因为 $s_{22} < 0$,$\partial x / \partial Y < 0$ 足以得到$\partial \ell / \partial w > 0$. 条件$\partial x / \partial Y < 0$ 意味着闲暇是劣等商品. 另一方面,如果闲暇是正常商品,即如果$\partial x / \partial Y > 0$,那$\partial \ell / \partial w$ 的符号变得不确定了.

同样,由(28a)、(29b)和 $Y \equiv wa$,我们可以计算

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial p} = \frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial x}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial p} = s_{21} - c\frac{\partial x}{\partial Y}$$

其中我们可以注意到$\partial Y / \partial p = 0$. 因此我们得到

$$\partial \ell / \partial p = - s_{21} + c\partial x / \partial Y \tag{34}$$

因为 $s_{21} > 0$,如果$\partial x / \partial Y < 0$,即如果闲暇是劣等商品,我们有$\partial \ell / \partial p < 0$. 当$\partial x / \partial Y > 0$ 时,$\partial \ell / \partial p$ 的符号又变得不确定了.

210 利用(33)和(34),并注意到 $s_{21} = - s_{22} w / p$(它由 $s_{21} p + s_{22} w = 0$ 得到),我们有

$$\begin{aligned} d\ell &= \frac{\partial \ell}{\partial p}dp + \frac{\partial \ell}{\partial w}dw + (- s_{21} + c\frac{\partial x}{\partial Y})dp - (s_{22} + \ell\frac{\partial x}{\partial P})dw \\ &= (s_{22} w dp / p - s_{22} dw) + (cdp - \ell dw)(\partial x / \partial Y) \\ &= w s_{22}(dp / p - dw / w) + (pcdp / p - w\ell\, dw / w)(\partial x / \partial Y) \\ &= w s_{22}(dp / p - dw / w) + w\ell(dp / p - dw / w)(\partial x / \partial Y) \\ &= [w s_{22} + w\ell(\partial x / \partial Y)](dp / p - dw / w) \end{aligned}$$

其中我们可以注意到,在最优解处 $pc = w\ell$. 设 $\ell(p, w) \equiv \ell^*(q)$,其中 $q \equiv w / p$. 注意到函数 $\tilde{x}(p, w)$的齐次性,并且进而 $\ell(p, w)$的齐次性,我们有

$$d\ell^* / dq = - w(s_{22} + \ell\partial x / \partial Y) / q \tag{35}$$

如果闲暇是劣等商品($\partial x / \partial Y < 0$),那么劳动供给曲线总是向上倾斜($d\ell^* / dq > 0$). 另一方面,如果$\partial x / \partial Y > 0$,劳动供给曲线可以向上倾斜或向后弯($d\ell^* / dq \gtrless 0$). 换句话说,闲暇劣等性对于向上倾斜的劳动供给曲线是充分的,闲暇的正常性对于向后弯的劳动供给曲线总是必要的.

向上倾斜的劳动供给曲线的充要条件能容易地由(35)得到,即

$$s_{22} + \ell\partial x / \partial Y < 0 \tag{36}$$

即,消费和闲暇之间的 MRS 必须对消费足够有利. 如果自身补偿价格效应(s_{22})超过任何相反的收入效应($\ell\partial x / \partial Y$),那么劳动供给曲线向上倾斜. 也就是说,如果无差异曲线足够陡(至少在与预算线相切的点),这可能是 c 的充分低水平的情形,那么劳动供给曲线将向上倾斜. 同样,对于充分高的 c 的水平,

无差异曲线很可能足够平的，在此情形中(30)中的不等式反向以得到向后弯的劳动供给曲线.

4.4.2 有非工资收入的情形

在4.4.1中，我们假定所有收入来自劳动. 现在我们引入非工资收入. 设 py 表示消费者的名义非工资收入，他的预算(27)将被改写为

$$pc + wx \leqq wa + py(\equiv Y) \tag{27'}$$

211

在约束(27')，$c \geqq 0$，$a \geqq 0$ 和 $x \geqq 0$ 的条件下消费者选择 c 和 x 使 $u(c,x)$ 最大. 再假定在最优解处 $c>0$ 且 $a>x>0$(内部解). c 和 x 的需求函数可写作

$$c = c(p,w,Y) = \tilde{c}(p,w,y) \tag{28'a}$$

$$x = x(p,w,Y) = \tilde{x}(p,w,y) \tag{28'b'}$$

注意，事实上 Hicks-Slutsky 等式(29)成立，事实上(30)也成立. 回想 $Y \equiv wa + py$，我们又可以由(28b)和(29b)得到(31).

现在定义劳动供给函数 ℓ 为

$$\ell(p,w,y) \equiv a - \tilde{x}(p,w,y) \tag{32'}$$

分析的其余部分按类似的方式进行. 我们能证明对本情形(36)也成立. 证明留给有兴趣的读者. 总之，对于两种情形我们得到下面的定理.

【命题 4.4】 劳动供给曲线向上倾斜的充要条件由(36)给出，即

$$s_{22} + \ell \partial x / \partial Y < 0$$

注：劳动供给理论和向后弯的劳动供给曲线的可能性在诸如 Scitovsky (1951，第 5 章)；Henderson 和 Quandt(1980，24～25 页)；Musgrave(1959，第 11 章)；Layard 和 Walters(1978，304～310 页)；Deaton 和 Muellbauer(1980，第 11 章)的教科书中以及诸如 Hanoch(1965)；Ashenfelter 和 Heckman(1974)；Abbott 和 Ashenfelter(1976)的专业性杂志文章中已经讨论过. Ashenfelter 和 Heckman (1974)以及 Abbott 和 Ashenfelter(1976)根据 Hicks-Slutsky 等式明确地阐述了该理论，并且进行了实证性的调查. Battalio，Green 和 Kagel(1981)利用关于非人类工人(鸽子)的实验数据研究了收入—闲暇选择. 他们观察了在较高工资

212 水平处向后弯的劳动供给曲线. Morishima(1952)的经典文章中对消费者理论进行了扩展，不仅考虑了商品和闲暇，还考虑了像货币和债券这样的金融资产. 他的主要分析工具也是 Hicks-Slutsky 等式. 假定(人类)工人典型地持有这样的资产，那么这个研究应该与收入—闲暇选择的问题最相关. 遗憾的是，Morishima 的研究在收入—闲暇选择的实证性研究中被忽略. 注意既然诸如鸽

子这样的非人类工人不拥有资产，那么 Battalio, Green 和 Kagel(1981)所做的实证性研究与检验收入—闲暇选择的传统理论很相关. 作为理论的进一步精确化，Deaton 和 Muellbauer(1980)的书包括关于预算条件的非线性和消费者的跨时期选择的讨论. Blinder(1974，第 3 章)和其他人研究了跨时期情况中劳动—闲暇选择的问题. 关于劳动供给的更全面讨论，见 Killing sworth(1983).

§4.5 管制约束下的公司行为

管制经济学中一个著名的结论是"公平收益率"约束的施加(施加于公共事业部门和其他产业)诱导追求最大利润的公司去持有更大量的资本设备.[17] 这一论断由 Averch 和 Johnson(1962)提出，并在文献中被广泛讨论.

现在它甚至出现在大学本科教科书中(例如，见 Binger 和 Hoffman 1988，396～399 页). 它的逻辑结构以及经济解释和含义已经在讨论过程中得到阐明.

这样的一个阐明由 Takayama(1969)作出，他指出上述论断(现称为 **Averch-Johnson 效应**或 **A-J 效应**)的 Averch 和 Johnson 的初始"证明"令人遗憾是错误的，因为它含有混淆了沿曲线运动和曲线移动的错误. Takayama(1969)然后指出，如果我们遵循 Averch 和 Johnson 的 $0<\lambda^*<1$ 假设，那么 A-J 效应仍是正确的，其中 λ^* 表示被管制公司的相关最大化问题的拉格朗日乘数.[18]

213 El-Hodiri 和 Takayama(1973)然后提供了一个不假设 $0<\lambda^*<1$，A-J 效应同样成立的证明. Zajac(1972)调查了与这一 λ^* 有关的数学问题，而 Zajac(1970)涉及 A-J 效应的图形结构. 这里将通过首先证明 $0<\lambda^*<1$ 来证明 A-J 效应. 与 El-Hodiri 和 Takayama(1973)不同，我们将不会明确地利用收益函数 $G(L,K)$ 的凹性.

遵循 Averch 和 Johnson(1962)以及其他一些人，我们考虑使用两种投入，劳动(L)和资本(K)，来生产单一产出(Y)的垄断者. 生产函数由 $F(L,K)$ 限定，其中我们假设

$$F(0,0)=0, F_L\equiv\partial F/\partial L>0, F_K\equiv\partial F/\partial K>0$$

令 p 是产出的价格，并且 $p(Y)$ 是反需求函数且 $p'(Y)<0$. 公司的收益函数由 $R(Y)\equiv p(Y)Y$ 定义，其中我们假定 $R'>0$，即边际收益产量是正的. 令 w 和 r 分别是工资率和资本的租金率，公司的利润写作

$$\pi\equiv R(Y)-wL-rK \tag{37}$$

如果公司不受任何管制约束，那么公司在

$$Y\leqq F(L,K) \tag{38}$$

和 $Y\geqq 0, L\geqq 0, K\geqq 0$ 的约束下选择 Y, L 和 K，以使它的利润(π)最大.

令(Y^0, L^0, K^0)表示这个问题的解，并假设是一个内部解($Y^0>0, L^0>0, K^0>0$)，我们可以将一阶必要条件写作

$$G_L(L^0, K^0)=w, G_K(L^0, K^0)=r \tag{39}$$

其中，$G(L, K)\equiv R[F(L, K)]$，$G_L\equiv \partial G/\partial L$ 且 $G_K\equiv \partial G/\partial K$. 注意在最优处我们有 $Y^0=F(L^0, K^0)$. 在文献中，约束(38)经常以方程形式表示：

$$Y=F(L, K) \tag{38'}$$

214 它将得出与约束(38)一样的结论.

条件(39)是一个熟悉的法则，它表明每一个要素的边际收益产品等于各自的要素价格. 我们假定二阶条件也满足，因此条件(39)对于最优解来说也是充分的. 如果我们假定 $G(L, K)$ 是凹的，[19]那么条件(39)为全局最优解提供了一个充要条件.

当公司受管制约束时，与没有施加这样的约束相比，每一要素的最优使用自然是不同的. 我们现在假定公司受此约束，资本的收益率不超过一个特定的"公平"价值. 令 s 表示这样一个"公平收益率". 管制约束可写作

$$(R-wL)/K\leqq s, \text{即} -(R-wL-sK)\geqq 0 \tag{40}$$

现在公司的问题是在(38)和(40)以及 $Y\geqq 0, L\geqq 0$ 的约束下使利润 π 最大. 令 Y^*, L^*, K^* 是该问题的解，并且假设 $Y^*>0, L^*>0, K^*>0$. 管制约束现在改写为

$$\pi^*+rK^*\leqq sK^* \text{或} \pi^*\leqq(s\quad r)K^*$$

其中，π^* 是在(R^*, L^*, K^*)处赋值的 π 的值.

假定 $\pi^*>0$，那么我们可以推出[20]

$$s>r \tag{41}$$

许多作者仅是简单地假定(41)，而不是去推导它. 拉格朗日函数为

$$\Phi\equiv[R(Y)\quad wL-rK]+\lambda[sK-R(Y)+wL]+\mu[F(L, K)\cdot Y]$$

215 得一阶条件为

$$(1-\lambda^*)R'^*=\mu^* \tag{42a}$$

$$\mu^* F_L{}'=(1-\lambda^*)w \tag{42b}$$

$$\mu^* F_K{}^*=r\quad \lambda^* s \tag{42c}$$

$$sK^*-R^*+wL^*\geqq 0, \lambda^*(sK'\quad R^*+wL^*)=0 \tag{42d}$$

$$F(L^*, K^*)-Y^*\geqq 0, \mu^*[F(L^*, K^*)-Y^*]=0 \tag{42e}$$

$$\lambda^* \geqslant 0 \text{ 且 } \mu^* \geqslant 0 \tag{42f}$$

其中，$F_L \equiv \partial F / \partial L$，$F_L{}^* \equiv F_L(L^*, K^*)$，$R'^* \equiv R'(Y^*)$，$R^* \equiv R(Y^*)$，等等，我们假定对于最优解二阶条件满足，并且对 (Y, L, K) 的相关范围 $R' > 0$，$F_L > 0$，且 $F_K > 0$.

现在我们可以断言

$$\mu^* > 0 \text{ 且 } 0 < \lambda^* < 1 \tag{43}$$

为证明这一点，我们首先假定 $\mu^* = 0$. 那么由(42a)，我们有 $\lambda^* = 1$. 由(42c)，我们有 $r - s = 0$，这与(41)矛盾. 因此 $\mu^* > 0$. 同样，如果 $\lambda^* = 1$，那么由(42a) $\mu^* = 0$，这与 $\mu^* > 0$ 矛盾. 因此 $\lambda^* \neq 1$. 假设 $\lambda^* > 1$. 那么由(42a)，我们有 $\mu^* < 0$，这又与 $\mu^* > 0$ 矛盾，因此 $\lambda^* < 1$. 为说明 $\lambda^* \neq 0$，我们只需假定 $K^0 \neq K^*$，管制约束(40)是有效的，[21] 并且(39)有惟一解. 实际上，如果 $\lambda^* = 0$，那么(42a)到(42c)变为 $G_L{}^* = w$ 和 $G_K{}^* = r$. 这与(39)是一样的，因此 $K^0 = K^*$ (和 $L^0 = L^*$)，这与 $K^0 \neq K^*$ 矛盾. 因此，我们已经建立了(43). 上面证明的 $0 < \lambda^* < 1$ 的命题已经在文献中讨论过. Averch 和 Johnson 的(1962，1056 页)证明等于就是假定它. El－Hodiri 和 Takayama(1973)证明如果函数 G 是凹的，那么可以省去这个假定. 我们上面已证明这样的凹性假定可被省去.

216 现在利用(43)，我们可以简化(42a)到(42c)如下：[22]

$$G_L{}^* = w \tag{44a}$$

$$(1 - \lambda^*) G_K{}^* = r - \lambda^* s \tag{44b}$$

$$sK^* - G^* + wL^* = 0 \tag{44c}$$

$$Y^* = F(L^*, K^*) \tag{44d}$$

(44a)到(44c)，三个方程决定了 L^*，K^* 和 λ^* 的值，这进而又由(44d)决定了 Y^*. 注意，L^*，K^* 和 λ^* 是 s 的函数.

由(44b)，我们可得

$$G_K{}^* - r = \lambda^* (G_K{}^* - s) \tag{45}$$

因为 $\lambda^* > 0$，那么(45)实际上推出 $(G_K{}^* - r)$ 和 $(G_K{}^* - s)$ 有相同的符号. 如果 $G_K{}^* - r > 0$ 且 $G_K{}^* - s > 0$，那么由(45) $0 < \lambda^* < 1$ 推出 $G_K{}^* - s > G_K{}^* - r$，或者 $r > s$，它与(41)矛盾的. 因此我们一定有[23]

$$G_K{}^* - r < 0 \text{ 且 } G_K{}^* - s < 0 \tag{46}$$

在此情况中，$0 < \lambda^* < 1$，并且实际上(45)推出 $r < s$，这符合(41).

微分(44c)，并且注意(44a)，我们得

$$K^* = (G_L{}^* - w)\frac{dL^*}{ds} + (G_K{}^* - s)\frac{dK^*}{ds} = (G_K{}^* - s)\frac{dK^*}{ds}$$

因此根据(46)，

$$\frac{dK^*}{ds} = K^*/(G_K{}^* - s) < 0 \tag{47}$$

217 这意味着公平收益率(s)的下降使 K^* 增加,这是 A-J 效应.[24]注意,在现在的 A-J 效应证明中,我们没有明显利用收益函数的凹性.

我们可简短地提及成本最小化.因为 $G_L = R'F_L$ 且 $G_K = R'F_K$,则(44a)和(44b)推出

$$F_L{}^*/F_K{}^* = w(1-\lambda^*)/(r-\lambda^* s) \neq w/r \tag{48}$$

最后的不等式来自 $s \neq r$.因此边际替代率不等于要素价格比率.在管制约束下,通常意义上的成本最小化与利润最大化不相适合.这个结论是 Zajac(1970)利用几何方法得到的.Zajac(1970,120 页)那时评论说,"既然超出必要的公司成本意味着资源的无效使用,那么社会是损失者."总之,我们得到下面的结论.

【命题 4.5】 在模型的限定下,管制约束导致追求最大利润的垄断厂商拥有更大存量的资本.该公司不是传统意义上的成本最小者.

最后,澄清一下 Averch 和 Johnson(1962)中的错误性质可能是值得的,因为这种错误在文献中并非是不常见的.假设 $0<\lambda^*<1$,Averch 和 Johnson 改
218 写(44b)为

$$G_K{}^* = r - \alpha, \text{其中 } \alpha \equiv \frac{s-r}{1-\lambda^*}\lambda^*$$

由于 $s>r$ 且 $0<\lambda^*<1$,我们有 $\alpha>0$.遵循 Averch 和 Johnson,假定 $G_{KK}(\equiv \partial G_K/\partial K)<0$.既然没有管制约束时 $G_K = r$ 且 $\alpha>0$,那么 Averch 和 Johnson 认为在管制约束存在时,K 一定增大.这个论点是错误的.相关的无管制最优解条件可更准确地写作 $G_K(L^0, K^0) = r$,并且相应的有管制的最优解条件是 $G_K(L^*, K^*) = r - \alpha$.因此我们可以证明当 $L^* = L^0$ 时,正如 Averch 和 Johnson 中的一样,$\alpha>0$ 推出 $K^* > K^0$.然而,稍微思考一下可以看出证明 $L^* = L^0$ 是很难的,即无论有没有管制约束,公司对劳动的使用是不变的.

问题的要点可在图 4.9 中说明,其中,在公平收益管制被引入之前,AB 曲线表示边际收益产品(G_K)曲线.资本 K^0 是针对一给定的 r 值的无管制最优值.在 $0<\lambda^*<1$ 的条件下,我们有 $\alpha>0$,因此 r 被减到 $r-\alpha$.Averch 和 Johnson 认为带管制约束的资本最优值在图 4.9 中由 K^1 给定.隐含地假定 G_K 曲线(或图 4.9 中的 AB 曲线)保持不变,他们得出结论,如果 G_K 曲线向下倾斜,则 $K^1 > K^0$.收益率约束的引入增加了资本的使用.既然 AB 曲线是在 L
219 固定在劳动力无管制的最优值 L^0 的假设下画出的,那么该论点是错误的.由于管制约束的引入,劳动力的最优值将改变.既然在所用资本的每一个水平上,资本的边际产品一般是所雇佣劳动力的函数,那么这最终将导致 G_K 曲线的移动.如果 G_K 曲线将向下移动很多,那么我们得不出 r 到 $r-\alpha$ 的减少将增加资本使用的结论,这一点可在图 4.9 中说明.换句话说,只有确定 G_K 曲线

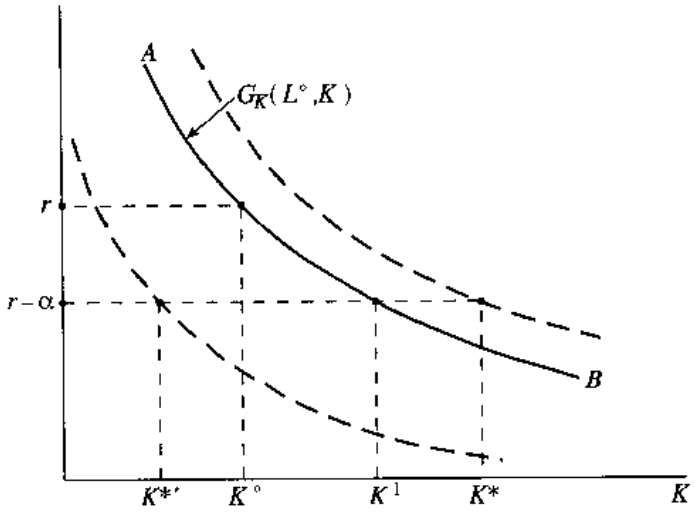


图 4.9 Averch-Johnson 证明的图示

将按哪一个方向移动并且它将移动多少时，我们才能通过上面的讨论决定收益率约束的引入是否将增加公司使用的资本数量. 总之，由于忽略了由劳动的最优值变化导致的 G_K 曲线移动，Averch 和 Johnson 的论点包含了一个混淆沿曲线运动和曲线移动的错误.[25]我们对 A-J 效应的证明避免了这样的错误.

注：除了令人遗憾地包含有 Takayama(1969)所阐明并在上面说明的简单却严重的错误外，Averch 和 Johnson(1962)所分析的问题是相当简单的. 尽管这个问题现在看起来在文献中过分，但它将提供给我们一个非线性规划的应用的简单例子. 这一节就是按此精神写的. 对该问题有兴趣的读者可进一步阅读，Crew 和 Kleindorfer(1979 和 1986)；Averch(1987)；Berg 和 Tschirhart(1988)以及 Westfield(1965)，Kahn(1970)和(1971)，Stein 和 Borts(1972)，Bailey(1973).

§4.6 满负荷问题

4.6.1 引言

考虑一个生产单一的不可储存的商品(比如说，电)的垄断者. 除了不可储存性外，假定产出有下列三个其他的特性：

220 (a) 即使价格被面定，对它的产出需求 $D(p,t)$ 随时间(t)波动，比如说 $\bar{p}$ (如图 4.10 所示).

(b) 它的生产需要昂贵的“生产能力”或“资本”(大规模的厂房设备，比如说 K).

(c) 要求公司满足对它产出的最高需求(这在图 4.10 中表示为 OA).

注意,电典型地满足所有这些特性.如果我们相当宽松地解释条件(c),那么我们能找到许多具有上述特性商品的例子.这些例子包括电话服务,运输服务(公路,铁路和航空),饭店和许多其他服务产品.

如果公司必须有生产能力 K 的水平来满足最大需求 OA,那么它的生产能力的某些部分对于非高峰期间可能不得不是闲置的.因为假定厂房和设备是昂贵的,那么这可能导致巨大的"浪费".如果商品是可储存的,那么该问题消失(或者,至少变得相当不重要),因为公司可以在非高峰期间储存一些产出,在高峰期间卖出它.但是因为假定产出是不可储存的,所以这是不可能的.

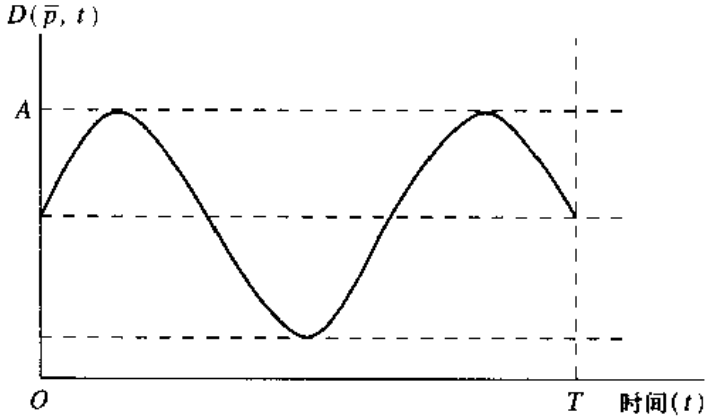


图 4.10 满负荷问题的图示

在文献中,有人已经建议为避免这样的浪费,应在不同时期索取不同的价
221 格.人们提议公司在非高峰期降低的价格以便鼓励对产出的需求,而在高峰期中索取较高的价.设计一个最优价格政策的问题称为满负荷问题.[26]满负荷问题是对于给定的计划期限内选择价格的最优路径问题.尽管需求可以在整个期间连续地变化(如图 4.10 所说明的),但是连续地改变价格是不实际的.那么,我们假定价格在商散的时间区间变化,并且在价格固定的每个时间区间中对商品的需求保持不变(对于需求随时间连续变化且价格相应地连续变化的情形,见 Takayama 1985,671~684 页).

4.6.2 一个福利最大化的垄断者的情形

对于最优化有两个标准.一个是使某种社会福利最大,另一个是使整个规定时间期限内的利润最大.在文献中(例如,Steiner 1957; Williamson 1966)典型地选择前一标准,并且福利被定义为整个期间内的消费者剩余加上总收益的和减去总成本.正如前面提到的,社会福利的这个概念能导致众所周知的困难.然而,我们再次遵循这一概念.这里我们的目的又是说明性的.我们只希望

通过非线性规划的直接应用，得到文献中的结论（它典型地由图解得到）.这最终会有助于扩展此处所讨论的问题，当我们面对复杂的现实问题时，或当我们希望分析理论上更复杂的问题时，这些问题的解显然不能使用图表方法得到.

222 因此，同4.2节一样，我们假定对于时期 t 的社会福利定义为

$$W_t \equiv CS_t + TR_t - TC_t \tag{49}$$

其中对时期 t，W_t = 社会福利，CS_t = 消费者剩余，TR_t = 总收益，TC_t = 总成本.遵循惯例，我们写需求函数为

$$y_t = D(p_t, t) \tag{50}$$

其中 Y_t 和 p_t 分别表示时期 t 的产量和价格.下标 t 指时期 t，因此它也表示相关的变量是时间的函数.假定需求函数对每一个 t 向下倾斜，或者对所有 p_t 和 t，$\partial D/\partial p_t < 0$，我们改写(50)为

$$p_t = p(y_t, t)，其中 \partial p/\partial y_t < 0 \tag{51}$$

那么消费剩余加上总收益等于（参见图4.3）：

$$CS_t + TR_t = \int_0^{Y_t} p(y_t, t)\,dy_t \equiv F(Y_t, t) \tag{52}$$

因为 $\partial^2 F/\partial Y_t^2 = \partial p/\partial y_t < 0$，函数 F 对于 Y_t 是严格凹的.

再次按照文献中通常的假设（例如 Steiner 1957；Williamson 1966），我们假定产出 Y_t 依赖于生产能力 K 的大小和可变要素向量 L_t.我们假定随 Y_t 增加，生产能力利用程度以固定的正比率 b 增加，故 bY_t 代表当产出水平是 Y_t 时生产能力的利用程度.令 T 是公司的计划期间.[27]则生产能力约束可写为

$$bY_t \leqq K，t = 1, 2, \cdots, T \tag{53}$$

这里我们注意下标 t 未附加于 K，即 K 不是时间的函数.我们也假定 L_t 和 Y_t 之间有面定的关系 $L_t = aY_t$，这里 a 是每单位产出所要求的可变投入向量.我们假定 a 在时间上是固定的，与 Y_t 无关.我们假定生产函数是固定系数型的.令 w 是可变投入的价格向量，故 $(w \cdot a)Y_t$ 代表在第 t 时期的总可变成

223 本.我们假定 w 在时间上和相关产出水平上是固定的（公司不是垄断购买者）.我们假定对每个 t，资本存货成本为每单位资本 r 美元，这里 r 假定是正的常数.则时期 t 的总成本是

$$TC_t = (w \cdot a)Y_t + rK$$

把这个与(49)和(52)结合起来，T 个时期内的社会总收益为

$$W\left(\equiv \sum_{t=1}^{T} W_t\right) = \sum_{t=1}^{T} [F(Y_t, t) - (w \cdot a)Y_t - rK]^{[28]} \tag{54}$$

公司可选择 p_t 的时间路径或 Y_t 的时间路径.但是，给定(50)和(51)，一

个策略的选择自然地推出另一个，并且我们假定公司采取两种策略的哪一种是不会产生什么差别的.这里我们假定公司采纳选择 Y_t 的时间路径的策略.

224 因此满负荷问题可陈述为选择 $Y_t, t=1,2,\cdots,T$，和 K 以最大化(54)中定义的 W，满足生产能力限制的约束(53)，$Y_t \geqq 0, t=1,2,\cdots,T$，和 $K \geqq 0$. 令 λ_t 为(53)的拉格朗日乘数，我们可写这个问题的拉格朗日函数为

$$\Phi \equiv \sum_{t=1}^{T}[F(Y_t,t)-(w\cdot a)Y_t - rK]+\sum_{t=1}^{T}\lambda_t(K-bY_t) \tag{55}$$

为简化起见，略去表示最优解的(*)，并且假定一个内部解(在最优处，$Y_t>0, t=1,2,\cdots,T$ 且 $K>0$)，[29]一阶条件可容易地写作

$$\partial\Phi/\partial Y_t = [F_Y(Y_t,t)-(w\cdot a)]-b\lambda_t=0, t=1,2,\cdots,T \tag{56a}$$

$$\partial\Phi/\partial K = -rT+\sum_{t=1}^{T}\lambda_t=0 \tag{56b}$$

$$bY_t \leqq K, \lambda_t(K-bY_t)=0, \lambda_t \geqq 0, t=1,2,\cdots,T \tag{56c}$$

其中 $F_Y \equiv \partial F/\partial Y_t$. 因为约束(53)对于 K 和 Y_t 是线性的，那么由定理 2.3 (Arrow-Hurwicz－Uzawa 定理)(56)为最优解的一个必要条件. 因为函数 F 对于 Y_t 是严格凹的(或 $\partial^2 F/\partial Y_t^2<0$)，那么(54)中定义的最大化函数是严格凹的.[30]因此由定理 2.2，(56)对于全局最优解也是充分的条件，其中我们可以注意到(53)中的约束函数都是线性的，因而是凹的. 由定理 2.1，最大化函数的严格凹性保证了最优解的惟一性. 条件(56a)到(56c)完全刻画了满负荷问题的解.

注意，如果 $\lambda_t>0$，那么，由(56c) $K=bY_t$(该时期资本充分利用). 另一方面，如果 $K>bY_t$，那么 $\lambda_t=0$. 拉格朗日乘数 λ_t 是度量 t 时期生产利用能力的影子价格.

225 由(56a)，我们可得到

$$p(Y_t,t)=w\cdot a+\lambda_t b \tag{57}$$

特别地，如果 $\lambda_t=0$，最优定价准则将只按平均可变成本 $(w\cdot a)$ 收费. 将(57)关于 t 相加并使用(56b)，我们也可得

$$\sum_{t=1}^{T}p(Y_t,t)=(w\cdot a+br)T \tag{58}$$

得到该解进一步的特性应该是很有趣的. 我们考虑两种情形：第一种情形是对于一个最优解，在所有时期保持完全的生产能力. 第二种情况是不在所有时期保持完全的生产能力. 我们首先考虑对所有时期保持完全的生产能力是最优的情形，即，对所有 t，Y_t = 常数(它由 Y^* 表示)并且生产能力的最优存量(由 K^* 表示)通过 $K^*=bY^*$ 与 Y^* 相联系. 这样一个 Y^* 的值可决定为

$$\sum_{t=1}^{T}p(Y^*,t)=(w\cdot a+br)T \tag{59}$$

为说明这个解，我们假定如下的需求模型

$$\text{对 } t\in T_1, p(Y_t,t)=P_1(Y_t) \tag{60a}$$

$$\text{对 } t\in T_2, p(Y_t,t)=P_2(Y_t) \tag{60b}$$

其中，T_1 和 T_2 是$\{1,2,\cdots,T\}$的不相交非空子集，且 $T_1\cup T_2=\{1,2,\cdots,T\}$. 也就是说，需求在 T_1 时期和 T_2 时期之间变动，但是仍在所有时期中保持完全的生产能力. 利用电的例子，我们可称 T_1 时期为“白天”，称 T_2 时期为“晚上”. 令 T_1 和 T_2 的时期数目分别由 τ_1 和 τ_2 表示. 那么我们可改写(59)为

$$\tau_1 P_1(Y^*)+\tau_2 P_2(Y^*)=(w\cdot a+br)T \tag{61}$$

这决定了最优产出水平 Y^*，并因此决定了最优价格为

$$p_1=P_1(Y^*), t\in T_1; p_2=P_2(Y^*), t\in T_2 \tag{62}$$

226

借助(61)，图 4.11 说明了 Y^* 的决定，这与 Steiner(1957，588 页)关于“移动高峰情况”的解相一致，如 Williamson(1966)所归纳的. 移动高峰情况是指对所有 t，保持完全生产能力是最优的. 注意在图 4.11 中，最优产出是由垂直相加需求曲线得到的. 这是满负荷问题中的著名法则.

第二种情况是在所有时间内保持完全生产能力不是最优的情况. 令 A 是$\{1,2,\cdots,T\}$的子集，其中完全生产能力被保持. 则对 $t\in A$，Y_t 是恒定的(这记为 $\hat{Y}$)，对这种情况的生产能力的最优存量(以 K 表示)通过 $K=b\hat{Y}$ 与 $\hat{Y}$ 相联系. 同样还假定对 $t\notin A$，$bY_t<K$，即，存在时期($t\notin A$)，不保持完全生产能力是最优的(因为在这些时期需求太“低”). 在第二种情况中，从(57)我们可得

$$p_t=w\cdot a, \text{对 } t\notin A \tag{63}$$

其产出的最优水平是由 $p_t=p(Y_t,t)$所决定.

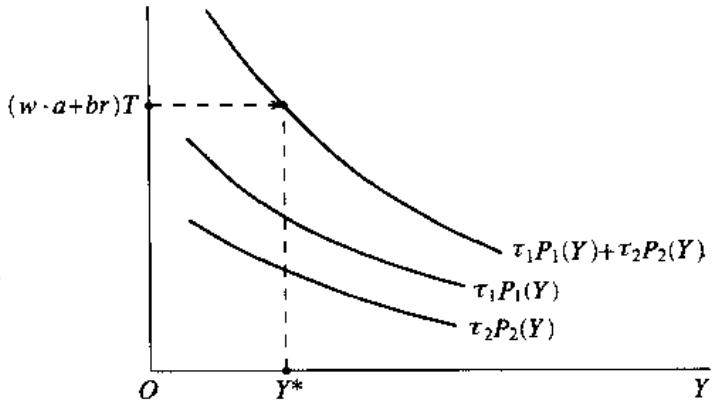


图 4.11　当完全生产能力始终实现时的解

为得到对 $t\notin A$ 的解，使用这个概念，我们可改(58)为

227

$$\sum_{t\in A}[p(\hat{Y},t)-w\cdot a]=brT^{[31]} \tag{64}$$

更具体地，假定需求模式给定为

$$p(Y_t,t)=P_3(Y),t\in A \text{ 或 } p(Y_t,t)=P_4(Y),t\notin A \tag{65}$$

设 a 是 A 中的时期数目.则我们可重写(64)为

$$aP_3(\hat{Y})=(w\cdot a)a+brT \text{ 或 } P_3(\hat{Y})=(w\cdot a)+brT/a \tag{66}$$

因为对 $t\in A$, $Y_t=\hat{Y}$.这个情况下最优价格的决定由图 4.12 表明,这与 Steiner(1957,588 页)的"固定高峰情形"相一致,如 Williamson(1966)关于所归纳的.固定高峰情形是指对所有 t,保持完全的生产能力不是最优的.

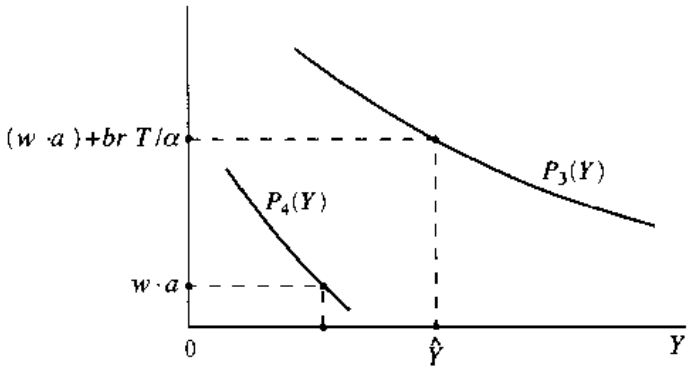


图 4.12　当完全生产力不是必须达到时的解

对于时期 t,公司利润给定为

228

$$\begin{aligned}\pi_t\equiv p_tY_t-(w\cdot a)Y_t-rK&=(p_t-w\cdot a)Y_t-rK\\&=\lambda_tbY_t-rK\end{aligned}$$

其中最后的等式来自(57).那么在规定的最优政策下,整个时期中的总利润被算作

$$\pi\left(\equiv\sum_{t=1}^{T}\pi_t\right)=\sum_{t=1}^{T}\lambda_tbY_t-rKT \tag{67}$$

当完全生产能力对所有时期均被保持时(移动高峰情形),我们对所有 t, $Y_t=Y^*=K^*/b$,因此通过回忆(56b),(67)可被写作

$$\pi=\sum_{t=1}^{T}\lambda_tK^*-rK^*T=rTK^*-rK^*T=0$$

这样,我们有 $\pi=0$.

当完全生产能力对所有 t 不能被保持时(稳定高峰情形),我们有对 $t\notin A$, $\lambda_t=0$.那么(67)可改写为

$$\pi=\sum_{t\in A}\lambda_tb\hat{Y}-r\hat{K}T=\hat{K}\sum_{t\in A}\lambda_t-r\hat{K}T$$

$$=\hat{K}\sum_{t=1}^{T}\lambda_t-r\hat{K}T=\hat{K}rT-r\hat{K}T=0$$

这样,我们又有 $\pi=0$.在两种情形的任何一个中,如果公司的定价政策被决定

以使在整个时期(54)意义上的"社会福利"最大,那么整个计划期限上的利润将等于0.这个结论不依赖于特定的需求限定,例如(60)和(65).最后的讨论可总结如下:

【命题4.6】 在上述模型的限定下,在(60)的移动高峰情形中福利最大化的垄断者的定价法则由(62)决定(即,通过需求曲线的垂直求和法则决定),并且最优资本存量由 $K^* = bY^*$ 决定.在(65)的固定高峰情形中,对于高峰时期($t \in A$)福利最大化的垄断者的最优价格由(66)决定,并且最优资本存量由 $K = b\bar{Y}$ 决定,而对于非高峰时期最优价格等于平均可变成本($w \cdot a$).在这两种情形的任何一个中,福利最大化的垄断者的整个时期利润为零.

229

注:我们可以调查研究边际成本定价法则对目前的问题是否成立.为此,注意整个时期的总成本(TC)可得到为

$$TC(\equiv \sum_{t=1}^{T} TC_t) = \sum_{t=1}^{T}[(w \cdot a)Y_t + rK] = \sum_{t=1}^{T}(w \cdot a)Y_t + rKT$$

为方便起见,我们把注意力集中在移动高峰情形中,在此情形中完全生产能力在整个时期被保持.这是对所有 t, $Y_t = Y^*$ 且 $K^* = bY^*$ 的情形.总成本可写作

$$TC = (w \cdot a + br)Y^* T$$

该情况下的总产出 X 是

$$X \equiv \sum_{t=1}^{T} Y_t = Y^* T$$

因为项($w \cdot a + br$)与 X 无关,那么边际成本(MC,它也等于平均成本)可得到为

$$MC = w \cdot a + br$$

不用说,这个不等于每个时期的价格,因为根据(57)价格不时地波动.另一方面,令 p 是"平均价格",它可表示为(利用方程58)

$$p \equiv \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} p_t = w \cdot a + br \tag{68}$$

那么 p 等于边际成本.对于移动高峰情形边际成本定价"在平均上"成立.[32]

注意,从上面的讨论容易看出边际成本定价法则对于整个时间内需求函数中没有移动的传统情形也成立,即当 $p_t = p(Y_t)$ 时.在此情形中,最优价格

230

(p_t)将是常数,并且我们有

$$p_t = w \cdot a + br, t = 1, 2, \cdots, T \tag{69}$$

其中($w \cdot a + br$)又一次表示边际成本.

4.6.3 一个利润最大化的垄断者的情形

在整个前面的讨论中，我们将注意力限制在公司使由(54)定义的社会福利最大的情形上.另外，我们可以考虑公司在整个时间内，使利润最大的情形.回想 $y_t = D(p_t, t)$，我们可将时期 t 的公司利润写作

$$\pi_t = (p_t - w \cdot a) D(p_t, t) - rK$$

公司现在的问题是选择 $p_1, \cdots, p_t$ 和 K，在 $K \geqq bD(p_t, t)$，$p_t \geqq 0$，$t = 1, 2, \cdots, T$ 和 $K \geqq 0$ 的约束下

$$\text{Maximize } \pi(\equiv \pi_t) = [\sum_{t=1}^{T} (p_t - w \cdot a) D(p_t, t) - rK] \tag{70}$$

这个问题的拉格朗日函数可写作

$$\Psi \equiv \sum_{t=1}^{T} [(p_t - w \cdot a) D(p_t, t) - rK] + \sum_{t=1}^{T} \lambda_t (K - bY_t) \tag{71}$$

假定一个内部解(在最优解处 $p_t > 0, t = 1, 2, \cdots, T$，且 $K > 0$)，并且为简化起见，省去表示最优解的符号如(*).一阶条件可写作

$$\partial \Psi / \partial p_t = [D(p_t, t) + (p_t - w \cdot a) D_p] - b\lambda_t D_p = 0, t = 1, 2, \cdots, T \tag{72a}$$

$$\partial \Psi / \partial K = rT - \sum_{t=1}^{T} \lambda_t = 0 \tag{72b}$$

$$K \geqq bD(p_t, t), \lambda_t [K - bD(p_t, t)] = 0, \lambda_t \geqq 0, t = 1, 2, \cdots, T \tag{72c}$$

231 其中 $D_p \equiv \partial D(p_t, t) / \partial p_t$.[33]用 $\eta_t \equiv - p_t D_p / D$ 定义**需求弹性** $\eta_t = \eta(p_t, t)$.根据假定 $D_p < 0$(向下倾斜的需求曲线)，它是正的.根据 η_t，我们可改写(72a)为

$$(\eta_t - 1) p_t = \eta_t (w \cdot a + \lambda_t b), t = 1, 2, \cdots, T \tag{72'a}$$

它要求对所有 t，$\eta_t > 1$.[34]定义 $\varepsilon_t \equiv \eta_t / (\eta_t - 1)$.那么 $\varepsilon_t = \varepsilon(p_t, t)$，即 ε_t 是 p_t 和 t 的函数.同样，由 $\eta_t > 1$ 推出

$$\varepsilon_t > 1, t = 1, 2, \cdots, T \tag{73}$$

根据 ε_t，(72'a)可改写为

$$p_t = \varepsilon_t (w \cdot a + \lambda_t b) \tag{74}$$

因为 $\varepsilon_t > 1$，由(74)推出

$$p_t - w \cdot a > p_t - \varepsilon_t (w \cdot a) = \varepsilon_t \lambda_t b \geqq 0, t = 1, 2, \cdots, T \tag{75}$$

也就是说，当前利润 $p_t - w \cdot a$ 总是正的.全部 T 个时期的总利润(最大化时)

可计算如下：

$$\sum_{t=1}^{T}\pi_t = \sum_{t=1}^{T}[(p_t - w\cdot a)D - rK] \tag{76}$$

$$> \sum_{t=1}^{T}[(\varepsilon_t\lambda_t b)D - rK] \quad [由(75)]$$

$$> \sum_{t=1}^{T}(\lambda_t bD - rK) \quad (因为\ \varepsilon_t > 1)$$

$$= \sum_{t=1}^{T}\lambda_t bD - \sum_{t=1}^{T}\lambda_t K \quad [由(72b)]$$

232

$$= \sum_{t=1}^{T}\lambda_t(bD - K) = 0 \quad [由(72c)]$$

因此，对于利润最大化的垄断者来说，整个时期内的利润总是正的.这与前面的对于福利最大化的垄断者来说利润总等于0的结论形成对照.

假定对所有 $t, t=1,2,\cdots,T$，需求弹性 η_t，是常数.如果需求函数被写作

$$D(p_t, t) = \phi(t)\,p_t^{\ -\eta} \tag{77}$$

其中 $\phi(t)$表示需求函数随时间变化，并且 $\eta>1$ 时 η 是常数，那么上述假设可被保证.在此情形中，对所有 t，$\eta_t = \eta$，并且对所有 t，$\varepsilon_t =$ 常数(我们用 ε 表示).总利润可计算如下：

$$\sum_{t=1}^{T}\pi_t = \sum_{t=1}^{T}[(p_t - w\cdot a)D - rK] \tag{76'}$$

$$= \sum_{t=1}\{[(\varepsilon-1)w\cdot a + \lambda_t b]D - rK\} \quad [由(74)]$$

$$= T(\varepsilon-1)w\cdot a + \sum_{t=1}^{T}(\lambda_t bD - \lambda_t K) \quad [由(72b)]$$

$$= T(\varepsilon-1)w\cdot a \quad [由(72c)]$$

因此，ε 越大(或 η 越小)，总利润越大.也就是说，当对产出的需求弹性越小时，总利润越大(正如所期望的).

余下分析与福利最大化垄断者的情形类似.这样，略去中间步骤，我们可总结出一些结论.为简便起见，我们假定对所有 t，$\varepsilon_t = \varepsilon$(常数).首先，考虑对所有时期完全生产能力均被保持的移动高峰情形.特别地，我们考虑由(60)给出的需求模型.在此情形中最优产出 Y^* 由

$$\tau_1 P_1(Y^*) + \tau_2 P_2(Y^*) = \varepsilon(w\cdot a + br)T \tag{61'}$$

233 决定.这进一步通过 $K^* = bY^*$ 决定最优资本存量.通过(61′)决定 Y^* 的图形说明，类似于图4.11中的说明.最优定价策略又一次由

$$p_t = P_1(Y^*), t\in T_1; p_t = P_2(Y^*), t\in T_2 \tag{62'}$$

给出.因为 $\varepsilon>1$，我们也可以由(61′)得出结论，利润最大化的垄断者的最优产出将小于福利最大化的垄断者的最优产出，这又推出(利润最大化的)私有垄断者的资本存量将小于社会最优数量(这里我们可以回想一下需求曲线是向下倾斜的，$P'_1<0$ 且 $P'_2<0$).同样，由此以及(62′)，我们可以得出结论，利润最大化的垄断者总是比福利最大化的垄断者定更高的价格.

接下来，考虑需求模式由(65)给定的固定高峰情形.在此情形中，高峰时

期($t\in A$)的最优产出 $\hat{Y}$由

$$P_3(\hat{K})=\varepsilon[(w\cdot a)+brT/a] \tag{66'}$$

决定,并且资本的最优存量由 $\hat{K}=b\hat{Y}$ 得到.通过(66′),决定 $\hat{Y}$的图形说明类似于图 4.12 中的说明.最优定价策略由

$$p_t=\varepsilon[(w\cdot a)+brT/a],t\in A;p_t=\varepsilon(w\cdot a),t\notin A \tag{78}$$

给出.因为 $\varepsilon>1$,那么利润最大化的垄断者总是比福利最大化的垄断者索取更高的价格.因为需求曲线 P_3 和 P_4 都向下倾斜,那么这意味着利润最大化的垄断者的产出总是小于福利最大化的垄断者,这最终推出其资本存量将总是小于福利最大化的垄断者的资本存量.假定一个恒定的需求弹性(或对所有 t,$\varepsilon_t=\varepsilon$),我们可总结出如下一些结论:

【命题 4.7】 在前面模型的限定下,我们有:

(i) 整个时期内利润最大化的公司的总利润总是正的,并且它随着需求弹性变小而增大;

(ii) 利润最大化的垄断者(与福利最大化的垄断者相比较)对于高峰和非
234 高峰时期总是定较高的价格,生产较少的产品,使用较少的资本存量.

(iii) 在移动高峰情形中,最优定价策略由(62′)给出,而在稳固高峰情形中,最优定价策略由(78)给出.

注:由上不难看出,如果利润最大化的公司受公平收益率管制的约束以致它的利润被压缩,那么它将生产更多的产品并且使用更大的资本存量.这与前一节中讨论的 Averch-Johnson 效应相一致.带有管制约束的满负荷问题的更严密的公式和最优公平收益率(s)的计算作为一个有用的练习留给有兴趣的读者.

注:在此讨论中,我们基于一系列假设得到我们的结论(命题 4.6).这些假设是一些主流分析的通常假设,诸如 Boiteux (1949)和 Steiner (1957).正如前面所提到的,我们的焦点在于阐明该问题的分析结构,因此我们可通过改变假设得到有用的结论.一个引人注意的假设是固定系数技术的假设.人们可以将其改变为允许要素间替代的新古典主义技术.这个方向的精彩讨论在 Panzar (1976)中找到.有这个改变,利用生产设备的用户只承担一部分生产成本的结论不再成立(如图 4.12 所示).正如 Panzar (1976,521 页)所说的,"当新古典技术被假定时,我们发现所有时期都对生产能力的成本做了贡献;有最大产出的时期只是做了最大的贡献"(另见 Mohring 1970).除了这一点,Drèze (1964);Turvey (1968);Littlechild (1970);Michell, Manning 和 Acton (1978);Sherman (1985)以及 Wiseman (1987)为我们提供了有趣的材料.

不管公司在整个时期是追求社会福利最大化还是利润最大化,在满负荷

问题的以上分析中有两个重要的缺点.一个是分析的局部均衡性质.为解决这个难题,我们可以用公式表示两个(或更多)部门的模型,在此模型中,一个部门面对满负荷问题(其有成本递减的可能性),另一部门则不是.通过对资源约束和这些商品的社会福利函数的适当限定,我们可以进行一般均衡分析.

235 即使我们将自己限于前面分析的局部均衡性质,第二个缺点仍然存在.这个困难来自于对产品的需求仅依赖于特殊时期的价格限定,即 $Y_t = D(p_t, t)$.一旦公司宣布它的定价策略 $p_1, p_2, \cdots, p_T$,那么自然地消费者将相应调整对商品的需求.那么需求函数应更恰当地被指定为 $Y_t = D(p_1, p_2, \cdots, p_T, t)$, $t = 1, 2, \cdots, T$(例如,Mohring 1970).既然公司将基于这样的消费者行为来决定它的最优定价策略,那么这将产生一个对策论的环境.尽管这一扩展非常重要,但是这里不去讨论这一情形.我们将研究这些问题的任务留给有兴趣的读者.

§4.7 关于科斯定理[35]

4.7.1 引言

福利经济学的基本定理之一是竞争性均衡实现帕累托最优,并且作为那个定理的推论,竞争性均衡实现生产的有效性.这构成了亚当·斯密著名的"看不见的手"的现代阐述.[36]尽管这些定理在较弱的一系列假设下成立,但是当"外在效应"存在时,它们将失效,生产和消费的外部经济和不经济是指"不用对生产或福利的相关影响的全部或部分支付报酬"(Mishan,1964,103 页).那么这种外在效应的存在构成了对被广泛接受的竞争性均衡的福利学说的一个重大挑战.[37]外部经济的一个著名的例子是土地毗邻的苹果种植者和蜜蜂饲养员,在那里后者从前者的生产中获得利益(见 Meade,1952).[38]尽管这种例子或许被认为无足轻重,但是由于外部不经济问题和与之相关的责任法规,最近外在效应的问题吸引了大量的注意.抽烟、噪声以及许多形式的空气和水污染已经加强了对该问题的兴趣.

对于外在效应导致的"市场失效"的著名解决方法是由庇古(Pigou,1932)提出,并且已经被广泛接受.在此情形中,市场失效可通过政府干涉——推出一项合适的税收—补贴方案——来修正.科斯(Coase,1960)的一篇重要的论文向庇古的解决方法提出了根本性的挑战,他有说服力地指出,不用求助政府的干涉,帕累托最优资源分配可通过私下协商达到.

科斯考虑的外在效应是一种商品的生产成为其他一些商品生产的负投入
237 的生产外在效应.科斯使用的著名例子是牛的放养事例,即一个大农场主饲养的牛践踏了邻近农场的庄稼.科斯使用的另一个例子是糖果制造商和医生的事例,其中医生的诊室被糖果制造商车间电机器引起的噪声和震动所打扰.

称为"科斯定理"的命题表明,帕累托最优资源分配(在某些理想条件下)

可通过不求助于庇古的税收—补贴方案的私下协商而达到，并且该私下解决方法独立于责任法规.科斯利用从实际的法律案例中抽取的有趣且使人开阔眼界的例子，通俗地提出了他的定理.毫无疑问，尽管有理由认为这是他的定理流行的一个重要原因，但这里我们将根据数学模型描述它.这个方法将更清楚地揭示基本的逻辑结构和其命题中涉及的假设.[39]

4.7.2 外在性和庇古方案

为了恰当理解科斯的贡献，首先讨论包含在传统的庇古方案中的基本论点是有用的.为了简便，遵循科斯(1960)及其他人，我们考虑包括两个生产者(1和2)的经济体.假设公司1对于它的产出 Y_1 的生产函数由

$$Y_1=F_1(L),F_1(0)=0,F_1'>0,F_1''<0 \tag{79}$$

给出，其中 L_1 是它的投入(劳动)，而公司2对于它的产出 Y_2 的生产函数给定为

$$Y_2=\tilde{F}_2(Y_1,L_2),\tilde{F}_2(Y_1,0)=0 \tag{80}$$

其中，$\partial\tilde{F}_2/\partial L_2>0$，$\partial_1^2\tilde{F}_2/\partial L_2^2<0$，且 $\partial\tilde{F}_2/\partial Y_1<0$，$L_2$ 是它的直接投入(劳动).同样注意，这里公司1的产出(Y_1)作为公司2生产的负投入而加入，即 $\partial\tilde{F}_2/\partial Y_1<0$.将(79)代入 $Y_2=\tilde{F}_2(Y_1,L_2)$，我们可得到

$$Y_2=\tilde{F}_2[F_1(L_1),L_2]\equiv F_2(L_1,L_2) \tag{81}$$

其中，$F_2(L_1,0)=0$，$\partial F_2/\partial L_1<0$，$\partial F_2/\partial L_2>0$，$\partial^2F_2/\partial L_2^2<0$.注意，$\partial F_2/\partial L_1<0$，当且仅当 $\partial\tilde{F}_2/\partial Y_1<0$.假定公司2知道函数 F_1.[40]根据(79)和(81)，模型将抓住科斯定理考虑的外在效应的本质.

生产中的**帕累托最优点**或者生产的有效配置，作为有约束的最大化问题的解而给出，在此问题中选择 L_1 和 L_2，使

$$\text{Maximize } \alpha_1F_1(L_1)+\alpha_2F_2(L_1,L_2)$$

约束条件为

$$L_1+L_2\leqq L,L_1\geqq 0 \text{ 且 } L_2\geqq 0$$

其中，L 是该经济系统中资源(劳动)的固定数量，α_1 和 α_2 是固定的非负常数，$(\alpha_1,\alpha_2)\neq 0$.假定在最优解处 $L_1>0$ 且 $L_2>0$(内部解)，这里为简化起见，我们省略(*)来表示最优解.那么对于最优化的一阶(必要)条件由[41]

$$\alpha_1F_1'+\alpha_2\partial F_2/\partial L_1=\alpha_2\partial F_2/\partial L_2 \tag{82}$$

$$L_1+L_2=L \tag{83}$$

给出.对给定的参数 α_1 和 α_2 的值(或对给定的 α_1/α_2 的值，其中我们假定

$\alpha_2>0$),这两个方程决定了 L_1 和 L_2 的帕累托最优值.[42]改变 α_1/α_2 的值,我
239 们得到不同的帕累托最优点.[43]条件(82)表示生产有效性条件.我们可称(82)为(生产中的)**帕累托最优条件**.

假定这两个公司处于"更大"经济系统中,在此系统中,两种产出的价格(p_1 和 p_2)和要素价格(w)的决定或多或少地独立于两个公司的生产水平,并且这两个公司是"竞争的",在此意义上,他们将这些价格(p_1,p_2 和 w)作为外生的给定的常数[44].在这种形势下,众所周知(并且容易证明)共同利润最大化得出了帕累托最优状态,其中 α_1/α_2 被定为等于 p_1/p_2.为了领会这一点,考虑下面的问题,在 $L_1\geqq 0$ 且 $L_2\geqq 0$ 的约束下,选 L_1 和 L_2 使两个公司的共同利润最大化,

$$\pi(L_1,L_2)\equiv p_1F_1(L_1)+p_2F_2(L_1,L_2)-w(L_1+L_2)$$

假定在最优解处 $L_1>0$ 且 $L_2>0$,一阶条件由 $\partial\pi/\partial L_1=\partial\pi/\partial L_2=0$,或

$$p_1F_1'+p_2\partial F_2/\partial L_1=p_2\partial F_2/\partial L_2(=w) \tag{84}$$

对于 $\alpha_1/\alpha_2=p_1/p_2$,这最终保证了帕累托最优性(82).在给定的每一个公司能在固定工资率 w 处雇佣任何数量的劳动的局部均衡状态下,(83)容易被满足[45].因此我们可以得到结论,(84)定义的共同利润最大化点实现帕累托最优,其中 α_1/α_2 等于 p_1/p_2.[46]

240 然而,在竞争状态中,每个公司不是典型地对共同利润最大化或"社会利润"$\pi(L_1,L_2)$感兴趣,而是每个公司对自己的私人利润最大化感兴趣.也就是说,公司 1 在 $L_1\geqq 0$ 的条件下,选择 L_1 使自己的利润最大,

$$\pi_1(L_1)\equiv p_1F_1(L_1)-wL_1$$

而公司 2 对给定的 L_1 的值,在 $L_2\geqq 0$ 的条件下,选择 L_2 使自己的利润最大,

$$\pi_2(L_1,L_2)\equiv p_2F_2(L_1,L_2)-wL_2$$

假定在最优解处,$L_1>0$ 且 $L_2>0$,公司 1 和公司 2 的一阶条件分别由

$$p_1F_1'=w \tag{85}$$

$$p_2\partial F_2/\partial L_2=w \tag{86}$$

给出.这最终推出

$$p_1F_1'=p_2\partial F_2/\partial L_2 \tag{87}$$

在这样的情况下,帕累托最优条件(82)一般不能满足.由于外在效应($\partial F_2/\partial L_1\neq 0$)的存在,"市场解",即每一公司自己私人利润的最大化,将达不到帕累托最优(或"社会最优").这个结论是因外在效应导致的市场失效问题的核心.

注意,如果在此情形中无外在效应($\partial F_2/\partial L_1\equiv 0$),那么条件(82)由私人

利润最大化(87)保证.这显然是亚当斯密的"自由竞争"实现"社会最优"的著名命题的一个方面.

A.C.庇古提出通过"税收与补贴"方案消除存在外在效应时的市场失效.假定使公司2遭受"破坏"的公司1受到$100\cdot t\%$收入税的约束.那么公司在$L_1\geqq 0$且给定税率t的条件下选择L_1,使它的税后利润

$$(1-t)p_1F_1(L_1)-wL_1$$

最大.

241 假定在最优解处$L_1>0$,一阶条件由

$$(1-t)p_1F_1'=w \tag{88}$$

给定.假设公司不受税收支配(也没补贴).那么它的利润最大化条件由(86)给定.因此,结合(86)和(88),我们得

$$p_1F_1'-tp_1F_1'=p_2\partial F_2/\partial L_2=w \tag{89}$$

如果政府将选择税率t,使得

$$-tp_1F_1'=p_2\partial F_2\ \partial L_1,\text{即 }t=-\frac{p_2\partial F_2\ \partial L_1}{p_1F_1'}>0 \tag{90}$$

那么由$\alpha_1/\alpha_2=p_1/p_2$,[47]条件(89)保证(82).当对公司1征收适当的税收时,由$\alpha_1/\alpha_2=p_1/p$,帕累托最优可通过私人利润最大化达到.

通过提供给公司2补贴,可得到同样的解.假定公司2以它的收入的$100\cdot s\%$的数目得到补贴.那么公司2对于给定的s和L_1的值,在$L_2\geqq 0$的条件下,选择L_2使(补贴后的)利润

$$(1+s)p_2F_2(L_1,L_2)-wL_2$$

最大.假定在最优解处$L_2>0$,一阶条件给出

$$(1+s)p_2\partial F_2/\partial L_2=w \tag{91}$$

假定公司1不受税收或补贴的支配,它的利润最大化条件由(85)给定.结合(85)和(91),我们得到

$$p_1F_1'-sp_2\partial F_2/\partial L_2=p_2\partial F_2/\partial L_2 \tag{92}$$

因此,如果政府选择s,使

$$-sp_2\partial F_2\ \partial L_2=p_2\partial F_2\ \partial L_1,\text{即 }s=-\frac{p_2\partial F_2\ \partial L_1}{\partial F_2\ \partial L_2}>0 \tag{93}$$

242 那么帕累托最优(82)得到保证.

这个解中明显的困难是,不清楚在税收方案情形中政府如何花费税收收入,或者在补贴方案情形中政府如何得到收入去给公司2补贴.一个(可能令人满意的)答案是,由于这些公司在经济系统中可能非常"小",税收或补贴的数量(因而影响)是微不足道的,因此可以被忽略.另一方面,如果真实情况是

这样的话，这里考虑的外在效应问题的重要性可能也很小. 同样地，这些合计后能达到一个不小的数目.

4.7.3 科斯定理

科斯定理的一个显著特征是帕累托最优可在没有政府任何干涉的情况下通过两个公司的私下谈判达到. 因此，官僚主义的繁琐而拖拉的例行公事以及其他与政府干涉相联系的(明显的或隐含的)成本可被省去. 进而，不管公司 1 是否对公司 2 遭受的损失负责，帕累托最优均能达到. 关于这一点，我们可以注意到，不必清楚为什么总是公司 1 应该对公司 2 负责，即使公司 1 的产出是公司 2 的生产函数的负投入. 作为一个例子，考虑公司 1 已建立后公司 2 才开始存在. 在这一情况中，就不清楚为什么公司 1 应付给新来者公司 2 以补偿. 如果公司 1 必须支付补偿，那么可能当公司 2 建立时，公司 1 必须停止经营. 这是说不过去的.

经常的情形是公司 2 遭受的损失归因于公司 1 破坏一定“环境”的事实(如同在医生诉糖果制造商案例中，糖果制造商制造的噪声使医生遭受损失). 那么问题是谁拥有关于环境的所有权，正如在科斯提出的医生诉糖果制造商的案例中，如果在医生搬到附近之前制造商已在经营，那么可以认为糖果制造商拥有“环境权”，因此他不用因制造噪声而给医生以补偿. 科斯定理断言，不考虑谁拥有环境权，帕累托最优可通过私下谈判达到.

为了开始讨论，回想一下，在私人利润最大化条件下，公司 2 的产出依赖于公司 1 的经营水平. 为明白这一点，回想一下公司 2 的利润最大化条件

243
$$p_2 \partial F_2(L_1, L_2)/\partial L_2 = w \tag{86}$$

这对于一个给定的 L_1 的水平，给出了 L_2 的最优值. 即，对于 L_2(对一给定的 w/p_2 的值)，(86)可解为

$$L_2 = L_2(L_1) \tag{94}$$

因此，公司 2 的最大利润 π_2^* 依赖于 L_1. 换句话说，

$$\pi_2^*(L_1) \equiv p_2 F_2[L_1, L_2(L_1)] - wL_2(L_1) \tag{95}$$

现在我们检查归因于两种不同责任法则而出现的两种情形.

情形 A{公司 1 有责任} 当公司 1 停止经营时，公司 2 的最大利润由 $\pi_2^*(0)$给定. 当公司 1 的经营水平由 $L_1>0$ 给出时，这个利润减至 $\pi_2^*(L_1)$，其中 $\pi_2^*(0)>\pi_2^*(L_1)$. 因此，通过外在效应公司 2 遭受来自公司 1 的损失等于 $\pi_2^*(0)-\pi_2^*(L_1)$. 在情形 A 中，公司 1 有责任补偿公司 2 的全部损失. 在此形势中，公司 1 选择 L_1 使其补偿后利润最大，

$$p_1 F_1(L_1) - wL_1 - [\pi_2^*(0) - \pi_2^*(L_1)] \tag{96}$$

最优化条件由

$$p_1F_1' - w + d\pi_2^*/dL_1 = 0 \tag{97}$$

给出.公司2选择 L_2,使包括从公司1得到的补偿的利润最大,

$$p_2F_2(L_1, L_2) - wL_2 + [\pi_2^*(0) - \pi_2^*(L_1)] \tag{98}$$

那么最优条件由

$$p_2\partial F_2/\partial L_2 - w = 0 \tag{99}$$

给出.由(97)和(99),我们得

$$p_1F_1' + d\pi_2^*/dL_1 = p_2\partial F_2/\partial L_2 \tag{100}$$

通过回忆(95),$d\pi_2^*/dL_1$ 的表达式可计算为:

$$d\pi_2^*/dL_1 = p_2[\partial F_2/dL_1 + (\partial F_2/\partial L_2)L'_2] - wL'_2 = p_2\partial F_2/\partial L_1 \tag{101}$$

244 其中 $L'_2 \equiv dL_2/dL_1$,第二个等式可利用(99)得到.根据(100),(101)可化为帕累托最优条件(82).因此,我们可以得出结论,当公司1补偿公司2全部损失时,帕累托最优可以达到.

情形B(公司2有责任) 在此情形中,公司2(比如说,一个"新来者")对公司1负责补偿.公司2希望公司1降低它的生产水平,并且愿意为此支付补偿.当公司1的生产水平由 L_1^0 降至 L_1 时,公司2的利润将增长的数量为 $\pi_2^*(L_1) - \pi_2^*(L_1^0)$,其中 $L_1 < L_1^0$.令 L_1^0 是公司1不受补偿时的经营水平.既然公司1由公司2处得到 $\pi_2^*(L_1) - \pi_2^*(L_1^0)$数量的补偿,公司1包括补偿在内的利润由

$$p_1F_1(L_1) - wL_1 + [\pi_2^*(L_1) - \pi_2^*(L_1^0)] \tag{102}$$

给出.公司1选择 L_1 使这一利润最大,并且最优化条件由

$$p_1F_1' - w + d\pi_2^*/dL_1 = 0 \tag{103}$$

给出.公司2选择 L_2 使它在补偿后利润最大

$$p_2F_2(L_1, L_2) - wL_2 - [\pi_2^*(L_1) - \pi_2^*(L_1^0)] \tag{104}$$

对此的最优条件由

$$p_2\partial F_2/\partial L_2 - w = 0 \tag{105}$$

给出.结合(103)和(105),我们有

$$p_1F_1' + d\pi_2^*/dL_1 = p_2\partial F_2/\partial L_2 \tag{106}$$

那么由(101)回想 $d\pi_2^*/dL_1 = p_2\partial F_2/\partial L_1$,我们能立即注意到(106)化为帕累托最优条件(82).因此,我们得出结论:当公司2补偿公司1全部损失时,帕累

托最优也能达到. 总之,我们得到下面的结论(**科斯定理**). 上面的讨论提供了定理的正规证明.

【命题 4.8】 在上面的模型限定中,不论是公司 1 对补偿负责(情形 A),还是公司 2 对补偿负责(情形 B),生产中的帕累托最优可通过公司间的私下
245 谈判达到.

一旦定理被用公式描述出来,一些重要的问题就出现了. 例如,什么是这样谈判的激励? 私下谈判如何导致上面考虑的两种情形中的一个? 把这些问题放在一边,我们在图 4.13 中给出了科斯定理.[48] BB' 曲线表示 $[-d\pi_2^*(L_1)/dL_1]$ 轨迹,其中 $OA = L_1^0$. 因为由(101),$d\pi_2^*(L_1)/dL_1 = p_2\partial F_2(L_1, L_2)/\partial L_1 < 0$,那么 BB' 曲线在 OL_1 轴上方. 为简化起见,假定 $d^2\pi_2^*(L_1)/dL_1^2 < 0$.[49] 那么 BB' 曲线向上倾斜. 在图 4.13 中 AE 曲线表示 $[p_1F_1'(L_1) - w]$ 的轨迹. 因为 $F_1'' < 0$,那么 AE 曲线是负斜率的. 当公司既不支付也不得到补偿时,L_1^0 是公司 1 雇用的劳动力数量,它由公司 1 的无约束下的利润最大化决定,即由 $p_1F_1'(L^0) - w$ 决定. 用 L_1^* 记 BB' 曲线和 AE 曲线相交决定的 L_1 的水平. 那么,当 $L_1 = L_1^*$ 时,我们有

$$p_1F_1' - w = -p_2\partial F_2/\partial L_1, \text{因此}, p_1F_1' + p_2\partial F_2/\partial L_1 = w$$

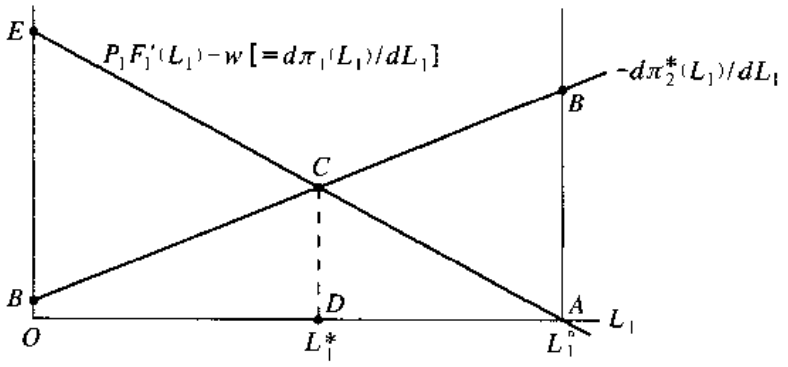


图 4.13 科斯定理的图示

回忆(84),我们可以立刻由此得出结论,即 L_1^* 表示 L_1 的帕累托最优水平. 当 L_1 的水平由 L_1^0 降至 L_1^* 时,公司 1 的利润降低了三角形 ACD 的数量,而公司 2 的利润增长图 4.13 中梯形 $ABCD$ 的数量. 存在一个有三角形 ABC 的数量那么多的"共同利润"的净增长. 科斯定理断言,不管哪个公司对补偿负责,这一净增长可以达到.

情形 A 中,公司 1 对它使公司 2 遭受的损失负责补偿. 损失的数量 $[\pi_2^*(L_1^*) - \pi_2^*(0)]$ 由梯形面积 $OB'CD$ 度量;当公司 1 的经营水平等于 L_1^* 时,它的补偿前利润由梯形 $OECD$ 度量;而当 $L_1 = L_1^*$ 时,它的补偿后利润由三角形 $B'CE$ 度量. 情形 B 中,公司 2 对公司 1 因限制其生产而负责补偿. 当 L_1 从 L_1^0 限制为 L_1^* 时,补偿的数量等于因公司 1 生产受到限制而在利润中
246 增长的数量 $[\pi_2^*(L_1^*) - \pi_2^*(L_1^0)]$. 在图 4.13 中,这由梯形面积 $ABCD$ 度

量.这样在情形B中,因公司1生产水平的降低而带来的共同利润的增长都归于公司1.

从数学上系统描述科斯定理后,我们能很容易地将分析扩展到更一般的情况,例如,(1)公司的生产不只包括劳动要素时,(2)两个公司都受税收约束(例如,公司利润税)时,(3)一个公司受某种政府管制的约束,(4)一方是消费者而不是生产者,等等.这样的扩展应该很容易,留给有兴趣的读者.

将这样的推广放在一边,我们应指出科斯定理的前面公式中隐含地做了一些重要假设.一个是没有谈判和交易费用.决定损失数额的司法程序经常对包括"时间"在内的名义和实际费用来说是非常昂贵的.这样的费用对于许多涉及了成千上万的人(有时在两方都这样)诸如空气和水的污染,核反应堆事故等等典型的环境问题来说,可能非常高.另一个假设涉及这样的事实,尽管谈判后生产的最终水平保持不变,但两个当事人间的收入分配极大地受责任
247 法则的影响.但是哪一方是有责任的问题依赖于哪一方拥有对"环境"的所有权,或者哪一方有权损害另一方的问题.这类所有权的决定可能不容易.第三个问题是损失可能不是肯定地发生,而是在一定概率分布下(如,同在一场"事故"中的情形)发生,并且事故发生的可能性依赖于每一方承担的费用.注意,事故的可能性依赖于双方采取的立场,这将使"损害的犯罪者"和"受害者"的概念更含糊.在这些经济问题的顶端,有一个在外在效应中涉及的著名的数学问题.即使在(79)和(81)描述的简单情形下,生产可能性集合不一定是凸的.[50]这意味着帕累托最优只是"局部"最优,并且有必要对帕累托最优条件(82)进行更仔细的检验.

关于该问题的所有这些方面的大量有趣研究已经完成.然而,科斯定理的要旨是清楚的.通过使用简单的框架,它阐明了外在效应的一些基本结构,并说明在一定条件下,通过私下谈判,即通过避免政府干涉达到帕累托最优是可能的.这是一个卓越非凡的结论.

▶ 注 释

[1]这一节摘自 Takayama (1978 b).

[2]注意(7)中 x 和 x^* 分别表示成本最小化时和利润最大化时的投入向量,这是很重要的.矩阵 $S\equiv[\partial x_i/\partial w_j]$ 的性质在第3章的定理3.2中总结.也就是说,对所有的 i,$\partial x_i/\partial w_i<0$,$S$ 是对称的且半负定的(假定 Samuelson 正则条件).同样,我们有对所有的 i,$\sum_j x_{ij}w_j=0$,且对所有的 i,$\sum_i w_i x_{ij}=0$,这里 $x_{ij}\equiv\partial x_i/\partial w_j$.

[3]既然在本情形中利润最大化预先假定成本最小化,那么短语"成本最小化"可被"利润最大化"代替.Hicks 称劣等要素为**退化要素**,然而他将其当作异常的、不可能的和反常的而遗弃了这样的投入退化(Hicks 1946, 93－96页).Puu (1971)提供了一些理由说明为什么这可能不是事实.

[4]等式(8)在前面章节中已经得到(见第3章中的23式).

[5]如下面所看到的,命题(ii)立刻从命题(i)得出。事实上,任何熟悉基础价格理论的人可以通过画MC曲线和价格线立刻从命题(i)得出命题(ii).

[6]Ferguson和Saving(1969,775页)在他们分析的开始,作出了要素的数目必须是偶数的假定.这样的假定是不必要的.

[7](第i种要素的)支出弹性定义为当所有要素价格保持不变时,生产的总成本每百分之一的变化相对于第i种要素的使用百分之一变化的比.记该弹性为e_i,并且观察

$$e_i \equiv \frac{C}{x_i}\frac{dx_i}{dC}\bigg|_{w=\text{常数}} = \frac{C}{x_i}\left[\frac{\partial x_i}{\partial y}\Big/\frac{\partial C}{\partial y}\right]$$

其中,$x_i = x_i(w,y)$,$C = C(w,y)$.在与AC曲线的最小值点(这里$\partial C/\partial y = C/y$)相一致的产量水平处对$e_i$赋值,我们得

$$e_i = \mu_i = \partial x_i/\partial y$$

这样,e_i与第i种要素需求的产出弹性(μ_i)相同.Ports(1971,343页)得到了相同的结论.我们的定理4.2的命题(ii)与Ferquson和Saving的——根据$e_i \leqq 1$决定$\partial y^*/\partial w_i \leqq 0$——的结论(1969,777页)正好一致.Ports(1971)提出了利用Shephard引理来得出相同的结论并且避免加边海赛矩阵的方法.

[8]在前面的讨论中,我们注意到$\partial x_i^*/\partial w_i$总是负的.对于一个竞争的产业来说,在"长期条件"下得到第i种要素价格的变化对第i种要素使用的影响可能是非常有趣的.在此情形中,均衡在AC曲线的最小值点发生,其中产量水平由(18)中的y^*决定.现在我们定义函数$\bar{x}$为

$$x = x[w, y^*(w)] \equiv \bar{x}(w)$$

那么,简单观察

$$\partial \bar{x}_i/\partial w_i = \partial x_i/\partial w_i + (\partial x/\partial y)(\partial y^*/\partial w_i)$$

将(20)代入,得

$$\partial \bar{x}_i/\partial w_i = \partial x_i/\partial w_i - \mu_i(\mu_i - 1)x_i^2/y^2$$

这里我们可回忆一下(15)中μ_i的定义.由此,我们可得出结论:$\partial \bar{x}_i/\partial w_i$可能是正的或负的.这与由Ferquson和Saving(1969,782页)得到的"要素价格的上涨可能导致问题中的要素使用的增加"的结论相一致.类似的结论由Ports(1971,431页)借助Shephard引理得到.注意,如果$\mu_i \geqq 1$,那么$\partial \bar{x}_i/\partial w_i$总是负的.

[9]有关Arrow不可能定理的简洁总结(Arrow 1951,1963)和社会选择问题,见Sen(1987).Kenneth Arrow是1972年诺贝尔经济学奖得主.

[10]众所周知,消费者剩余概念包括一些困难问题.即使把我们限制在一个人或只包括一个人社会的情况下,这个概念也是引起争论的.在40年代,J.R.Hicks对这个问题做出了一系列重要贡献,而这后来被Samuelson(1947,

195～202 页)批评.关于这个问题的最近发展,见 Takayama(1984 和 1987)和附录 C.

[11]对于递增或递减规模收益的不同概念和它们之间的关系,回忆第 3 章 3.5 节.另见 Ide 和 Takayama(1987a 和 1989a).

[12]换句话说,AC 下降当且仅当 $\theta(\equiv MC/AC)<1$.这不过是命题 3.6.即以下降的 AC 曲线来定义的规模经济等价于依据 $\theta<1$ 来定义规模经济.

[13]尽管这个定理容易证明,但在文献中并不是很容易理解的.例如,见 Panzar 和 Willig(1977),其中他们得到下列结论:"具有规模经济的公司不能用边际成本定价来弥补费用"的假设"一般是错误的"(481 页),他们还拓出这个假设"很少被检验".对于他们的著作的批判性评论,见 Scott(1979)以及 Ide 和 Takayama(1987a).令人遗憾的是,Panzar 和 Willig 的著作中含有初级错误.

[14]对于边际成本定价的进一步讨论,见 Drèze(1964),Nelson(1964),Joskow(1976),Crew 和 Kleindorfer(1986),Vickery(1987),以及 Berg 和 Tschirhart(1988).

[15]本节摘自 Ide 和 Takayama(1989b),这在 1991 年获得了 1989 年度 Daeyany 奖金.

[16]本节摘自 Takayama(1983).

[17]4.5 节摘自 Takayama(1988),它来自 Takayama(1969);El－Hodiri 和 Takayama(1973);以及 Takayama(1977,31～33 页).对于到动态框架的扩展,见 El－Hodiri 和 Takayama(1981).

[18]类似的证明出现在 Baumol 和 Klevorick(1970,175 页)中.他们指出"Takayama 断言,这是 A-J 定理的另一证明,但这是不正确的.命题 2 和 3 都不是来自他的论证"(175 页).这是错误且不公正的.Takayama(1969)任何地方都没指出他打算证明 Baumol 和 Klevorick 的命题 2 和 3.Baumol 和 Klevorick 批判了他们自己创立的主张.Takayama(1969)是关于 Baumol 和 Klevorick 的命题 5.而且在证明他们的命题 5 中,Baumol 和 Klevorick 基本上遵循了 Takayama 的证明,却没有对此承认.

[19]正如 Takayama(1969,260 页)所指出的,一般地,这个假定不能被保证,即使基础生产函数是简单线性齐次的 Cobb－Douglas 形式.

[20]我们可以假定利润比率,π/K,不应超过一个特定值 $\bar{s}$,即

$$(R-wL-rK)/K\leqq\bar{s}$$

但是这个约束等价于(40),其中 $s\equiv\bar{s}+r$.如果 $\pi>0$,那么 $\bar{s}>0$,故 $s>r$.

[21]如果管制约束不是有效的,那么该解明显地与无约束情形得到的解相同,即 $K^*=K^0$ 且 $L^*=L^0$.

[22]条件(44a)到(44c)经常出现在关于此专题的文献中,其中(44d)只是在分析的开始被简单地假设.

[23]另外,我们可以如下证明 $G_K{}^*-s<0$.由(44b),我们可以注意到

$$G_K{}^* - s = \frac{(r - \lambda^* s) - (1 - \lambda^*)s}{1 - \lambda^*} = \frac{r - s}{1 - \lambda^*}$$

因为 $0 < \lambda^* < 1, r < s$，这证明了 $(G_K{}^* - s) < 0$.

[24]除了 Takayama 假定管制机构最初设定 s 的值等于无约束情形中找到的资本收益率 r^0，并且 dK^*/ds 是 s 的连续函数外，其中 $r < s \leqq r^0$，该证明类似于 Takayama(1969)中的证明. 如果我们只关心 s 由 r^0 开始的一个小位移，那么由(39)我们有

$$K^0 = (G_L^0 - w)\frac{dL^0}{ds} + (G_K^0 - s)\frac{dK^0}{ds} = (G_K{}^* - s)\frac{dK^0}{ds}$$

因为 $G_K{}^0 = r$ 且 $r < s$，我们有 $G_K{}^0 < s$. 由此，我们立即得到 $dK^0/ds < 0$. 在此情形中，不必证明(46).

[25]类似的缺点可在关于最小工资法规的文献中找到. 对于劳动的需求由边际收益产品(或边际产品价值)曲线得到，曲线被假定向下倾斜. 然后就认为最小工资控制的实施将提高工资率至均衡率以上并且产生失业. 该论点中的一个通常的谬误是它忽略了由于资本—劳动的替代而导致的劳动需求曲线的移动. 一般地，随着劳动相对的变得昂贵，诸如资本等其他要素的使用将改变. 这最终将移动劳动需求曲线. 然而能够证明的是，在一定似乎有理的条件下，当最小工资额有效时，它总是减少劳动的雇佣，即使已适当考虑了通过劳动需求曲线移动而带来的调整(见 Takayama 1985，405～408 页).

[26]在文献中，满负荷定价问题至少六次被"解决"(Boiteaux，1949；Houthakker 1951 和 1958；Steiner 1957；Hirschleifer 1958；Buchanan 1966；Williamson 1966 以及 Panzar 1976). Boiteux(1949)和 Steiner(1957)独立地得出同样的解，其中 Boiteux 的成就以法文发表(英译本，1960). 对于讨论的近来总结和有用的讲解，见 Crew－Kleindorfer(1986)，Berg－Tschirhart(1988)和 Starret(1988). 本部分以 Takayama(1970)为基础，它试图找到该问题的统一分析结构(顺便说一句，James Buchanan 由于他发展了对分析经济和政治决策的新方法，成为 1986 年诺贝尔奖得主). 自从 20 世纪 70 年代航空业的管制解除以来，复杂的航空费用结构已在美国出现. 这样的结构，至少部分地反映了每个航空公司为解决与利润最大化相适应的满负荷问题而做的努力.

[27]为便于图表分析，文献中通常假设 T＝2. 也就是说，只有两种类型的时期，"顶峰时期"和"非顶峰时期". 在文献中经常讨论的电力例子中，通常假设 T 等于一天(即 24 小时)，一天可分为两个类型时期，"白天"和"夜晚". 只要我们坚持经典的定态假设，计划期限(T)等于 2 可能并不像它听来那样糟糕. 但是，数学表述经常大大方便了扩展，因此它很重要.

[28]数量 r 也可被看做资本的租赁成本. 此外，我们可以考虑一个公司，该公司正考虑大小为 K 的新厂房设备的建设(如电力公司考虑一个新的水电大坝). 假定厂房以相同的效率持续 T 个时期. 则我们可假定资本存量的初始购买成本(包括安装和其他相关成本)等于对每个 t，每单位资本 r 美元. 在这个情况下，引入折旧率是适当的，因为 T 可以很长. 令 δ 表示这样一个社会折

旧率，它假定为正的常数，我们可以重写(54)为

$$W^{T}\equiv\sum_{t=1}^{T}W_t/(1+\delta)^{t+1}]=\sum_{t=1}^{T}[F(Y_t,t)-(w\cdot a)Y_t \quad rK]/(1+\delta)^{t+1} \tag{54'}$$

这里假定公司借钱以购买和安装初始的资本存量 K，假定所借的钱等于在 T 个时期内，每个时期每单位资本偿还 r 美元. 最大化函数(54′)的解将与现在分析中讨论的不同. 虽然这样一个分析可能与特定的满负荷问题更相关，但我们将它留给有兴趣的读者.

[29]在最优解处对所有 t，$Y_t>0$ 的假设对一定的商品可能是不可接受的. 有可能某些时期对产品的需求很低以至于如果该时期商品根本没生产，那么它将是最优的. 因此我们的内部解假设只是遵循文献中的通常惯例. 对于隅角解情形的分析可类似进行，这留给感兴趣的读者.

[30]我们可以证明关于 Y_t 和 K 最大化函数的海赛矩阵是负定的.

[31]对 A 中所有 t，对(57)求和，我们得

$$\sum_{t\in A}p(Y_t,t)=\sum_{t\in A}w\cdot a+\sum_{t=1}^{T}\lambda_t b$$

注意，对 $t\notin A$，$\lambda_t=0$. 那么，回忆(56b)和对 $t\in A$，$Y_t=\hat{Y}$，我们得到(64).

[32]能够证明边际成本定价法则，对于完全生产能力在一定时期不被保持的固定高峰情形一般不成立.

[33]关于保证(72)对于最优解是充要条件的讨论留给有兴趣的读者.

[34]在中级价格理论教科书讨论的垄断理论中，类似的条件是需要的. 在这样的理论中，公司将选择 Y 使它的利润 $[p(Y)Y-C(Y)]$ 最大，其中 $p(Y)$ 是不随时间变动的反需求函数，并且 $C(Y)$ 是投入价格由外部给定为常数的成本函数. 一阶条件容易得到为 $p'Y+p=c'$. 需求的价格弹性可定义为 $\eta\equiv -p/(p'Y)$. 则一阶条件可重写为 $(\eta-1)p=\eta C'$(这与(72′a)相一致，其中 C' 代表边际成本). 因为 $C'>0$，这要求 $\eta>1$，我们应注意 $\eta>1$ 成立，当且仅当边际收益是正的.

[35]本节选自 Takayama(1979a). 罗纳德·科斯(Ronald Coase)是 1991 年度经济学的诺贝尔奖得主.

[36]在福利经济学中有两个基本的经典命题：(a)每一个竞争性均衡实现一个帕累托最优，(b)每一个帕累托最优可被具有个体间资源的合理配置的竞争性均衡所支持. 有关福利经济学的开创工作是由庇古(Pigou, 1932)做出的. 允许人与人之间比较效用这一点已经被那时像 Lerner, Kaldor, Hicks 和其他年轻经济学家所批评，他们明显地受到了伦敦经济学院的 Lionel Robbins 的影响. 福利的庇古过程已经被现在称为“帕累托最优”的概念代替. Bergson (1938), Lange(1942)和其他人以微积分的形式分析了这一新方法下的福利经济学的古典命题. 在 20 世纪 50 年代早期，这些命题被 K. J. Arrow, G. Debreu, L. W. McKenzie 和其他人根据一系列现代集合理论框架重新加以系统阐述. 见 Takayama(1985，第 2 章第 C 节).

[37]竞争性均衡的各种"缺陷"被称为市场失效.对于市场失效问题的好的总结,见 Imai 等人(1971),Homma (1980),Boadway 和 Bruce(1984,103～136 页).Ledyard(1987)和 Stiglitz(1988,71～81 页).关于这个问题早期但精彩的阐述,见 Bator (1957 和 1958).对于与市场不完全和信息不完美有关的市场失效,见 Greenwald 和 Stiglitz(1986).市场失效经常被用作政府存在和政府干涉的乍看起来的经济学上的辩护.Coase 定理为这一论点的反论作出了重要贡献.

[38]米德(Meade,1952)代表了第一个对外在性的现代讨论,或者说,经济主体之间的非市场相互依存关系,也就是社会成本与私人成本之间差别的责任问题,同样引起一类重要的市场失败.(James Meade 和 Bertil Ohlin 因对国际经济学的贡献共同获得 1997 年诺贝尔经济学奖).Bator(1958)提出了就一种要素("劳动")而言的 Meade 的生产模型的简化变形(指明区别市场失效的不同来源是值得的,一个是由于非市场相互依存或外在效应,另一个是由于规模经济.这个区别由 Scitovsky(1954)指出.)关于私人成本和社会成本之间的差别问题(和相关问题)的首创和权威的工作归功于 Pigou(1932).在这一点上,Mishan(1964,14～15 页)写道:

> 福利经济学经常与 30 年代关于人与人之间进行效用比较的争论相联系.但是它的不朽贡献在于不断强调人和社会关于经济活动的价值评价的区别,这个区别就是今天所谓的"外部效应"或"生产和消费的外在经济和不经济"问题.

[39]在许多方面,科斯(1960)构成了从庇古(1932)出发的向前迈出的重要一步.科斯已激励了大量的著作产生.它提供了带有许多有趣法律例子的启发性读物,并且这里简单的数学表述对这项重要的著作可能不是完全公正的.对于涉及该"定理"的问题的近来的简明讨论,见 Cootner(1987).

[40]这预先假设了公司 2 知道公司 1 的生产函数,F_1,以及它自己的生产函数,即 $\tilde{F}_2$.另外,我们可以假设外在效应直接以 L_1 形式进入公司 2 的生产函数中.

[41]写出拉格朗日函数为 $\Phi \equiv \alpha_1 F_1(L_1) + \alpha_2 F_2(L_1, L_2) + \lambda(L - L_1 - L_2)$.通过设 $\partial\Phi/\partial L_1 = 0$ 和 $\partial\Phi/\partial L_2 = 0$,我们立即得到

$$\alpha_1 F'_1 + \alpha_2 \partial F_2/\partial L_1 = \lambda, \alpha_2 \partial F_2/\partial L_2 = \lambda \qquad (82')$$

这得到(82).(82′)的第二个等式确保了 $\lambda > 0$,这最终得到了(83).

[42]当 $\partial F_2/\partial L_1 \equiv 0$(无外在效应)时,(79)和(80)中的假设对于给定的 α_1/α_2 的值的惟一的(全局)帕累托最优点是充分的.尽管当外在效应存在时,这不一定是事实,但是我们应假定当外在效应存在时,这也是成立的.读者应能检验适当的二阶条件.

[43]从数学上说,帕累托最优问题被系统地阐述为向量最大化问题.它能够被根据涉及的经济主体(生产者或顾客)目标函数的加权平均值的最大化问题重新阐述.对于向量最大化的讨论,见 Takayama(1985,第 1 章第 E 节).不用说,文章中所陈述的问题能够等价地重新用公式表示为:在 $F_2(L_1, L_2) \geqq$

$Y_2, L_1 + L_2 \geqq 0$ 且 $L_1 \geqq 0, L_2 \geqq 0$ 条件下，使 $F_1(L_1)$ 最大，其中 Y_2 被当作参数.

[44]这一系列"局部均衡"的情况与科斯(1960)以及米德(1952)和其他人考虑的情况一致.

[45]注意，(84)决定了作为 p_2, p_2 和 w 的函数 L_1 和 L_2 的最优值，即 $L_1 = L_1(q)$ 且 $L_2 = L_2(q)$，其中 $q = (p_1, p_2, w)$. 那么，在这里描述的局部均衡情形下，我们可通过 $L \equiv L_1(q) - L_2(q)$ 定义 L.

[46]这是因为当 $p_1 = a_1$ 且 $p_2 = a_2$ 时，由(84)知(82)被满足. 同样，令 λ 表示资源约束的影子价格，$L_1 + L_2 \leqq L$，λ 等于市场工资率，这里我们可回想(82′).

[47]注意，因为 $\partial F_2/\partial L_1 < 0$，则 $t > 0$. 为计算适当的税率 t，由(89)得到 L_1 和 L_2 的最优值为 $L_1 = L_1(q;t)$ 和 $L_2 = L_2(q;t)$，其中 $q = (p_1, p_2, w)$，将它们代入(90)：

$$-tp_1 F'_1[L_1(q;t)] = p_2 \partial F_2[L_1(q;t), L_2(q;t)]/\partial L_1$$

这里给出税率 t 为 $t = t(q)$，即 $t = t(p_1, p_2, w)$.

[48]类似的图形以及一些随后的讨论来自于 Kudoh 和 Yabushita(1974).

[49]回忆(96)和(102)，我们可以注意到条件 $d^2\pi_2^*/dL^2 < 0$，保证了情形 A 和 B 中的公司 1 的最大化问题的二阶(充分)条件.

[50]在目前的"局部均衡"合作博弈理论中的情形下，"生产可能性集合"的概念可能不恰当. 使用"可行集"的概念可能更加准确.

▶ 参考文献

Abbott, M., and O. Ashenfelter. 1976. "Labor Supply, Commodity Demand, and the Allocation of Time." *Review of Economic Studies* 43 (October): 389 – 411.

Arrow, K. J. 1963. *Social Choice and Individual Values*. 2d ed. New York: Wiley(1st ed. 1951).

Arrow. K. J. and t. Scitovsky, eds. 1969. *Readings in Welfare Economics*. Homewood, Ill.: Richard D. Irwin.

Ashenfelter, O., and J. Heckman. 1974. "The Estimation of Income and Substitution Effects in a Model of Family Labor Supply." *Econometrica* 42 (January): 73 – 85.

Averch, H. A. 1987. "Averch-Johnson Effect." In Eatwell, Milgate, and Newman 1987, 1: 160 – 63.

Averch, H, A., and L. O. Johnson. 1962. "Behavior of the Firm under Regulatory Constraint." *American Economic Review*. 52 (December): 1053 – 69.

Bailey, E. E. 1973. *Economic Theory of Regulatory Constraint*. Lexington, Mass: Heath-Lexington.

Bator, F. M. 1957. "The Simple Analytics of Welfare Organization." *American Economic Review* 47(March):22 – 59.

——. 1958. "The Anatomy of Market Failure." *Quarterly Journal of Economics* 72(August):351 – 79.

Battalio. R., L. Green, and J. Kagel. 1981. "Income-Leisure Tradeoffs of Animal Workers." *American Economic Review* 69(September):621 – 32.

Baumol, W. J., and A. K. Klevorick. 1970. "Input Choices and Rate-of-Return Regulation: An Overview of the Discussion." *Bell Journal of Economics and Management Science* 1(Autumn):162 – 90.

Bear, D. V. T. 1965. "Inferior Inputs and the Theory of the Firm." *Journal of Political Economy* 73(June):287 – 89.

Berg, S. V., and J. Tschirhart. 1988. *Natural Monopoly Regulation: Principles and Practice*. New York: Cambridge University Press.

Bergson(Burk), A. 1938. "A Reformulation of Certain Aspects of Welfare Economies." *Quarterly Journal of Economics* 52(February):310 – 34.

Binger, B., and E. Hoffman. 1988. *Microeconomics with Calculus*. Glenview, Ill.: Scott, Foresman and Co.

Boadway, R., and N. Bruce. 1984. *Welfare Economics*. Oxford: Basil Blackwell.

Blinder, A. S. 1974. *Toward an Economic Theory of Income Distribution*. Cambridge, Mass.: MIT Press.

Boiteux, M. 1949. "La tarification des demandes en point: application de la theorie de la vente au cout marginal." *Revue Géerale de l'electricité*. 58(August): 321 – 40. [1960] Translated as "Peak-Load Pricing." *Journal of Business* 33 (April):157 – 79.

Buchanan, J. M. 1966. "Peak Loads and Efficient Pricing: Comment." *Quarterly Journal of Economics* 80(August):463 – 71.

Burstein, M. 1968. *Microeconomic Theory: Equilibrium and Change*. New York: Wiley.

Coase, R. 1960. "The Problem of Social Cost." *Journal of Law and Economics* 3(October):1 – 44.

Cootner, R. D. 1987. "Coase Theorem." In Eatwell, Milgate and Newman 1987, 1:457 – 459.

Crew, M. A., and P. R. Kleindorfer. 1979a. *Public Utility Economics*. New York: St. Martin's Press.

——. 1979b. "Marshall and Turvey on Peak Load or Joint Product Pricing." *Journal of Political Economy* 79(November/December):1369 – 77.

——. 1986. *The Economics of Public Utility Regulation*. London:

Macmillan.

Deaton, A., and J. Muellbauer. 1980. *Economics and Consumer Behavior*. Cambridge: Cambridge University Press.

Drèze, J. H. 1964. "Some Postwar Contributions of French Economists to Theory and Public Policy." *American Economic Review* 54 (June): 1 – 64.

Dupuit, J. 1844. "On the Measurement of the Utility of Public Works." Trans. R. H. Barback. In K. J. Arrow and T. Scitovsky (1969): 255 – 83.

Eatwell, J., M. Milgate, and P. Newman, eds. 1987. *The New Palgrave: A Dictionary of Economics*. 4 vols. London: Macmillan.

El-Hodiri, M. A., and A. Takayama. 1973. "Behavior of the Firm under Regulatory Constraint: Clarifications." *American Economic Review* 63 (March): 235 – 39.

——. 1981. "Dynamic Behavior of the Firm with Adjustments Costs, under Regulatory Constraint." *Journal of Economic Dynamics and Control* 3 (February): 29 41.

Ferguson, C. E. 1969. *The Neoclassical Theory of Production and Distribution*. New York: Cambridge University Press.

Ferguson, C. E. and T. R. Saving. 1969. "Long-Run Scale Adjustments of a Perfectly Competitive Firm and Industry." *American Economic Review* 59 (December): 774 – 83.

Friedman, M. 1967. *Price Theory—A Provisional Text*. Rev. ed. Chicago: Aldine.

Greenwald, B. C., and J. E. Stiglitz. 1986. "Externalities in Economies with Imperfect Information and Incomplete Markets." *Quarterly Journal of Economics* 101 (May): 229 – 64.

Hanoch, G. 1965. "The Backward-bending Supply of Labor." *Journal of Political Economy* 73 (December): 636 – 42.

Henderson, J. M., R. E. Quandt. 1980. *Microeconomic Theory: A Mathematical Approach*. 3d ed. New York: McGraw-Hill (1st ed. 1958, 2d ed. 1971).

Hicks, J. R. 1946. *Value and Capital*. 2d ed. Oxford: Clarendon Press (1st ed. 1939).

Hirschleifer, J. 1958. "Peak-Loads and Efficient Pricing: Comment." *Quarterly Journal of Economics* 72 (August): 452 – 62.

Honma, M. 1980. "Market Failures" (in Japanese). In *Keizaigaku Daijiten* (Great Directory of Economics) 1: 247 60, Tokyo: Toyo Keizai Shimposba.

Hotelling, H. 1938. "The General Welfare in Relation to Problems of Taxation and of Railway and Utility Rates." *Econometrica* 6 (July): 242 69. Reprinted in Arrow and Scitovsky (1969), 284 – 308.

Houthakker, H. S. 1951. "Electricity Tariffs in Theory and Practice."

Economic Journal 61(March):1 – 25.

250 ——. 1958. "Peak Load and Efficient Pricing: Further Comment." *Quarterly Journal of Economics* 72(August):463 – 64

Ide, T. and A. Takayama. 1987a. "Marginal Cost Pricing and Economies of Scale." *Vandeveer Discussion Paper Series*, no. 87 – 20.

——. 1987b. "On the Concepts of Returns to Scale." *Economics Letters* 23 (4):329 – 34.

——. 1989a. "Returns to Scale under Non-Homotheticity and Homotheticity, and the Shape of Average Costs." *Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft* 145(June):369 – 88.

——. 1989b. "Factor Prices and the Shape of Average Cost Curves." *Journal of International Economic Intergration*, 4, Autumn: 1 – 7.

Imai, K., H. Uzawa, R. Komiya, T. Negishi, and Y. Murakami. 1971. *Price Theory II* (in Japanese). Tokyo: Iwanami.

Joskow, P. L. 1976. "Contributions of the Theory of Marginal Cost Pricing." *Bell Journal of Economics* 7(Spring):195 – 248.

Kahn, A. E. 1970. *The Economics of Regulation: Principles and Institutions*. 2 vols. New York: Wiley.

Kaldor, N. 1935. "Market Imperfection and Excess Capacity." *Economica* n. s. 2(February):33 – 50.

Killingsworth, M. R. 1983. *Labor Supply*. Cambridge: Cambridge University Press.

Klevorick, A. K. 1966. "Graduated Fair Return: A Regulatory Proposal." *American Economic Review* 59(June):477 – 84.

Knight, F. H. 1921. "Cost of Production and Price over Long and Short Periods." *Journal of Political Economy* 29(April):304 – 35.

Kudon, K. and S. Yabushita. 1974. "Economic Analysis of Pollution: A Survey" (in Japanese.) *Economics Studies Quarterly* 25(December):1 – 31.

Lange, O. 1942. "The Foundations of Welfare Economics." *Econometrica* 10 1987(July/October):215 – 28. Reprinted in Arrow and Scitovsky(1969), 26 – 38.

Layard, P. R. G., and A. A. Walters. 1978. *Microeconomic Theory*. New York: McGraw-Hill.

Ledyard, J. O. 1987. "Market Failure" In Eatwell, Milgate, and Newman 1987:326 – 29.

Littlechild, S. 1970. "Peak-load Pricing of Telephone Calls." *Bell Journal of Economics and Management Science* 1(Autumn):191 – 210.

Meade, J. E. 1952. "External Economies and Diseconomies in a Competitive Situation." *Economic Journal* 62 (March): 54 – 67. Reprinted in Arrow and Scitovsky 1969, 185 – 98.

Mishan, E. J. 1964. *Welfare Economics*. New York: Random House.

Mitchell, M., G. Manning, Jr., and J. P. Acton. 1978. *Peak Load Pricing*. Cambridge, Mass.: Ballinger.

251 Mohring, H. 1970. "The Peak Load Pricing Problem with Increasing Returns and Pricing Constraints." *American Economic Review* 60(September): 693 – 705.

Morishima, M. 1952. "Consumer's Behavior and Liquidity Preference." *Econometrica* 20(April): 223 – 46.

Mosak, J. D. 1938. "Interrelation of Production Price and Demand." *Journal of Political Economy* 46(December): 761 – 87.

Musgrave, R. A. 1959. *The Theory of Public Finance*. New York: McGraw-Hill.

Nagatani, K. 1978. "Substitution and Scale Effects in Factor Demands." *Canadian Journal of Economics* 11(April): 521 – 27.

Nelson, J. R., ed. 1964. *Marginal Cost Pricing in Practice*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall.

Panzar, J. C., 1976. "A Neoclassical Approach to Peak Load Pricing." *Bell Journal of Economics* 7(Autumn): 521 – 30.

Panzar, J. C., and R. D. Willig. 1979. "Economies of Scale in Multi-Output Production." *Quarterly Journal of Economics* 91(August): 481 – 93.

Pigou, A. C. 1932. *Economics of Welfare*. 4th ed. London: Macmillan.

Portes, R. D. 1971. "Long-Run Scale Adjustments of a Perfectly Competitive Firm and Industry: An Alternative Approach." *American Economic Review* 61 (June): 430 – 34.

Puu, T. 1971. "Some Comments on 'Inferior' (Regressive) Inputs." *Swedish Journal of Economics* 73(June): 241 – 51.

Sakai, Y. 1973. "An Axiomatic Approach to Input Demand Theory." *International Economic Review* 14(October): 735 – 52.

Samuelson, P. A. 1947. *Foundation of Economic Analysis*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press(enlarged ed. 1983).

Scitovsky, T. 1951. *Welfare and Competition*. Homewood, Ill.: Richard D. Irwin.

——. 1954. "Two Concepts of External Economies." *Journal of Political Economy* 62, April: 643 – 51.

Scott, J. T. 1979. "Economies of Scale and Profitability of Marginal-Cost Pricing." *Quarterly Journal of Economics* 93(November): 741 – 742.

Sen, A. K. 1987. "Social Choice." In Eatwell, Milgate, and Newman 1987, 4: 382 93.

Sherman, R. 1985. "The Averch and Johnson Analysis of Public Regulation Twenty Years Later." *Review of Industrial Organization* 2: 178 – 94.

Starrett, D. A. 1988. *Foundation of Public Economics*. New York: Cambridge University Press.

Stein, J. L., and G. H. Borts. 1972. "Behavior of the Firm under Regulatory Constraint." *American Economic Review* 62(December):964 - 70.

252 Steiner, P. O. 1957. "Peak-Loads and Efficient Pricing." *Quarterly Journal of Economics* 71(November):585 - 610.

Stigler, G. J. 1966. *The Theory of Prices*. 3d ed. New York: Macmillan.

Stiglitz, J. E. 1988. *Economics of the Public Sector*. 2d ed. New York: W. W. Norton.

Syrquin, M. 1970. "A Note on Inferior Inputs." *Review of Economic Studies* 37(October):591 - 98.

Takayama, A. 1969. "Behavior of the Firm under Regulatory Constraint." *American Economic Review* 59(June):255 - 60.

——. 1970. "On the Peak-Load Problem." University of Rochester. Manuscript. Revision of "On the Peak-Load Problem." *Krannert Institute Papers*, No. 251 Purdue University, 1969.

——. 1977. "Sensitivity Analysis in Economic Theory." *Metroeconomics* 29 (January-December):9-37.

——. 1979a. "On the Coase Theorem." Lecture notes, Texas A & M University, July.

——. 1979b. "On the Inferior Inputs: An Expository Note." Lecture notes, Texas A & M University, December.

——. 1983. "A Note on Labor Supply." Lecture notes, Southern Illinois University, September(also Purdue University, September 1971).

——. 1984. "Consumer's Surplus, Path Independence, Compensating and Equivalent Variations." *Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft* 141 (Dezember):594 - 625.

——. 1985. *Mathematical Economics*. 2d ed. New York: Cambridge University Press(1st ed. 1974).

——. 1987. "Consumer Surplus." In Eatwell, Milgate, and Newman 1987, 1: 607 - 13.

——. 1988. "Behavior of the Firm Under Regulatory Constraint: Revisited." Lecture notes, Southern Illinois University, June.

Turvey, R. 1968. "Peak Load Pricing." *Journal of Political Economy* 76 (January/February):101 - 113.

Vickery, W. 1987"Marginal and Average Cost Pricing." In Eatwell, Milgate, and Newman 1987, 3:311 - 18.

Viner, J. 1931. "Cost Curves and Supply Curves." *Zeitschrift für Nationalökonomie* 3: 23 - 46. Reprinted in *Readings in Price Theory*, ed. G. J. Stigler and K. E. Boulding, 198 - 226, with "Supplementary Note(1950)," 227 - 32. Homewood, Ill.: Richard D. Irwin, 1952.

Westfield, F. M. 1965. "Conspiracy and Regulation." *American Economic*

Review 55(June):424 – 43.

Williamson, O. E. 1966. "Peak-Load Pricing and Optimal Capacity," *American Economic Review* 56(September):810 – 27.

253 Wiseman, J. 1987. "Peak Load Pricing." In Eatwell, Milgate, and Newman 1987,3:822 – 23.

Zajac, E. E. 1970. "A Geometric Treatment of Averch-Johnson's Behavior of the Firm Model." *American Economic Review* 60(April):117 – 25.

——. 1972. "Lagrangian Multiplier Values at Constrained Optima." *Journal of Economic Theory* 4(April):125 – 31.

第3篇
不确定性经济学

第 5 章　不确定性经济学

257　von Neumann 和 Morgenstern(1953)奠定了不确定性经济学的基础.其后由于 Arrow 和 Pratt 于 20 世纪 60 年代在这方面卓有成效的贡献,不确定性经济学于 70 年代及 80 年代受到广泛的关注,在此期间有大量重要的论文和著作问世.现在几乎所有微观经济学的教科书中都包含这个题目.还有一些书籍是专门讲授此问题的,如 Hey(1979),Sakai(1982)和 Laffont(1989).[1]

此方向的发展主要是运用期望效用假设.虽然许多情况与此假设不符,但到现在为止它仍是最为流行的方法.受欢迎的主要原因是源于此假设的可操作性.该假设不过分拘泥于不确定性的哲学思考,而是为涉及不确定性的问题提供了一个简单却有效的分析框架.本章给出问题的要点,把读者引入一个很重要的领域.

§5.1　期望效用假设

通常在讨论选择理论时,对选择行为及其后果没有做区分.但是在不确定性情况下,行为及其后果取决于外部环境,这里称为**自然状态、环境状态,或者简称状态**.可从中做出选择的可选情况的集合称为**预期**(prospect).给定 s 个
258　状态,每个预期由**后果**$(x_1, x_2, \cdots, x_s)$与相应的概率 $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_s$ 定义,这些

概率可被视为个人的主观概率.[2]我们用 $y=(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_s;x_1,x_2,\cdots,x_s)$ 来表示一个预期,或简单地由 $y=(\pi,x)$ 表示,其中 $\pi=(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_s)$, $x=(x_1,x_2,\cdots,x_s)$. 如果只有两种后果,则可简化为 $y=(\pi;x_1,x_2)$,显然,它与 $(\pi,1-\pi;x_1,x_2)$意义相同. 下面是一个简单的预期实例,假设一次赌博,赢100美元的概率为0.3,输50美元的概率为0.7,那么预期就表示为(0.3;100,−50). $(p,p',p'',\cdots;y,y',y'',\cdots)$为一种更为复杂的预期,其中 $p,p',p'',\cdots$ 为得到预期 $y,y',y'',\cdots$ 的概率. 这种预期称为**复合预期**或**复合抽彩**. 这里

$$y=(\pi;x),y'=(\pi';x'),y''=(\pi'',x''),\cdots$$

其中, $\pi=(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_s),\pi'=(\pi_1',\pi_2',\cdots,\pi_s'),\cdots,$

$x=(x_1,x_2,\cdots,x_s),x'=(x_1',x_2',\cdots,x_s'),\cdots.$

在上面的公式中,隐含着一个假设,即对于每个自然状态发生的概率,个人可以主观地估计出来. 然而,我们注意到,像 Frank Knight (1921年)指出的那样,"风险"(概率已知或至少是可知的)与"不确定性"(事件发生概率未明确地有意义地加以定义)之间有根本的不同. 不确定性的一个重要的实例是一个创业家的投资决策,此决策是惟一的,无法与以前的决策相比较. 然而,通过强调概率的主观方面,并利用公理化的方法,它们之间的差别就变得基本上无所谓了(见 Savage 1954, Anscombe 及 Aumann 1963). 因此,这里所指的风险和不确定性意义相同.

定义 Y 为面临某些选择问题的一个专人的所有预期的集合. 假定在 Y 的元素上可以定义一个二元的关系"$\gtrsim$". "$y\gtrsim y'$"表示预期 y 不次于预期 y',这是一个偏好排序. 假定偏好排序有以下属性:(a)**自反性**(即对所有 $y\in Y$, $y\gtrsim y$),(b)**传递性**(即对所有 $y,y',y''\in Y$,如果 $y\gtrsim y'$,并且 $y'\gtrsim y''$,则 $y\gtrsim y''$).

我们假定$\gtrsim$**是完备的**,即对于所有的 $y,y'\in Y$,有 $y\gtrsim y'$或 $y'\gtrsim y$. 如果 $y\gtrsim y'$并且 $y'\gtrsim y$,则个人视 y 和 y' 是无差别的,并用 $y\sim y'$ 表示. 如果 $y\gtrsim y'$
259 而 $y'\gtrsim y$ 不成立,则个人对 y 的偏好高于 y',用 $y\succ y'$ 表示. 我们可以证明(a) $y\sim y'$且 $y'\sim y''$,则 $y\sim y''$;(b) $y\succ y'$且 $y'\succ y''$,则 $y\succ y''$. 也就是说,$\sim$和$\succ$有传递性. 作为总结,我们提出公理5.1.[3]

【公理5.1】 个人有一个定义于 Y 上的偏好排序,这是一种完备的排序.

因对于任一 $x\in X$,我们易有 $(\pi;x,x)=x$(其中 X 为后果集合),所以公理5.1隐含在 X 上个人有一个偏好排序$\gtrsim$,这是一种完备的排序.

在此基础上,von Neumann 和 Morgenstern 进一步提出了一些公理. 首先是公理5.2.

【公理5.2】(连续性) 对于所有的 $y^1,y^2,y^3\in Y$,如果 $y^1\gtrsim y^2\gtrsim y^3$,则存在 $\alpha,0\leqq\alpha\leqq1$,使得

$$\alpha y^1+(1-\alpha)y^3\sim y^2 \tag{1}$$

简单说就是,如果 $y^1\gtrsim y^2\gtrsim y^3$,则存在三个预期中最好预期的某个概率 α 和二个预期中最坏预期的相应概率 $(1-\alpha)$,使它们与中间的预期没有差别.

下列公理与复合彩票的概率计算有关. 令 $L_1=(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_r;x_1,x_2,\cdots,x_s)$, $L_2=(\pi_1',\pi_2',\cdots,\pi_t';x_1,x_2,\cdots,x_v)$, 或简写为 $L_1=(\pi;x)$, $L_2=(\pi';x)$. 现在考虑从 L_1,L_2 所得到的预期 y,

$$y\equiv(\alpha;L_1,L_2)=[\alpha;(\pi;x),(\pi';x)] \tag{2}$$

这是一个复合彩票,对于它我们首先要在彩票 L_1 和 L_2 之间进行选择. 现陈述公理 5.3.

【公理 5.3】 对于任何 x 和 $0\leqq\alpha,\pi,\pi'\leqq1$, 考虑复合彩票

$$y=[\alpha;(\pi;x),(\pi';x)]$$

260 那么我们有

$$y\sim(p;x),\text{这里 } p\equiv\alpha\pi+(1-\alpha)\pi' \tag{3}$$

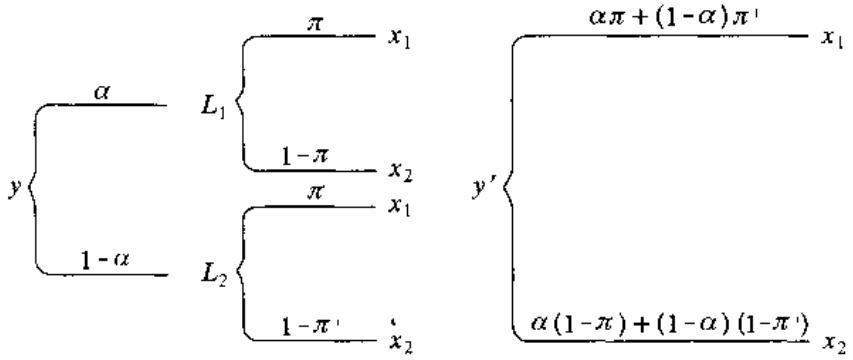
为便于说明,这里假定 $x=(x_1,x_2)$. 通过此复合彩票得到 x_1 的概率为

$$\begin{aligned}Pr(x_1)&=Pr(\text{有票 }L_1)\cdot Pr(x_1|L_1)+Pr(\text{有票 }L_2)\cdot Pr(x_1|L_2)\\&=\alpha\pi+(1-\alpha)\pi'(\equiv p)\end{aligned}$$

这里 $Pr(x_1|L_1)$读作有票 L_1 的情况下得到 x_1 的概率. 类似地,得到 x_2 的概率为

$$Pr(x_2)=\alpha(1-\pi)+(1-\alpha)(1-\pi')$$

因此 $Pr(x_1)+Pr(x_2)=1$. 上面的计算法则意味着,对个人而言复合彩票 y 与简单彩票 $y'\equiv(p;x_1,x_2)$等价,其中 $p\equiv\alpha\pi+(1-\alpha)\pi'$. 这两个等价的彩票如图 5.1 所示.



(a) 复合彩票　　(b) 简单的彩票

图 5.1　将复合彩票分解为简单彩票

261 公理 5.3 的要旨在于我们可通过运用一般的概率法则找到与复合彩票等价的简单彩票. 公理 5.3 所含内容比式(3)表面上看起来的要广. 例如,根据一般的概率计算法则,我们可以容易地确定下列等式关系:

$$y \sim [\alpha; x_2, (\pi; x_1, x_2)] \sim [(1-\alpha)\pi; x_1, x_2] \tag{4}$$

为说明这点,注意

$$Pr(x_1) = Pr(\pi; x_1, x_2) \cdot Pr[x_1 | (\pi; x_1, x_2)] = (1-\alpha)\pi$$

类似地,

$$Pr(x_2) = \alpha + (1-\alpha)(1-\pi) = 1 - (1-\alpha)\pi$$

公理 5.3 排除了从达到结果的过程中获得特定效用的可能性,而许多人却喜好这种过程(如,赛马,pachinko,吃角子的赌博机). Alchian(1953 年)用赌博机的例子来反对公理 5.3. 因为公理 5.3 意味着在"赌博中没有乐趣". 虽然此公理看起来未免不现实且枯燥,但是它却使我们避开了这样一个问题:如何衡量赌博过程中"乐趣"的多少,一般而言,它是随机的,因人而异的.

公理 5.4 如下所述:

【公理 5.4】(独立性)

(i) 对所有 $y^1, y^2 \in Y$, $y^1 \succ y^2$,存在一个 α, $0 < \alpha < 1$,使得

$$\alpha y^1 + (1-\alpha)y \succ \alpha y^2 + (1-\alpha)y, \text{ 对所有 } y \in Y \tag{5}$$

(ii) 对所有 $y^1, y^2 \in Y$, $y^1 \sim y^2$,存在 α, $0 < \alpha < 1$,使得

$$\alpha y^1 + (1-\alpha)y \sim \alpha y^2 + (1-\alpha)y, \text{ 对所有 } y \in Y \tag{6}$$

命题(i)说明了,假定个人对 y^1 的偏好高于对 y^2 的偏好,y 是任何可能的预期. 如果彩票 L_1 产生 y^1 和 y 的概率分别为 α 和 $(1-\alpha)$,且另一彩票 L_2 产生
262 结果 y^2 和 y 的概率也分别为 α 和 $(1-\alpha)$,则个人将选择 L_1 而非 L_2. 也就是说,对任意 $y \in Y$, $0 < \alpha < 1$,如果 $L_1 = (\alpha; y^1, y)$, $L_2 = (\alpha; y^2, y)$,及 $y^1 \succ y^2$,则 $L_1 \succ L_2$. 命题(ii)说明了,假如对个人而言 y^1 和 y^2 等价,则 L_1 和 L_2 也对他等价.

注意,下面的被称为**单调性**的性质,可以通过前面的公理,包括公理 5.4 的命题(i)(独立性公理)得到.

单调性 设 $x_1, x_2 \in X$,则 $x_1 \succsim x_2$,并设 $0 < \pi, \pi' < 1$. 那么我们有

(i) $\pi > \pi' \Leftrightarrow (\pi; x_1, x_2) \succ (\pi'; x_1, x_2)$

(ii) $\pi = \pi' \Leftrightarrow (\pi; x_1, x_2) \sim (\pi'; x_1, x_2)$

假定某人对 x_1 的偏好高于 x_2,令 $y = (\pi; x_1, x_2)$, $y' = (\pi'; x_1, x_2)$. 那么,由单调性可知,当且仅当 $\pi > \pi'$ 时,此人对 y 的偏好高于对 y' 的偏好.[4]

我们下面给出本章的主要定理.

【定理 5.1】(von Neumann - Morgenstern) 在上述公理集下,存在一个定义于 Y 上的实函数 u,使得

(i) 当且仅当 $u(y^1) > u(y^2)$ 时, $y^1 \succ y^2$

(ii) 对于任意 $x_1, x_2, \cdots, x_s \in X$, $0 \leqslant \pi_i \leqslant 1$, $i = 1, 2, \cdots, s$,且 $\sum_{i=1}^{s} \pi_i = 1$,有

$$u(\pi_1,\cdots,\pi_s;x_1,\cdots,x_s)=\pi_1u(x_1)+\pi_2u(x_2)+\cdots+\pi_su(x_s) \tag{7}$$

263 **证明**:为便于说明,假定 $s=2$,或 $x=(x_1,x_2)$. 选择 $b,w\in Y$,使得对于所有的 $y\in Y$,$b\succsim y$,并且对所有的 $y'\in Y$,$y'\succsim w$.[5]如果 $b\sim w$,则证明很容易,故假定 $b>w$. 令 $y\equiv(\pi;x_1,x_2)\in Y$,这里 $x_1,x_2\in X$,且 $0\leqq\pi\leqq1$. 根据连续性公理(公理 5.2),则存在 π_1,π_2,且 $0\leqq\pi_1,\pi_2\leqq1$,使得

$$x_1\sim(\pi_1;b,w)\text{且 }x_2\sim(\pi_2;b,w)$$

根据独立性公理 5.4(ii),可得到

$$(\pi;x_1,x_2)\sim[\pi;(\pi_1;b,w),(\pi_2;b,w)]$$

利用公理 5.3,可得到

$$[\pi;(\pi_1;b,w),(\pi_2;b,w)]\sim(p;b,w)$$

这里 $p\equiv\pi\pi_1+(1-\pi)\pi_2$. 根据公理 5.1 的传递性,可得

$$y\equiv(\pi;x_1,x_2)\sim(p;b,w)$$

令 $y'=(\pi';x_1',x_2')\in Y$,这里 $x_1',x_2'\in X$,$0\leqq\pi'\leqq1$. 重复前面的步骤,就可得到

$$y'\equiv(\pi';x_1',x_2')\sim(p';b,w)$$

264 这里 $p'\equiv\pi'\pi_1'+(1-\pi')\pi_2'$,$0\leqq\pi',\pi_1',\pi_2'\leqq1$.

但是根据单调性,可得

$$(p;b,w)\succsim(p';b,w),\text{当且仅当 }p\geqq p'$$

因此,由$\succsim$的可传递性,可得

$$y\succsim y',\text{当且仅当 }p\geqq p'$$

所以,为证明本定理,只要求得这样的 u,使得

$$E[u(y)]\geqq E[u(y')],\text{当且仅当 }p\geqq p' \tag{8}$$

为此,对特定结果,我们令

$$u(w)=0,u(b)=1$$

$$u(x_1)=\pi_1,u(x_2)=\pi_2,u(x_1')=\pi_1',u(x_2')=\pi_2'$$

由此可得

$$E[u(y)]=\pi u(x_1)+(1-\pi)u(x_2)=\pi\pi_1+(1-\pi)\pi_2=p$$

类似地,有

$$E[u(y')]=p'$$

这也就证明了 $s=2$ 时等式(8)成立. 上述证明可以很容易地推广到 $s>2$ 的情况. （证毕）

我们将定理 5.1 中所得到的效用函数称为 **von Neumann－Morgenstern 效用函数**，或简单称为 NM(或 vNM)**效用函数**，或更简单地称为**效用函数**. 定理 5.1 的推论为一个"理性"的人在不同的预期中进行选择，只是为了使下述期望效用取最大值

$$\sum_{i=1}^{s}\pi_i u_i(x_i)$$

定理 5.1 被称为**期望效用定理**. 在许多有关不确定性的论著都有定理 5.1 的
265 证明.[6] 上述的证明来自 Bacharach(1977, 26～28 页). 定理 5.1 的性质(i)和性质(ii)分别被称为**保序性和线性性**. 这两种性质组合起来被称为**期望效用性质**.

定理 5.1 的逆命题也成立. 也就是说，容易证明，如果存在一个效用函数 z 满足定理 5.1 的性质(i)和性质(ii)，那么它也满足公理 5.1～5.4. 为了说明这一点，我们可以证明由定理 5.1 的(i)和(ii)可推出公理 5.3. 为简化证明，假定 $s=2$ 或 $x=(x_1,x_2)$. 首先观察下列关系，对任意 $x_1,x_2\in X$, $0\leqq\alpha,\pi,\pi'\leqq 1$:

$$\begin{aligned}
&u[\alpha;(\pi;x_1,x_2),(\pi';x_1,x_2)]\\
&=\alpha u(\pi;x_1,x_2)+(1-\alpha)u(\pi';x_1,x_2)\\
&=\alpha[\pi u(x_1)+(1-\pi)u(x_2)]+(1-\alpha)[\pi' u(x_1)+(1-\pi')u(x_2)]\\
&=[\alpha\pi+(1-\alpha)\pi']u(x_1)+[\alpha(1-\pi)+(1-\alpha)(1-\pi')]u(x_2)\\
&=u[\alpha\pi+(1-\alpha)\pi';x_1,x_2]
\end{aligned}$$

根据命题(i)，这表示

$$[\alpha;(\pi;x_1,x_2),(\pi';x_1,x_2)]\sim[\alpha\pi+(1-\alpha)\pi';x_1,x_2]$$

与此类似，从定理 5.1 的(i)和(ii)，可以得出其他公理.

注：定理 5.1 并不表示一个人有意识地知道他的效用函数. 定理 5.1 只是说，如果给定这四个公理，那么这个人的行为尤如他是效用期望值的最大化者.

266 容易证明，如果 $u(y)$ 是一个 NM 效用函数，则 $v(y)\equiv a\cdot u(y)+b$ 也是 NM 效用函数，这里 a,b 为任意实数，$a>0$. 证明如下：

首先观察，对任意 $y,y'\in Y$，有

$$\begin{aligned}
y\succ y'&\Leftrightarrow u(y)>u(y')\\
&\Leftrightarrow au(y)+b>au(y')+b\\
&\Leftrightarrow v(y)>v(y')
\end{aligned}$$

也就是说，$v(y)$ 也有保序性. 另外观察

$$v(\alpha;y,y')=au(\alpha;y,y')+b$$
$$=a[au(y)+(1-\alpha)u(y')]+b$$
$$\equiv av(y)+(1-\alpha)v(y')$$

因此 $v(y)$有线性性.

上面命题的逆命题也成立.也就是说,如果 $u(x)$为一个 NM 效用函数,则具有期望效用性质的 u 的任一单调变换都必须是线性(仿射)变换.[7]证明如下:

令 $\phi(u)$为有期望效用性质的 u 的单调变换,即具有保序性

$$u(y)>u(y'),\text{当且仅当}\ \phi[u(y)]>\phi[u(y')]$$

和线性性

267

$$\phi\{u[\alpha y+(1-\alpha)y']\}=\alpha\phi[u(y)]+(1-\alpha)\phi[u(y')],\quad 0\leqslant\alpha\leqslant1$$

因为 u 也有线性性,所以该等式的左部分可改写为

$$\phi[au(y)+(1-\alpha)u(y')]=\alpha\phi[u(y)]+(1-\alpha)\phi[u(y')],0\leqslant\alpha\leqslant1$$

这只不过是一个线性(仿射)变换的定义.

推论 NM 效用函数对于线性(仿射)变换是惟一的.

注:NM 效用函数对线性变换是惟一的,这一性质说明 NM 效用函数是基数的.这与华氏温度(F)为摄氏温度(C)的线性变换的命题类似,其中 $F=(9/5)C+32$.同样,假如 u 是固定的,NM 效用函数中的差有着重要的含义.例如,$u(y)=50$,$u(y')=20$,$u(y'')=0$,则 $u(y)-u(y')=30>10=u(y')-u(y'')$.因此,$y'$到 y 间的效用增量比 y'与 y''间的增量要大.但是,我们不能说前者三倍于后者.这是因为当取 $v(\cdot)=au(\cdot)+b$,有

$$\frac{u(y)-u(y')}{u(y')-u(y'')}=3,\frac{v(y)-v(y')}{v(y')-v(y'')}=3a$$

这里,a 可为任何正数.因此这里的基数性与重量和长度不同.这种情况与温度类似:我们不能说 80 度(F)比 20 度(F)暖 4 倍,因为如果转换为摄氏度,这种倍数关系就不成立了.

毫无疑问,期望效用假设的合理性取决于我们上面所述的四个公理的有效性.因此理解它们各自的含义非常重要.公理 5.1 和公理 5.3 通常被认为是可接受的.但对公理 5.2 和连续性公理,却提出一个重要的反例.现解释如下,公理 5.2 意指:对 $y^1>y^2>y^3$,存在 $\alpha\in(0,1)$,使得

$$\alpha y^1+(1-\alpha)y^3\sim y^2$$

268 现考虑如下情况:$x_1=100$ 美元,$x_2=1$ 美元,$x_3=$ 被枪打死,于是可以假定

$x_1 \succ x_2 \succ x_3$. 但我们能说存在 $\alpha \in (0,1)$, 使得

$$\alpha x_1 + (1-\alpha)x_3 \sim x_2?$$

很难想像有人会接受为了 1 美元而被枪打死的任何一个正的概率. 此反例由 Alchian(1953)提出. 虽然反例有一定道理, 但是许多人认为我们无需担心这种情况, 因为我们对这种极端的情况不感兴趣. 我们仅对能解释在"正常"环境中(即诸 x_i 是受限的)人的行为的公理有兴趣. 另外, 通过将 x_3 从结果集 X 中删除, 也可以避免此问题. 因此通过定义 X 可避免此问题.

最为严峻的挑战针对公理 5.4, 独立性公理.[8]为便于理解这样一个反对意见, 回顾一下公理 5.4 的命题(i), 对任何 $y^1, y^2 \in Y$, 使得 $y^1 \succ y^2$, 有

$$(\alpha; y^1, y) \succ (\alpha; y^2, y) \text{ ,对所有 } y \in Y, 0 < \alpha < 1$$

这意味着 y 的概率并不影响 y^1 和 y^2 偏好的顺序. 因此, 如果我们能找到一个 $y \in Y$, 使得

$$\text{对某 } \alpha, 0 < \alpha < 1, (\alpha; y^2, y) \succ (\alpha; y^1, y)$$

则公理 5.4 不成立. 人们认为可以找到这样的例子.

例如, 考虑 y^1, y^2, 定义如下:

$$y^1 = (1; 3\,000, 0), y^2 = (4/5; 4\,000, 0)$$

269 这里, y^1 表示一种彩票, 得到3 000 美元的概率为 1; y^2 表示另一种彩票, 得到 4 000 美元的概率为 80%. 假定某人对 y^1 的偏好比 y^2 高, 即 $y^1 \succ y^2$. 令 $y = (1;0,0)$, 则我们就不再清楚是否可说

$$\text{对所有 } \alpha, 0 < \alpha < 1, (\alpha; y^1, y) \succ (\alpha; y^2, y)$$

例如, 令 $\alpha = 1/4$, $y^3 \equiv (1/4; y^1, y)$, $y^4 \equiv (1/4; y^2, y)$. 那么我们易证明

$$y^3 = (1/4; 3\,000, 0), y^4 = (1/5; 4\,000, 0)$$

则个人可能对 y^4 的偏好高于 y^3, 与独立性公理相矛盾. 这里, y^3 将得到3 000 美元的概率从 100%降为 25%, y^4 将得到4 000美元的概率从 80%降为 20%. 也就是说, 当不能肯定得到3 000美元收益时, 此人也许会选择另一彩票. 简而言之, 个人会给能以概率 1 保证中奖的彩票附加上保险费. 这就是 **Allais 悖论** 的实质. 独立性公理排除了这种保险费的可能性.

如果公理 5.4 不成立, 则期望效用假说也不成立. 因为 $y^1 \succ y^2$, 用期望效用的形式可表示为

$$u(y^1) = 1 \cdot u(3\,000) + 0 \cdot u(0) > (4/5) \cdot u(4\,000) + 0 \cdot u(0)$$

不失一般性, 设 $u(0) = 0$, 得到 $u(3\,000) > (4/5)u(4\,000)$. 类似地, 可将 $y^4 \succ y^3$ 表示为

$$u(y^4)=(1/5)u(4\,000)+(4/5)u(0)$$
$$>(1/4)u(3\,000)+(3/4)u(0)=u(y^3)$$

这意味着$(1/5)u(4\,000)>(1/4)u(3\,000)$.这与$u(3\,000)>(4/5)u(4\,000)$相矛盾.

另举一个与独立性公理相矛盾的例子.考虑y^1和y^2限定为

$$y^1-(0.9;30\,000,0),\quad y^2=(0.45;60\,000,0)$$

假定$y^1\succ y^2$.下面考虑

$$y^3=(0.02;30\,000,0),y^4=(0.01;60\,000,0)$$

270 这里的30 000和60 000分别表示得到30 000美元和60 000美元.注意y^1的期望值与y^2的期望值相等,因为

$$0.9\cdot 30\,000=27\,000=0.45\cdot 60\,000$$

并且y^3的期望值也与y^4的相等,因为

$$0.02\cdot 30\,000=600=0.01\cdot 60\,000$$

令$y=(1;0,0)$,并且注意到

$$y^3\equiv(0.02;30\,000,0)$$
$$=[1/450;(0.9;30\,000,0)]$$
$$=(1/450;y^1,0)$$
$$y^4\equiv(0.01;60\,000,0)$$
$$=[1/450;(0.45;60\,000,0)]$$
$$=(1/450;y^2,0)$$

根据独立性公理,$y^1\succ y^2$一定会推出$y^3\succ y^4$,但是,个人在y^3和y^4中也许会选择y^4.因为y^3得到30 000美元的概率只有2%,y^4得到60 000美元的概率为1%.当概率都很小时,购票者也许会选择奖金额大的彩票.我们称其为**快速致富效应**.[9]

在这种情况下,期望效用假说不成立.为说明这点,$y^1\succ y^2$,$y^4\succ y^3$用期望效用的方式表示为

$$u(y^1)=0.9\cdot u(30\,000)\succ(0.45)\cdot u(60\,000)=u(y^2)$$
$$u(y^4)=0.01\cdot u(60\,000)>(0.02)\cdot u(30\,000)=u(y^3)$$

其中,$u(0)=0$.根据第一个关系式,可得$u(30\,000)/u(60\,000)>0.5$;根据第二个关系式,可得$u(30\,000)/u(60\,000)<0.5$.这两者显然相矛盾.

§5.2 期望效用与风险行为

5.2.1 风险行为

271 令 $y=(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_s;x_1,x_2,\cdots,x_s)$为一彩票函数,其中 $x_1,x_2,\cdots,x_s$ 为现金回报.y 的期望值可如下计算:

$$E(y)=\pi_1x_1+\pi_2x_2+\cdots+\pi_sx_s$$

如果一个人的彩票期望值的效用与其期望效用相等,即有

$$u(\pi_1x_1+\pi_2x_2+\cdots+\pi_sx_s)$$
$$=\pi_1u(x_1)+\pi_2u(x_2)+\cdots+\pi_su(x_s) \tag{9}$$

则称该人为**风险中性**.这里假定 u 为严格单调递增.如果某投资者对所有的预期都为风险中性,则他有一个线性的效用函数 $u=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_sx_i+c$,这里,对所有的 $i,\alpha_i>0$.

如果一个人的 NM 效用函数为严格的凹函数,即对 $x_1,x_2,\cdots,x_s\in X$,以及 $0<\pi_i<1,i=1,2,\cdots,s$,恒有

$$u(\pi_1x_1+\pi_2x_2+\cdots+\pi_sx_s)>\pi_1u(x_1)+\pi_2u(x_2)+\cdots+\pi_su(x_s) \tag{10}$$

则称该人是**风险厌恶的**.如果 $u''(x)\equiv d^2u/dx^2<0$,由于 $u(x)$是严格凹的,那么如果 $u''(x)<0$,投资者厌恶风险.

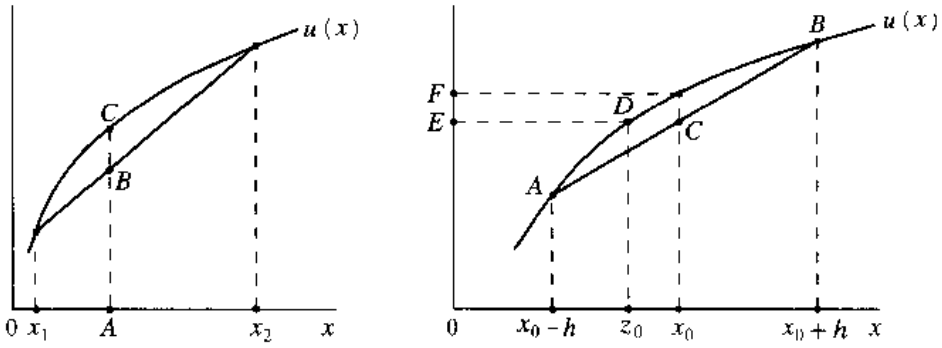
类似地,如果 NM 效用函数严格凸,则此投资者为**风险爱好者**.因为如果 $u''(x)>0$,则 $u(x)$严格凸,所以如果 $u''(x)>0$,则投资者为风险爱好者.当然也可能出现这种情况,对某些 x,$u''(x)<0$,而对另一些 x',$u''(x')>0$(即投资者对某些 x 而言为风险厌恶者,对另一些 x' 而言为风险爱好者.见 Friedman 和 Savage(1948)),本章不考虑这种情况.

再次回忆,如果 $u''(x)<0$ 对所有 x 成立,则 u 严格凹,但它的逆命题不一定成立,因为对一个严格凹的 u,对有些 x,$u''(x)$可能为 0.但是,如果排除 $u''(x)$为 0 的情况,那么当且仅当 $u''(x)<0$ 对所有 x 成立,u 对所有 x 严格凹(投资者总是风险厌恶者).类似地,假设 $u''(x)\neq0$,那么当且仅当 $u''(x)>0$ 对所有 x 成立,投资者为风险爱好者.

272 风险厌恶者的 NM 效用函数如图 5.2(a)所示,预期 $y=(\pi;x_1,x_2)$的期望值为 $\pi x_1+(1-\pi)x_2$,在图 5.2(a)中由 OA 表示.期望效用 $\pi u(x_1)+(1-\pi)u(x_2)$为 AB,期望资产的效用 $u[\pi x_1+(1-\pi)x_2]$为 AC.C 位于点 B 上方,说明投资者厌恶风险.事实上,对于所有严格的凹函数,期望的函数大于函数的期望(有时称为 **Jensen 不等式**),即

$$u[\pi x_1+(1-\pi)x_2]>\pi u(x_1)+(1-\pi)u(x_2),$$

$$0<\pi<1, x_1\neq x_2 \tag{11}$$



(a) 严格凹函数，厌恶风险的效用曲线　　(b) 风险报酬

图 5.2　严格凹的效用函数和风险保证金

因此，任何具有严格凹的效用函数的投资者更愿意选择随机变量期望的确定性，而不是预期自身的不确定性.

为深入理解最后一点，假定投资者面临如下选择：

(i) (x_0+h)美元的概率为 1/2，(x_0-h)美元的概率为 1/2，这里 $0<h<x_0$.

(ii) x_0 美元的概率为 1.

厌恶风险的投资者将会选择(ii)，而不会选择(i)，即

273

$$0.5u(x_0+h)+0.5u(x_0-h)<u(x_0) \tag{12}$$

u 的严格凹意味着连接(x_0-h)和(x_0+h)的弧位于连接这两点的弦之上. 在图 5.2 (b) 中，弧 ADB 位于弦 ACB 之上，$OF>OE$，其中，$OE=0.5u(x_0+h)+0.5u(x_0-h)$. 假定 u 为二次连续可微，严格凹，并且递增，则存在一个惟一的 $z_0(<x_0)$，使得

$$0.5u(x_0+h)+0.5u(x_0-h)=u(z_0) \tag{13}$$

值 z_0 称为选择(i)指定的随机变量 x_0 **的确定性等价值**. 定义 ρ 为

$$z_0=x_0-\rho \tag{14}$$

很容易得出，如果投资者为风险厌恶者，则 $\rho>0$；如果为风险爱好者，则 $\rho<0$. 假定投资者为风险厌恶者，$\rho>0$，ρ 被称为**风险保证金**. 也就是说，风险保证金是投资者为得到确定的回报而愿意支付的最大金额，而非不确定预期的期望回报. 在图 5.2(b)中，ρ 等于线段 DC 的长度. 很明显，ρ 由 x_0 和 h 决定，因而可表示为 $\rho=\rho(x_0,h)$.

5.2.2 风险厌恶的 Arrow－Pratt 度量

通常在不同效用函数之间比较风险厌恶的程度很有用处.这里我们说明与此相关的重要概念和结论.

从风险保证金 $\rho(x_0,h)$的定义,我们可得下列恒等式:

$$u[x-\rho(x,h)]\equiv 0.5u(x+h)+0.5u(x-h)$$

对此恒等式的每一项给出一个泰勒展开式

$$u[x-\rho(x,h)]\cong u(x)-\rho(x,h)u'(x)$$

$$u(x+h)\cong u(x)+hu'(x)+(h^2/2)u''(x)$$

$$u(x-h)\cong u(x)-hu'(x)+(h^2/2)u''(x)$$

将它们代入恒等式,得

$$u(x)-\rho(x,h)u'(x)\cong u(x)+(h^2/2)u''(x)$$

即 $$\rho(x,h)\cong -(h^2/2)[u''(x)/u'(x)]$$

然后,定义

$$R_a(x)\equiv -u''(x)/u'(x) \tag{15}$$

得

$$R_a(x)\cong 2\rho(x,h)/h^2 \tag{15'}$$

令 $u_i(x),i=1,2$,为两个不同的 NM 效用函数.由式(15')得,对一足够小的 h,有

$$R_{a1}(x)>R_{a2}(x),\text{当且仅当 }\rho_1(x,h)>\rho_2(x,h)$$

其中,$R_{ai}(x)$和 $\rho_i(x,h)$分别是 $R_a(x)$的值和 $u_i(x),i=1,2$ 的风险保证金.这里 $R_a(x)$由 Pratt(1964)和 Arrow(1965)提出,**被称为绝对风险厌恶的 Arrow－Pratt 度量,或绝对风险厌恶系数**.相对于 $R_a(x)$,Pratt(1964)和 Arrow(1965)提出了另一种风险厌恶度量.

$$R_r(x)\equiv -xu''(x)/u'(x)=x\cdot R_a(x) \tag{16}$$

称 $R_r(x)$为**相对风险厌恶的 Arrow－Pratt 度量或相对风险厌恶系数**.

对足够小的 h,$R_a(x)$和 $\rho(x,h)$之间的单调关系在**全局范围内成立**.因而,我们有下列结果.

【定理 5.2】(Pratt,1964) 假定两个效用函数 u_1,u_2 为二次连续可微,单调递增,严格凹,则下列条件等价:

(a) $R_{a1}(x)>R_{a2}(x)$;

(b) 对所有 h，有 $\rho_1(x,h)>\rho_2(x,h)$，且

(c) u_1 比 u_2“更凹”，也就是说，存在一个单调递增的严格凹函数 ϕ，使得

275 $u_1(x)=\phi[u_2(x)]$.

此定理的证明可在 Pratt(1964)中找到. Vernon Smith 给出了与(a)和(c)等价的另一种证明，这在 Kihlstrom 和 Mirman(1974, 364～365 页)中可找到.[10]

绝对和相对风险厌恶系数仅取决于效用函数 $u(x)$的形状，并直接与风险保证金有关. 而且它们独立于 u 的线性变换.[11]也就是说，如果 $u_2(x)=au_1(x)+b, a>0$，则 $R_{a2}(x)=R_{a1}(x)$，并且 $R_{r2}(x)=R_{r1}(x)$. 此性质很重要，因为 NM 效用函数仅在线性变换的意义是惟一的. 我们在图 5.3(a)中说明 Pratt 和 Arrow 对风险的两种度量，其中 OA 为 x_0，所以 $CA=u'(x_0)$. 注意

$$R_a(x_0)\equiv -\frac{u''(x_0)}{u'(x_0)}\equiv\frac{CA/AB}{CA}=\frac{1}{AB}$$

$$R_r(x)\equiv -x_0\frac{u''(x_0)}{u'(x_0)}=\frac{OA}{AB}.$$

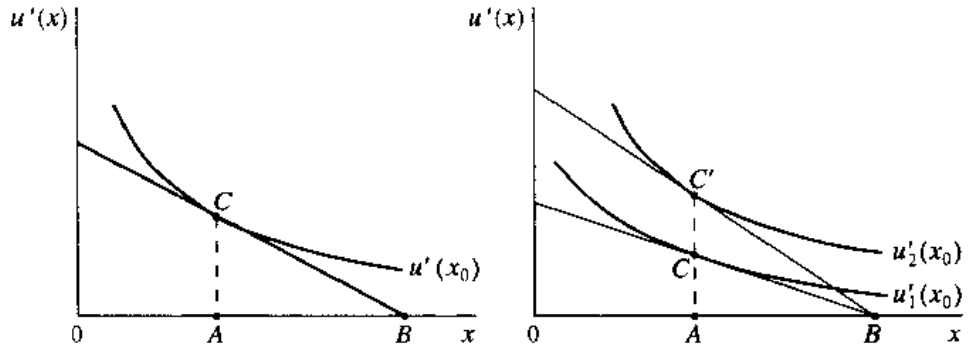
在图 5.3(b)中，$u_2(x)=au_1(x)+b, a>0$. 因为 $u_2'=au_1'$，且 $u_2''=au_1''$，可得 $C'A/AB=a\cdot(CA/AB)$，以及下列关系：[12]

276

$$R_{a1}(x_0)=\frac{CA/AB}{CA}=\frac{1}{AB}=\frac{C'A/AB}{C'A}=R_{a2}(x_0)$$

$$R_{r1}(x_0)=OA/AB=R_{r2}(x_0)$$

也就是说，$R_a(x)$和 $R_r(x)$经线性变换 $u_2(x)=au_1(x)+b$ 后，保持不变.



(a) $R_a(x_0)$和$R_r(x_0)$　　(b) $R_a(x_0)$和$R_r(x_0)$相似性

图 5.3　绝对和相对风险厌恶系数

现在假定个人面对如下选择：

(i) $x_0(1+h^*)$美元的概率为 1/2，$x_0(1-h^*)$美元的概率为 1/2，其中 $0<h^*x_0<x_0$.

(ii) x_0 美元的概率为 1.

在以前所述选择问题的选择(i)中，我们考虑 x_0+h 和 x_0-h 各为 50%

的情况，其中 h 独立于 x_0. 在上面的选择(i′)中，h 与 x_0 相关，或 $h = h^* x_0$. 令 z_0 为(i′)中的 x_0 的确定性等价值. 也就是说，定义 z_0 为

$$0.5u(x_0 + h^* x_0) + 0.5u(x_0 - h^* x_0) = u(z_0) \quad (17)$$

277 由此，定义 $\rho^* > 0$ 为

$$z_0 = (1 - \rho^*)x_0, \text{其中}, \rho^* = \rho^*(x_0, h^*) \quad (18)$$

我们称 ρ^* 为**相对风险保证金**. 在图 5.2(b)中，用 $(1 - h^*)x_0$，$(1 - \rho^*)x_0$，x_0 和 $(1 + h^*)x_0$ 分别替代 $x_0 \quad h$，z_0，x_0 和 $x_0 + h$. 于是得到

$$DC/EC = \rho^* x_0 / x_0 = \rho^*$$

由此可知，DC/EC 表示相对风险度量.

我们下面陈述定理 5.3，这易从定理 5.2 得到：

【定理 5.3】 假定两个效用函数 u_1 和 u_2，为二次连续可微，单调递增，严格凹，则下列条件等价：

(a) $R_{r1}(x) > R_{r2}(x)$；

(b) 对所有 h^*，$\rho_1^*(x, h^*) > \rho_2^*(x, h^*)$.

其中，R_{ri} 和 ρ_i^* 分别表示**相对风险厌恶系数**和**相对风险保证金**，NM 效用函数为 $u_i(x)$，$i = 1, 2$.

Arrow(1965)和 Pratt(1964)对个人的风险行为提出了下列假设：

假设 A 绝对风险厌恶系数为单调递减函数，或对所有的 x，$R_a'(x) < 0$ **(递减的绝对风险厌恶)**.

假设 B 相对风险厌恶系数为单调递增函数，或对所有的 x，$R_r'(x) > 0$ **(递增的相对风险厌恶)**.

根据定理 5.2，对任一固定的 h，当且仅当 $\partial\rho(x, h)/\partial x < 0$ 时，假设 A 成立. 也就是说，此假说等于是说当 x 递增时，个人的风险保证金递减. 从根本上来说，富人比穷人更能承受风险. 同样，根据定理 5.3，当且仅当对任意固定 h^*，$\partial\rho^*(x, h^*)/\partial x > 0$ 时，假设 B 成立，即个人的相对风险厌恶随 x 增长而
278 增长.[13]

由微分 $R_a \equiv -u''(x)/u'(x)$ 可得

$$R_a' = -[u'u''' - (u'')^2]/(u')^2$$

其中，假定 u 为三次连续可微. 因此如果 $R_a' < 0$，则 $u'u''' > (u'')^2 > 0$，所以 $u''' > 0$. 同样，由此等式可知，若 $u''' \leqq 0$，则 $R_a' > 0$. 再因 $R_r = xR_a$，即知如果 $x > 0$，则由 $R_a' > 0$ 可推得 $R_r' > 0$. 因此，我们可得下列 R_a，R_r 和 u''' 之间的关系.

结论 如果 $R_a'(x) < 0$，则 $u'''(x) > 0$. 反之，如果 $u'''(x) \leqq 0$，则

$R_a'(x)>0$. 如果 $x>0$ 且 $u'''(x)\leqq 0$, 则 $R_r'(x)>0$.

5.2.3 例子

在文献中,通常假定效用函数采用某些具体的形式. 我们可检测这样一些实例. 我们要求 $u(x)$ 满足下列条件:

(i) 对所有 x, $u'(x)>0$, $u''(x)<0$.

(ii) $R_a'(x)<0$.

(iii) $R_r'(x)>0$.

我们首先考虑下列二次函数:

$$u(x)=a+bx-cx^2 \tag{19}$$

这里,由 $u'(x)>0$, $u''(x)<0$, 可得 $b>0$, $c>0$ 且 $0\leqq x\leqq b/2c$. 因 $u'''(x)=0$, 由上面的观察可得 $R_a'(x)>0$ 和 $R_r(x)'>0$. 实际上, $R_a(x)$ 和 $R_r(x)$ 计算可得

$$R_a(x)-2c/(b-2cx), R_r(x)=2cx/(b-2cx) \tag{20a}$$

由此可得

$$R_a'(x)=4c^2/(b-2cx)^2>0, R_r'(x)=2bc/(b-2cx)^2>0 \tag{20b}$$

由 $R_a'(x)>0$, 此二次函数可推得富人比穷人更不愿承担风险,"经认真考虑去掉二次型效用,这应该是充分的"(Deaton 和 Muellbauer 1980, 400 页), Arrow(1970, 97 页)称此二次假设"荒谬".

效用函数的另一实例为

$$u(x)=a+b\log(x+c) \tag{21}$$

这里, $u'(x)>0$ 且 $u''(x)<0$, $b>0$ 且 $c\geqq 0$. 对这种情况,我们可计算

$$R_a(x)=1/(x+c), R_a'(x)=-1/(x+c^2)<0 \tag{22a}$$

$$R_r(x)=x/(x+c), R_r'(x)=c/(x+c)^2\geqq 0 \tag{22b}$$

因此,此例满足上面的条件(i),(ii),(iii).

另一例子为

$$u(x)=a-\frac{1}{(x+b)}, a\geqq 0, b>0, a-\frac{1}{b}\geqq 0 \tag{23}$$

此例中,我们可得

$$R_a(x)=2/(x+b), R_a'(x)=-2/(x+b)^2<0 \tag{24a}$$

$$R_r(x)=2x/(x+b), R_r'(x)=2b/(x+b)^2>0 \tag{24b}$$

因此,此例也满足上面的条件(i),(ii),(iii).

另一类简单但却很重要的效用函数为 $R_a(x)=$常数,对所有的 x,令 $R_a(x)=a$(a 为常数),简单积分得

$$u(x)=-e^{-ax},\text{其中 } a>0 \tag{25}$$

由此可得 $u'>0, u''<0$. 另一类简单而重要的效用函数为 $R_r(x)=$常数. 设 $R_r(x)=a$,简单积分可得

如果 $0<a<1$,则 $u(x)=x^{1-a}$

280

如果 $a=1$,则 $u(x)=\log x$

如果 $a>1$,则 $u(x)=-x^{-(a-1)}$ (26)

这两类函数在一些复杂的问题中有助于得出有用的结论.

5.2.4 无差异曲线

考虑彩票$(\pi;x_1,x_2)$,它们的期望效用值为

$$EU\equiv\pi u(x_1)+(1-\pi)u(x_2)$$

给定 π,考虑 EU 为常量的(x_1,x_2)的轨迹,则

$$I^0\equiv\{(x_1,x_2)\in R^2:\pi u(x_1)+(1-\pi)u(x_2)=u^0\},\text{其中 } 0<\pi<1 \tag{27}$$

这定义了**风险下的无差异曲线**. 如果投资者为风险厌恶者(即 $u''<0$),则无差异曲线严格凸向原点. 微分 $EU=u^0$,可得

$$dx_2/dx_1\Big|_{u=u^0}=-\alpha u'(x_1)/u'(x_2) \tag{28a}$$

$$d^2x_2/dx_1^2\Big|_{u=u^0}=-\alpha[u''(x_1)+\alpha u''(x_2)z^2]/u'(x_2) \tag{28b}$$

这里 $\alpha\equiv\pi/(1-\pi)$ 且 $z\equiv u'(x_1)/u'(x_2)$.[14] 实际上,如果 $u''<0$,则 $d^2x_2/dx_1^2>0$,使得无差异曲线对原点严格凸. 相反,如果 $d^2x_2/dx_1^2>0$,则 $u''<0$,因此这个人为厌恶风险.

281 如果在(x_1,x_2)处给式(28b)赋值,即在 45°线上 x_1 和 x_2 相等时,可得

$$d^2x_2/dx_1^2\Big|_{u=u^0}=R_a(x_1)\pi/(1-\pi)^2 \tag{29}$$

这就给了 R_a(绝对风险厌恶的 Arrow-Pratt 度量)的另一种解释.

总之,归纳可得命题 5.1.

【命题 5.1】 当且仅当投资者厌恶风险时,无差异曲线对原点严格凸. 无差异曲线与 45°线交点处的曲率为此点处绝对风险厌恶系数乘以 $\pi/(1-\pi)^2$.

§5.3 应用

5.3.1 保险[15]

考虑一个拥有价值 a 美元的资产(如房屋)的个人.假设该人面临如下风险,可能在某种灾难(如失火)中损失 b 美元的概率为 π.更正规地说,有两种自然状态:S_1 和 S_2.如果 S_1(失火)发生,资产值将减为 $a-b$,而如果 S_2(未失火)发生,价值不变.这就与彩票$(\pi;a-b,a)$等价.投资者愿支付的最大金额,即风险保证金(ρ 表示)可由下式定义:

$$u(a-\rho)=\pi u(a-b)+(1-\pi)u(a)$$

而$(a-\rho)$是此彩票的确定性等价值.假设此人厌恶风险,ρ 为正.如果 $\rho=0$,则他为风险中性,如果 $\rho<0$,则为风险爱好者.

令 $u(x)=\log x$,$a=90\ 000$ 美元,$b=80\ 000$ 美元,$\pi=0.01$.则我们有

$$\log(90\ 000-\rho)=0.01\times\log(10\ 000)+0.99\times\log(90\ 000)$$

得到 $\rho=1\ 567$ 美元.如果 $\pi=0.05$,则 $\rho=9\ 178$ 美元.[16]

假设此人可以买保险.令 x 为当 S_1 发生时,保险公司赔偿的数目,令 P 为此保险的保险费.令 S_2 为无事故发生的状态,由此可得此人最后的财富为

如果 S_1 发生,$a_1=a-b-P+x$

如果 S_2 发生,$a_2=a-P$

这与彩票$(\pi;a_1,a_2)=(\pi;a-b-P+x,a-P)$等价.此人在此彩票上的效用的期望值为

$$\pi u(a-b-P+x)+(1-\pi)u(a-P)$$

如果此效用期望值超出不购买保险的期望效用,

$$\pi u(a-b)+(1-\pi)u(a)$$

此人将购买此保险.假定[17]

$$0<a-b<a_1<a_2$$

或

$$0<a-b<a-b-P+x<a-P$$

如果此人厌恶风险,即如果 u 为严格凹,则容易可得[如图 5.4(a)所示]

$$\pi u(a_1)+(1-\pi)u(a_2)>\pi u(a-b)+(1-\pi)u(a)$$

因此,厌恶风险的此人将购买保险.

另一方面,如果 u 严格凸(即此人为风险爱好者),上面的不等式反向,此人将不购买保险.在风险中性的情况下,此人是否购买保险($x>0$)取决于是
283 否 $\pi x>P$(证明为什么).简而言之,此人将购买此保险(不考虑 πx 和 P 的值),当且仅当他是风险厌恶者(即 u 严格凹).

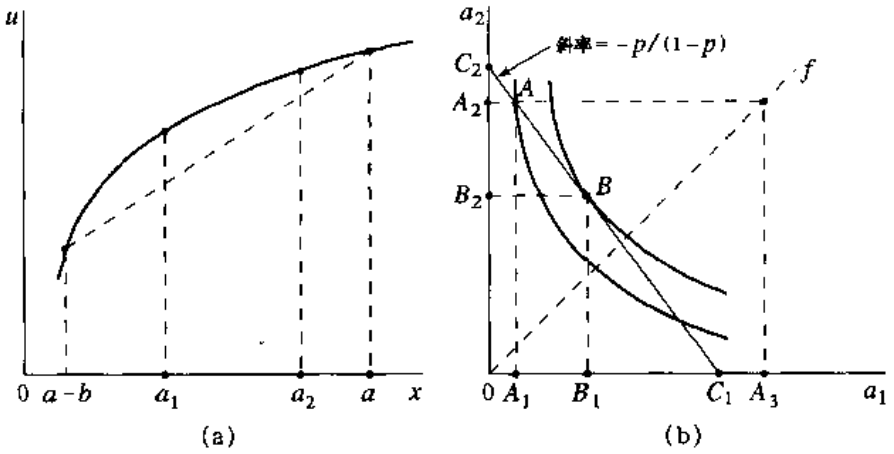


图 5.4 对保险的需求

令 $p\equiv P/x$,则 p 为每单位保险金额(x)的保险费.假设对不同值的 x,p 都为常数.同样,假定 p 对每个投保人是外生的,则此人将选择 x 以最大化其期望效用,

$$\phi(x)\equiv\pi u(a-b-px+x)+(1-\pi)u(a-px)$$

假定最优处 $x^*>0$,由一阶条件 $\phi'(x^*)=0$,可得

$$\frac{\pi}{1-\pi}\frac{u_1^*}{u_2^*}=\frac{p}{1-p}\left(=\frac{P}{x-P}\right) \tag{30}$$

其中,$u_i^*\equiv u'(a_i^*)$,$i=1,2$.这表示 a_1 和 a_2 之间的边际替代率(分别由它们各自的概率加权)与每单位净保险金额的保险费相等.可以算出

$$\phi''(x)=\pi u''(a_1)(1-p)^2+(1-\pi)u''(a_2)p^2 \tag{31}$$

284 假定此人为风险厌恶者,此值总为负.因此式(30)对于惟一的全局最大值提供了充要条件.由式(30)和式(15)中 R_a 的定义,可从式(31)得到下列关系式:

$$\phi''(x^*)=-(1-p)\pi u'(a_1^*)[(1-p)R_a(a_1^*)+pR_a(a_2^*)]<0$$

为获得上面问题的图形解释,应先了解到由 p,a_1 和 a_2 的定义可得

$$p=(a-a_2)/(a_1-a_2+b)$$

或　　$pa_1+(1-p)a_2=a-pb$　　(32)

毫无疑问，满足式(30)的 a_1^* 和 a_2^* 也满足式(32)．事实上，也可以选择最大化 $\pi u(a_1)+(1-\pi)u(a_2)$ 的 a_1 和 a_2 来得到 a_1^* 和 a_2^*，约束为式(32)，$a_1\geqq 0$，$a_2\geqq 0$．图 5.4(b)显示了上面描述的此人的均衡点，点 A 代表"初始"点，即 $A=(a-b,a)$ 或 $OA_1=a-b$，$OA_2=a$．线 C_1C_2 通过点 A，斜率为 $-p/(1-p)$．它代表满足式(32)的 (a_1,a_2) 的轨迹，也被称为**机会线**，在此线上，此人可以选择任意的 a_1 和 a_2 值．

B 点的坐标为 (a_1^*,a_2^*)，它是此人的最优点．既然无差异曲线线

$$\{(a_1,a_2):\pi u(a_1)+(1-\pi)u(a_2)=\pi u(a_1^*)+(1-\pi)u(a_2^*)\}\quad(33)$$

的斜率为

$$\frac{da_2}{da_1}=-\frac{\pi}{1-\pi}\frac{u'(a_1)}{u'(a_2)}$$

条件(30)要求无差异曲线与机会线在 B 点相切，如图 5.4(b)所示．由于此人为风险厌恶的，无差异曲线对原点严格凸．同样，注意

$$OB_1=a_1^*=a-b-px^*+x^*,\ OB_2=a_2^*=a-px^*$$

因此，我们得到

$$B_1A_1=OB_1-OA_1=x^*-px^*\ A_2B_2$$

$$=OA_2-OB_2=px^*\equiv P^*$$

285　其中，x^* 和 P^* 分别表示对(总的)保险金额和保险费需求．令 OJ 为从原点出发的射线，斜率为 45°．那么对所有 OJ 线上的点，有 $a_1=a_2$，因此它代表此人能获得相同资产的点的轨迹．从图中 $OA_2=OA_3$，可得

$$A_3A_1=OA_3-OA_1$$

$$=OA_2-OA_1=a-(a-b)=b$$

也就是说，A_3A_1 代表灾难发生时损失的金额．

现在我们介绍保险公司．当灾难发生时，保险公司赔偿的净金额为 $x-P=(1-p)x$ 美元．如果不发生灾难，公司得到 $P=px$ 美元．公司的期望利润为

$$-\pi(1-p)x+(1-\pi)px$$

如果保险业有竞争，利润将为 0，即

$$\pi(1-p)=(1-\pi)p,\text{或 }\pi=p$$

在此假设下，该公司被称为收取了**精算公平的保险费**．对投保人，保险则提供了一次**公平的赌博**，因为它的期望值为 0．将上面的等式代入式(30)，可得

$$u'(a-b-px^*+x^*)=u'(a-px^*) \tag{34}$$

因 $u''<0$,可推得

$$x^*=b \tag{35}$$

也就是说,保险金额 x^* 与损失 b 相等;即:个人将获得对损失的完全保险(即**全额保险**).

总结一下,我们得到命题 5.2.

【命题 5.2】

(i) 保险需求为正(不考虑 π 和 p),当且仅当此人为风险厌恶的.

(ii) 保险需求由式(30)决定.

(iii) 如果保险公司愿意以精算公平的保费对损失提供保险,投保人将选
286 择全额保险.[18]

给定一阶条件以保证一个惟一的全局最优值,我们可用通常的比较静态学方法得到各参数(如 π,p,a,以及绝对风险厌恶系数)的变化效应.这类分析留给有兴趣的读者自己去研究.

5.3.2 公司理论

考虑一个竞争性公司能以市价 p 销售任意数量的它的产品.[19]令 p 为一随机变量,其概率密度函数 $\phi(p)$ 已知;没有存货;生产单一产品 y 需一个可变要素("劳动力")和一个固定要素.令 w 和 x 分别为此可变要素的价格("工资率")和投入.令 π 代表公司的利润(注意不要与上一部分的概率 π 混淆).假定公司的利润为

$$\pi=pf(x)-wx-a$$

其中,a 代表"固定成本".这里,$f(x)$ 代表将可变投入与产出相联系的生产技术,这里假定 $f(0)=0$,且

$$\text{对所有 } x\geqq 0, f'(x)>0, f''(x)<0$$

假定该公司是竞争性的,因而 p 和 w 对公司而言是外生的.同样假定该公司 NM 效用函数为 u,并选择 x 以最大化利润的期望效用

$$E[u(\pi)]=E\{u[pf(x)-wx-a]\}$$

$$=\int_0^\infty u[pf(x)-wx-a]\phi(p)\mathrm{d}p,\ x\geqq 0$$

最优解的一阶条件可通过将其对 x 微分,然后令其为 0 得到.这里要运用**积分的微分法则**(这在前面关于边际成本定价中已阐述过).此法则在不确定性经济学中非常重要.

为避免麻烦，省略代表最优解的(*)，其一阶条件为

$$E\{u'(\pi)[pf'(x)-w]\}=0$$

或

$$E[u'(\pi)pf'(x)]=E[u'(\pi)]w \tag{36}$$

这里假定在最优处，$x>0$. 如果此公司为风险厌恶的，即如果 $u''<0$，则二阶充分条件满足，因为

$$E\{u''(\pi)[pf'(x)-w]^2+u'(\pi)pf''(x)\}<0 \tag{37}$$

其中，我们假定 $u'>0$.

令 $\bar{p}=E(p)$ 为随机变量 p 的均值，可重写(36)为

$$E[u'(\pi)(p-\bar{p})]f'(x)=E[u'(\pi)][w-\bar{p}f'(x)] \tag{38}$$

另一方面，因 $E(\pi)=E[pf(x)-wx-a]=\bar{p}f(x)-wx-a$，可得

$$\pi-E(\pi)=(p-\bar{p})f(x)$$

因最优点 $x>0$，知 $f(x)>0$，可得

$$\text{当 } p\gtrless\bar{p} \text{ 时，} \pi\gtrless E(\pi)$$

这样，当且仅当该公司为风险厌恶时，可得

$$\text{当 } p\gtrless\bar{p} \text{ 时，} u'(\pi)\lessgtr u'(E\pi).$$

因此，当且仅当该公司为风险厌恶时，下列关系成立：

$$u'(\pi)(p-\bar{p})\leqq u'(E\pi)(p-\bar{p}) \tag{39}$$

288 这里，只有当 $p=\bar{p}$ 时，等号成立. 在上式两边取期望，可得

$$E[u'(\pi)(p-\bar{p})]<u'(E\pi)E(p-\bar{p})=0$$

这里，由均值的定义，等于0的等号成立. 因此式(38)的左侧为负，由此可得

$$E[u'(\pi)][w-\bar{p}f'(x)]<0.$$

再因 $u'>0$，有 $E[u'(\pi)]>0$，所以

$$w<\bar{p}f'(x) \tag{40a}$$

如果去除不确定性并且用 $\bar{p}$ 代替 p，则最优投入为

$$w=\bar{p}f'(x) \tag{40b}$$

因为 $f''<0$，我们可以得出结论，对于风险厌恶的公司，在不确定情况下的均衡投入和产出要比相应的确定情况下的少.

对此用稍有不同的方式来说明，将 p 写为

$$p=\bar{p}+\gamma\varepsilon \tag{41}$$

其中，ε 为随机变量，$E(\varepsilon)=0$.[20]将此代入式(38)，可得

$$(\bar{p}-q)f'(x)=w，其中\ q\equiv-\gamma E[u'(\pi)\varepsilon]/E[u'(\pi)] \tag{42}$$

由式(42)，可得 $\bar{p}-q>0$. 同样，根据式(39)和式(41)可得，公司为风险厌恶的当且仅当

$$u'(\pi)\gamma\varepsilon\leqq u'(E\pi)(p-\bar{p})$$

其中只有当 $p=\bar{p}$ 时，等式成立. 取期望可得

$$\gamma E[u'(\pi)\varepsilon]<u'(E\pi)E(p-\bar{p})=0 \tag{43}$$

289 然后回忆 q 的定义，由式(43)，我们可以证明，当且仅当该公司为风险厌恶的，$q>0$.[21]

若 $q>0$，式(42)意味着对于风险厌恶的公司，不确定性情况下的投入(及产出)少于确定情况下的投入和产出. 此结论与前面得到的一致. 这里，$\bar{p}-q>0$ 可被解释为不确定性情况下产出的“有效价格”，q 为“风险承担费”.[22]

现假定 x 为一个向量. 为简化，假定 $x=(x_1,x_2)$. 令 $f(x)$ 为公司的生产函数. 如果价格 p 为市场价格，公司的利润则为

$$\pi=pf(x_1,x_2)-w_1x_1-w_2x_2$$

其中 w_i 为第 i 个要素的价格($i=1,2$). 如果 x 为不变要素，那么，令 $a\equiv w_2x_2$，我们可以得到与前面讨论的一样的模型. 因此，假定该公司选择 x_1 和 x_2 以最大化利润的预期效用. 一阶条件为

$$E[u'(\pi)(pf_i-w_i)]=0,i=1,2 \tag{44}$$

假定在最优点 $x_i>0,i=1,2$，这里 $f_i\equiv\partial f/\partial x_i,i=1,2$. 将 $p=\bar{p}+\gamma\varepsilon$ 代入式(44)，可得

$$(\bar{p}-q)f_i=w_i,i=1,2 \tag{45}$$

这里 q 的定义与前面的相同. 由式(45)，我们可以得到结论：在不确定性情况下，每个要素的边际产品的“有效”值等于各要素的价格. 如果规模收益不变，则由齐次函数的欧拉等式有 $f(x_1,x_2)=f_1x_1+f_2x_2$. 于是可得

$$\begin{aligned}(\bar{p}-q)f(x_1,x_2)&=(\bar{p}-q)(f_1x_1+f_2x_2)\\&=w_1x_1+w_2x_2\end{aligned}$$

因此，我们有

$$E(\pi)=py \quad w_1x_1-w_2x_2=qy \tag{46}$$

其中，$y\equiv f(x)$. 如前所述，公司为风险厌恶的，当且仅当 $q>0$. 于是由式(46)，可得

$$E(\pi)>0 \tag{47}$$

290 此结果与通常的结论相反，即在确定性的情况下，规模收益不变情况下的长期利润为零. 不等式(47)意味着在不确定性的情况下，利润为正(平均利润为正)，这就是风险厌恶效用函数的直接结果.[23]

总结以上结果可得出如下命题：

【命题 5.3】 假定一个生产单一产品的竞争性公司，其生产产品的价格为惟一的随机变量.

(i) 如果该公司选择只有一种要素投入的水平，并且该公司为风险厌恶者，则不确定性下的投入产出水平要少于确定性下的情况.

(ii) 假定公司使用两种投入和规模收益不变的技术，则风险厌恶公司的长期期望利润为正.

关于不确定性的情况下的公司行为有许多有趣的扩展. 这些扩展包括对下列情况的研究：(a)要素价格不确定；(b)由于气候或技术进步，生产函数不确定；(c)垄断公司的需求函数不确定. 但是，分析的基本方法与上述类似.

5.3.3 资产组合选择[24]

考虑一个其初始资产值为 A 的投资者. 假定有两类资产：一类无回报也
291 无风险；另一类回报率为 r，r 为随机变量，可以为负. 称第一类资产为**安全资产**，称第二类资产为**风险资产**. 令 m 和 a 分别代表此人的第一类和第二类资产的初始持有量. 当前期末的个人资产的价值(W)为

$$W\equiv m+a(1+r)$$

为简化，假定只有两个自然状态：S_1 和 S_2. 当 S_1 发生时，$r=r_1>0$；当 S_2 发生时，$r=r_2<0$. 令 π 为 S_1 发生的概率，W_i 为 S_i 状态发生时财富的价值. 则我们有

$$W_1\equiv m+a(1+r_1),\ W_2\equiv m+a(1+r_2)$$

令 $A\equiv m+a$，即最初的财富价值，则上式可重写为

$$W_1\equiv A+r_1a,\ W_2\equiv A+r_2a \tag{48}$$

上述情况与下列彩票等价：

$$(\pi;W_1,W_2)=(\pi;A+r_1a,A+r_2a)$$

此彩票的期望值为

$$E(w)\equiv\pi W_1+(1-\pi)W_2$$

$$=A+a[\pi r_1+(1-\pi)r_2]=A+aE(r) \tag{49}$$

期望效用可写为

$$\pi u(W_1)+(1-\pi)u(W_2)=\pi u(A+r_1a)+(1-\pi)u(A+r_2a)$$

居民选择 a(风险资产的数量)以最大化期望效用,即最大化

$$\phi(a)\equiv\pi u(A+r_1a)+(1-\pi)u(A+r_2a)$$

当 $a\geqq 0$,原始资产值(A)为常量.假定 $a^*>0$,一阶条件可写为 $\phi'(a^*)=0$.此式可重写为

$$\frac{\pi}{1-\pi}\frac{u_1^*}{u_2^*}=-\frac{r_2}{r_1}(\equiv p) \tag{50}$$

292 这里 $u_i^*=u'(W_i^*)$, $i=1,2$,并且

$$W_1^*=A+r_1a^*,\ W_2^*=A+r_2a^* \tag{51}$$

条件(50)定义了风险资产的最优持有量(a^*).也可计算

$$\phi''(a)=\pi r_1^2u''(W_1)+(1-\pi)r_2^2u''(W_2)$$

只要此人为风险厌恶者($u''<0$),则上式为负,即式(50)定义的 a^* 提供了一个惟一的全局最大值.我们可以注意到保险理论中的式(30)与式(50)类似.

为了用图形来表示,由式(48),$(A-w_2)/(w_1-A)=-r_2/r_1$,此式可重写为

$$pW_1+W_2=(1+p)A,\text{其中 } p\equiv -r_2/r_1 \tag{52}$$

事实上,假定居民选择 W_1 和 W_2,使 $\pi u(W_1)+(1-\pi)u(W_2)$最大且满足约束条件 $W_1\geqq 0, W_2\geqq 0$,与式(52).给定一内部解($W_1^*>0, W_2^*>0$),由一阶条件可得到式(50),这里 W_1^* 和 W_2^* 由式(50)确定,并满足式(52).图5.5中,线 C_1C_2 代表满足式(52)的(W_1, W_2)的轨迹,截距 OC_1 和 OC_2 分别为

$$OC_1=A(1+p)/p, OC_2=A(1+p)$$

此线与在上一节的图5.4(b)中的 C_1C_2 线类似,它为当前问题的**机会线**.点 A 为机会线和45°线 OJ 的交点.那么,从式(52)容易知道 $OA_1(=OA_2)$为资产(A)的初始价值.另由式(48)可知,在 A 点居民不持有风险资产($a=0$),OJ 也被称为**确定性线**.

无差异曲线

$$\{(W_1,W_2):\pi u(W_1)+(1-\pi)u(W_2)=\text{常量}\}$$

的斜率

$$\frac{dW_2}{dW_1}=-\frac{\pi}{1-\pi}\frac{u'(W_1)}{u'(W_2)} \tag{53}$$

293 那么，由式(50)可知，最优点 B 为无差异曲线与机会线的切点，如图 5.5 所示.注意

$$OB_1=W_1^*\equiv A+r_1a^*,\ OB_2=W_2^*\equiv A+r_2a^*$$

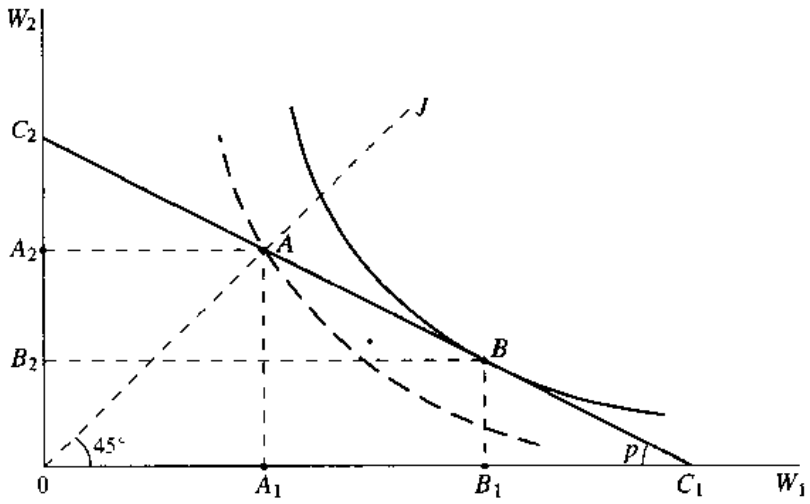


图 5.5 最优资产组合选择

另外

$$B_1A_1=r_1a^*,\ A_2B_2=-r_2a^*\ (>0)$$

如果 $a^*>0$，则 $W_1^*>W_2^*$，因此 $u_1^*<u_2^*$.那么由式(50)，我们可得

$$p(1-\pi)/\pi<1$$

因此 $$E(r)\equiv\pi r_1+(1-\pi)r_2>0 \tag{54}$$

与此相反，如果式(54)成立，则 $W_1^*>W_2^*$，因此 $a^*>0$.因此，得到命题 5.4.

【命题 5.4】 风险厌恶者持有风险资产当且仅当该资产期望回报率为正.

在前面的讨论中可知，安全资产没有回报.当然也存在安全资产有回报.这种情况下，令 i 为该资产的回报率，故有

294

$$W_1\equiv m(1+i)+a(1+r_1)\equiv m'+a'+a(r_1-i)$$

$$W_2\equiv m(1+i)+a(1+r_2)\equiv m'+a'+a(r_2-i)$$

这里 $m'\equiv m(1+i)$ 且 $a'\equiv a(1+i)$.然后令

$$A'\equiv m'+a',\ r_1'\equiv r_1-i,\ r_2'\equiv r_2-i$$

可得

$$W_1' \equiv A' + r_1' a, \quad W_2' \equiv A' + r_2' a \tag{48'}$$

虽然符号有了变动，然而用 m 和 A 分析与用 m' 和 A' 分析是完全一致的，因此，我们用 m 和 A 来继续我们的讨论(即我们去掉撇号).

风险资产的最优值(a^*)取决于不同的参数，如 A，π 和 r. 任何一个参数变动所产生的影响可由常规的比较静态学来进行分析. 这里我们以居民财富的初始值的变动为例来加以说明. 将式(50)和式(52)对 A 进行微分，可得

$$u''(W_1^*)dW_1^* = apu''(W_2^*)dW_2^*$$

$$pdW_1^* + dW_2^* = (1+p)dA$$

这里 $a \equiv (1 - \pi)/\pi$. 由这两个等式，可得

$$dW_1^*/dA = ap(1+p)u''(W_2^*)/\Delta \tag{55a}$$

$$dW_2^*/dA = (1+p)u''(W_1^*)/\Delta \tag{55b}$$

其中，$\Delta \equiv [u''(W_1^*) + ap^2 u''(W_2^*)]$. 很明显，$\Delta < 0$，$dW_1^*/dA > 0$，$dW_2^*/dA > 0$，当且仅当 $u'' < 0$，或此人为风险厌恶者. 由式(48)，可得

$$(dW_1^*/dA) - (dW_2^*/dA) = (r_1 - r_2)(da^*/dA) \tag{56}$$

将式(55)代入式(56)，回顾式(50)及式(15)中 R_a 的定义，可得

$$da^*/dA = \frac{-(1+p)u'(W_1^*)[R_a(W_2^*) - R_a(W_1^*)]}{|\Delta(r_1 - r_2)|} \tag{57}$$

295 然后，假定 $u'' < 0$ 和绝对风险厌恶递减，$R_a' < 0$，可得

$$da^*/dA > 0$$

因为 $W_1^* > W_2^*$，且 $r_1 - r_2 > 0$. 运用式(55)和式(56)以及式(50)和式(51)，回顾式(16)中 R_r 的定义，可得：[25]

$(A/a^*)(\partial a^*/\partial A) < 1$，当且仅当 $R_r(W_1) > R_r(W_2)$

因此，假设相对风险厌恶递增，$R_r' > 0$，可得

$$(A/a^*)(da^*/dA) < 1$$

归纳可得命题 5.5.

【命题 5.5】 假定居民为风险厌恶者.

(i) 假定绝对风险厌恶递减，初始财富(A)的增加会增加在风险资产上的投资.

(ii) 假定相对风险递增，初始财富的增加会使风险资产在总财富中的比例减小而使安全资产的比例增加.

这些结果实质上由 Arrow 提出(1965，第 2 讲；1970，第 3 章). 随后，Cass 和 Stigliz(1970)证明 Arrow 的结果不能推广到多个风险资产的情况. 特别地，他们举了一个例子，一个投资者能购买一份安全资产和两份风险资产，他将他

的大部分资产投资进了两份风险资产，即使他的效用函数显示相对风险为递增的.但是，他们也证明 Arrow 的结果对一类很重要的效用函数可推广到一般，这类效用函数特点是风险资产按固定比例持有，独立于财富.这类效用函
296 数称为具有**分离特性**.Hart(1975)证明**分离特性**是 Arrow 结果在多个风险资产情况中推广的充要条件.也就是说，"给定多个风险证券而且效用函数没有分离特性，总可以找到风险资产回报的概率分布，使得 Arrow 对单一风险证券情况所说明的变化方向逆转"(615 页).Hart(1975,620 页)提醒我们"拥有分离特性的效用函数很少".于是 Sandmo(1977)从一个新的角度考虑这种多证券问题，认为"实际上，人们可能会提出方法论的问题，即是否财富效用的符号和大小直接产生的比较静态结果不一定比由风险厌恶函数形式所产生的结果的用处更大"(378 页).

5.3.4 消费与储蓄决策[26]

储蓄理论的经典论文为 Fisher(1930)的两个时期分析.虽然他的储蓄分析中排除了不确定性，但它也提供了不确定性情况下进行分析的基本框架.因此我们将简单地阐释一下 Fisher 的分析方法.

一个消费者面对着两个时期，1(现在)，2(将来).[27] 令 c_1 和 c_2 分别代表当前的和将来的消费.令 $u(c_1,c_2)$ 代表其效用函数，y_1 和 y_2 分别为时期 1 和 2 的外生的工资收入.定义时期 1 的储蓄(可为正、零或负)为

$$s\equiv y_1-c_1 \tag{58}$$

令 r 为实际利率，时期 2 该消费者的收入为 $y_2+(1+r)s$，因此可得

$$c_2\leqq y_2+(1+r)s \tag{59}$$

结合式(58)和式(59)，有

$$(1+r)c_1+c_2\leqq(1+r)y_1+y_2 \tag{60}$$

在预算条件(60)限制下，假定消费者选择 c_1 和 c_2 最大化 $u(c_1,c_2)$，这里 $c_1\geqq 0,c_2\geqq 0$.为解决此问题，我们写出它的拉格朗日函数

297
$$u(c_1,c_2)+\lambda[(1+r)y_1+y_2-(1+r)c_1-c_2]$$

假定在最优点 $c_1>0,c_2>0$，省略表示最优点的(*)，此问题的一阶条件可写为

$$u_1-\lambda(1+r)=0,u_2-\lambda=0 \tag{61a}$$

$$(1+r)y_1+y_2-(1+r)c_1-c_2\geqq 0 \tag{61b}$$

$$\lambda[(1+r)y_1+y_2-(1+r)c_1-c_2]=0 \tag{61c}$$

这里 $\lambda \geqq 0$ 且 $u_i \equiv \partial u / \partial c_i > 0, i = 1,2$. 注意式(61a)可改写为

$$u_1 / u_2 = 1 + r \tag{62a}$$

由式(61a)知 $\lambda > 0$,我们可重写(61b)为

$$(1 + r)c_1 + c_2 = (1 + r)y_1 + y_2 \tag{62b}$$

等式(62a)称为两时期问题的 **Fisher 法则**. $(u_1 / u_2 - 1)$称为**边际时间偏好率**. 等式(62a)要求此边际比率与实际利率相等.[28]假定 u 为严格拟凹函数,注意限制式(60)为线性,式(62a)和式(62b)为惟一的全局最大值的充分必要条件.

等式(62a)和(62b)定义了给定参数 y_1, y_2 和 r 的情况下 c_1 和 c_2 的最优值. 运用比较静态学可以得到任何一个参数的变化对 c_1 和 c_2 最优值的影响,例如

$$\partial c_1 / \partial y_1 = \frac{-(1 + r)[u_{12} - (1 + r)u_{22}]}{[u_{11} - 2(1 + r)u_{12} + (1 + r)^2 u_{22}]} \tag{63}$$

298 这里 $u_{ij} \equiv \partial^2 u / \partial c_i \partial c_j, i, j = 1,2$. $\partial c_1 / \partial y_1$ 的符号通常是不确定的,然而,除了 $u_i > 0$(非充分满足),我们还可以加上下列条件:

$$u_{ii} < 0, i = 1,2, \text{且 } u_{12} (= u_{21}) \geqq 0 \tag{64}$$

在这些假定条件下,由式(63)我们可以断定$\partial c_1 / \partial y_1 > 0$,即当前收入增加使当前消费增加.

如前面所看到的,在假定 $u_i > 0, \lambda > 0$ 的情况下,预算条件的等号(62b)成立. 这也就推出了在最优点处(59)取等号,即

$$c_2 = y_2 + (1 + r)s \tag{59'}$$

在文献中,我们常看到从分析的开始起,限制条件被写为等式的形式. 在某些特定的假设下,等式将在任何情况的最优解处成立. 例如,在当前这种情况下,在 $u_i > 0$ 的假定下,等式(62b)和(59′)最终成立. 既然有等式限制的过程将简化说明,因此我们采用等式限制进行分析. 我们可以考察对上面跨时期最优问题进行修正的方法。

由式(59′),可得到

$$u(c_1, c_2) = u[y_1 - s, y_2 + (1 + r)s] \equiv \Phi(s)$$

消费者选择能最大化 $\Phi(s)$的 s(储蓄). 这里省略了表示最优点的符号,一阶条件为

$$\Phi'(s) = -u_1 + (1 + r)u_2 = 0$$

由此可得到 Fisher 法则(62a). 我们也可计算

$$\Phi''(s) = u_{11} - 2(1 + r)u_{12} + (1 + r)^2 u_{22}$$

由条件(64)可知, $\Phi''(s) < 0$,因此(62a)提供了惟一的全局最优点的充分必

要条件.

现在我们将不确定性引入该模型.具体而言,我们假定将来的无利息收入 y_2 是不确定的,y_2 为一个随机变量,它的概率密度函数为 $f(y_2)$.称 y_2 的不确定性为**收入风险**.消费者的预期效用函数可写为

299

$$E[u(c_1,c_2)] = E\{u[y_1 - s, y_2 + (1+r)s]\}$$

$$= \int_Y u[y_1 - s, y_2 + (1+r)s] f(y_2)dy_2 \equiv \phi(s) \qquad (65)$$

这里 Y 为 y 的值域.居民选择 s 以最大化 $\phi(s)$.再次省略标识最优点的符号.回顾积分的微分法则,最优解的一阶条件可由 $\phi'(s)=0$ 得到为

$$E[u_1 - (1+r)u_2] = 0$$

等价于

$$E(u_1)/E(u_2) = 1 + r \qquad (66)$$

这是 Fisher **法则的"不确定性版本"**.它表示在不确定性情况下,边际时间偏好率 $E(u_1)/E(u_2) - 1$ 与实际利率相等.我们还可算出

$$\phi''(s) = E[u_{11} - 2(1+r)u_{12} + (1+r)^2 u_{22}]$$

在假设(64)下,$\phi''(s)<0$,所以式(66)提供了一个惟一的全局最大值的条件.

为简化,假定 y_2 为如下特定形式:

$$y_2 = \bar{y}_2 + \gamma\varepsilon, \gamma > 0 \qquad (67)$$

其中,$\bar{y}_2$ 为 y_2 的均值,ε 为随机变量,$E(\varepsilon)=0$.如前所述,γ 的增加代表常数均值 $\bar{y}_2$ 的分布向外扩展.当 $\gamma=0$ 时,$y_2=\bar{y}_2$,不确定性消失.现在假定函数 θ 为

$$\theta(s; y_1, \bar{y}_2, r, \gamma) \equiv E(u_1)/E(u_2) - 1 \qquad (68)$$

它表示**收入风险下的边际时间偏好率**.那么,我们可以算出

$$\partial\theta/\partial s = \{E(u_2)E[-u_{11} + (1+r)u_{12}]$$

$$- E(u_1)E[-u_{21} + (1+r)u_{22}]\}/\{E(u_2)\}^2 \qquad (69)$$

因为 $\partial\theta/\partial s > 0$,我们可以断定在收入风险下储蓄的最优量($s^*$)为 θ 曲线与 r 线的交点惟一确定,如图 5.6(a)所示.

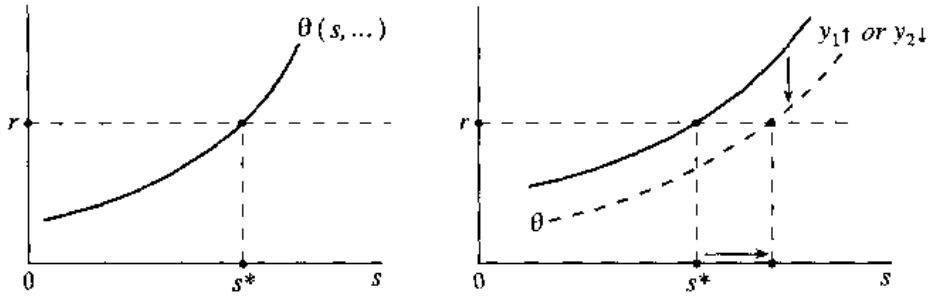
例如,为得到比较静态的结果,我们做如下计算:

$$\partial\theta/\partial y_1 = [E(u_2)E(u_{11}) - E(u_1)E(u_{21})]/\{E(u_2)\}^2 < 0 \qquad (70a)$$

$$\partial\theta/\partial \bar{y}_2 = [E(u_2)E(u_{12}) - E(u_1)E(u_{22})]/\{E(u_2)\}^2 > 0 \qquad (70b)$$

因此 y_1 增加或 $\bar{y}_2$ 下降会引起 θ 曲线的下移,如图 5.6(b)所示.这进一步增加

了储蓄 s^* 的量，如图 5.6(b)所示，因此$\partial s/\partial y_1>0, \partial s/\partial \bar{y}_2<0$.



(a) s^*的决定　　(b) y_1 增加或 y_2 下降

图 5.6　收入风险下的储蓄决策

300　还可以证明[29]

$$\partial c_1/\partial y_1>0, \partial s/\partial y_1>0 \tag{71}$$

也就是说，当前收入的增加提高了当前的消费和当前的储蓄.这意味着边际储蓄倾向界于 0 和 1 之间，因为$(\partial c_1/\partial y_1)+(\partial s/\partial y_1)=1$.另外，我们可以算出

$$\partial\theta/\partial r=\{E(u_2)E(u_{12})-E(u_1)E(u_{22})\}/\{E(u_2)\}^2>0 \tag{72}$$

301　因此当利率 r 增加时，图 5.6 中的 θ 曲线上移.然而，r 线也上移，因此利率增加对储蓄的作用是不确定的，由通常的比较静态分析也可以证实这一点.

为得到不确定性情况下无息的未来收入增加所产生的作用，回顾式(67)并假定此不确定性的增加是由 γ 的增加所引起的[30].关于 γ 对式(68)进行微分，可以得到

$$\partial\theta/\partial\gamma=\{E(u_2)E(u_{12}\varepsilon)-E(u_1)E(u_{22}\varepsilon)\}/\{E(u_2)\}^2$$

假定我们可假设

$$E(u_{22}\varepsilon)>0, \text{且 } E(u_{12}\varepsilon)\leqq 0 \tag{73}$$

那么我们可得$\partial\theta/\partial\gamma<0$，因此当 γ 增加时，图 5.6 中的 θ 曲线下移.也就是说，当收入风险增加时，储蓄的防范性需求增加，或未来收入不确定性的增加会增加储蓄.Sandmo(1970，353 页)引用 Boulding 的话："如果其他条件相同，我们可以预测有一份安稳工作人的储蓄比没有固定工作人的要少."

因此，条件(73)在得到比较静态结果中起了重要的作用.为理解(73)式，考虑下列函数：

$$R_a(c_1,c_2)\equiv -u_{22}(c_1,c_2)/u_2(c_1,c_2). \tag{74}$$

这与绝对风险厌恶的 Arrow－Pratt 度量类似，但也与它有所不同，因为 u 现在取决于两个变量 c_1 和 c_2.如果我们将 R_a 只视作 c_2 的函数，则前一节对风险厌恶系数的讨论可以不做改动地应用于这里(参见假设 A).大胆地对一个变

量的情况进行类推，我们假定 R_a 为 c_2 的减函数．而且，当前消费（c_1）增加时，储蓄减少且未来收入（包括利息收入）减少．消费者于是更倾向于避开不确定性．因此，R_a 为 c_1 的增函数，至少是非减函数．简而言之，我们可假定

$$\partial R_a/\partial c_2<0 \text{ 与 } \partial R_a/\partial c_1\geqq 0 \tag{75}$$

302 此假设条件由 Sandmo(1969)引入，他称

$$\partial R_a/\partial c_1>0$$

为风险补充性．如果效用函数为和形式，即

$$u(c_1,c_2)=v_1(c_1)+v_2(c_2),\text{则 } R_a=-v_2''(c_2)/v_2'(c_2)$$

那么，$\partial R_a/\partial c_1=0$ 和 $\partial R_a/\partial c_2<0$ 化为通常的绝对风险厌恶的假设条件．可以证明假设由(75)可推出(73)．[31]

303 接下来我们假定 y_1 和 y_2 为确定的，而实际利率或"收获率"由于通货膨胀（或气候）等因素是不确定的．称 r 的不确定性为**资本风险**，以与前面所讨论的收入风险（不确定性或无利的未来收入）相区别．资本风险问题也被 Sandmo (1970)讨论过．[32]为简化说明，我们将 r 写为

$$r=\bar{r}+\gamma\varepsilon,\gamma>0 \tag{76}$$

此式替换了式(67)．这里，$E(r)=\bar{r}=$常量，ε 为随机变量，其均值为 0，概率密度函数为 $g(\varepsilon)$．其中，γ 和 ε 不应与式(67)中的混淆．我们假定 $r>-1$，这等于假定

$$\rho\equiv 1+\bar{r}+\gamma\varepsilon>0$$

居民选择 s 来最大化

$$E\{u[y_1-s,y_2+(1+\bar{r}+\gamma\varepsilon)s]\}\equiv\psi(s)$$

再次省略最优点的符号，一阶条件 $\psi'(s)=0$ 可改写为

$$E[-u_1+(1+\bar{r}+\gamma\varepsilon)u_2]=0$$

由此可得到

$$E(u_1)-E(u_2)+\bar{r}E(u_2)+\gamma E(\varepsilon u_2)$$

也就是说，我们可得到

$$E(u_1)/E(u_2)\quad 1=\bar{r}-\tau \tag{77}$$

其中，τ 由下式定义：

$$\tau\equiv-\gamma E(\varepsilon u_2)/E(u_2) \tag{78}$$

我们也可算出

$$\psi''(s) - E(u_{11}) - 2E(\rho u_{12}) + E(\rho^2 u_{22})$$

在条件(64)和 $\rho>0$ 的情况下，$\psi''<0$ 始终成立.因此，式(77)提供了惟一的全局最优点的充分必要条件.

304 利用与注释[31]类似的推导，我们可以证明 $E(\varepsilon u_2)<0$.由此可推出式(78)中定义的 τ 为正.这样的 τ 可被解释为"风险承担费"，将从由实际的利息率中扣除.也就是说，式(77)表示资本风险下的边际时间偏好率等于"有效"利率，$\bar{r}-\tau$，即经过风险承担费调整的实际利息率.注意 τ 与式(42)中定义的 q 类似.

再次用 θ 来代表资本风险下的边际时间偏好率，即

$$\theta \equiv E(u_1)/E(u_2) - 1$$

然后，求 θ 对 s 的偏导微分，可得

$$\partial\theta/\partial s = [E(u_2)E(-u_{11} + \rho u_{12}) - E(u_1)E(-u_{21} + \rho u_{22})]/[E(u_2)]^2$$

由式(64)和 $\rho>0$，我们可以断定 $\partial\theta/\partial s>0$.资本风险下的储蓄最优水平($s^*$)由 θ 曲线和($\bar{r}-\tau$)曲线的交点决定，如图 5.7 所示，可以看出 $\partial(\bar{r}-\tau)/\partial s$ 的符号可为正也可为负.

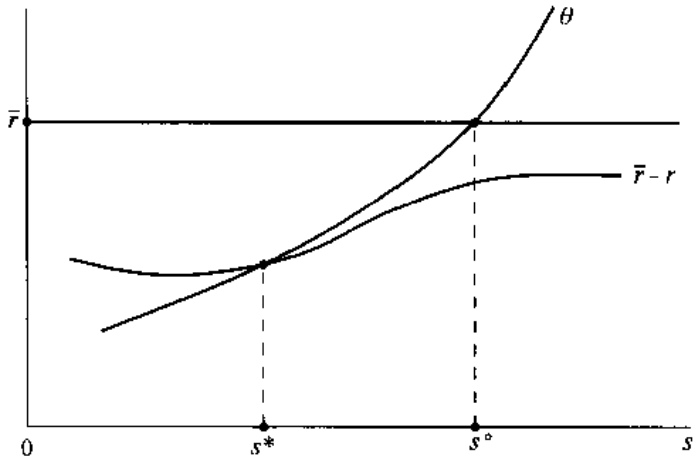


图 5.7 资本风险下的储蓄

305 如图 5.7 中所示，资本风险下的储蓄量(s^*)总是低于确定性下的值(s^0)，因为 $\bar{r}-\tau<\bar{r}$.通过通常的程序微分式(77)，我们可以得到比较静态结果，这一点留给感兴趣的读者.

我们总结一下关于两时期问题的结论.

【命题 5.6】

(i) 在收入风险(未来无利息收入不确定)的情况下

(a) 当前收入的增加提高了当前的消费和当前的储蓄，因此边际储蓄倾

向界于0和1之间.

(b) 未来无利息收入期望值的增加将使储蓄减少.

(c) 实际利率的增加对储蓄的作用是不确定的.

(d) 在风险互补假设下,未来无利息收入不确定性的增加会引起储蓄的增加.

(ii) 在实际回报率不确定的资本风险下,不确定性的增加会使储蓄下降.

注:通过比较命题(i)(d)和(ii),Sandmo(1970)强调了收入风险与资本风险的区别.

§5.4 信息经济学

5.4.1 信息不对称、Lemon法则和信号传递

考虑旧车市场.这里,售车者知道车的质量,而购买者却不知道(**信息的不对称**).[33]如果好车和坏车(Lemons)以同样的价格出售,假定购买者不能区分车的好坏.最终,该市场将被坏车占据,旧车的价格将大大低于新车的价格.在
306 这种情况下,好车的拥有者如果不愿以如此低的价格出售,他的汽车将不会进入此市场.由于坏车的售价与好车的售价相同,因而将好车逐出了市场.

上面描述的信息不对称的问题由Akerlof于1970年在他的一篇具有开创性的、令人振奋的论文中提出.导致旧车市场由坏车占据的过程称为**Lemon法则**.不用说,这种现象也发生在许多其他市场中,即使70年代后期随着次品很少的日本车的到来(所以这些车的二次售价格仍然很高),旧车市场上的Lemon法则不如以前确切.在保险和其他一些市场,Lemon法则被称为**逆向选择**,对此我们将在下面作出解释.

信息不对称问题有许多其他有趣的应用.信号和信号传递是一个重要的例子.在旧车市场中,机械师的评估提供了汽车质量的**信号**.如果这种信号存在,则旧车的价格将上调.有的消费者知道此信号,有的则不知.未得到此信号的消费者将逐渐地通过观察价格来推出信号值,因为价格必须反映所有的有效信息(假定有购买信息的人).在许多情况下,商品价值的信息是由外界提供的,旧车市场中的机械师评估就是这样的例子.

另一方面,有许多情况关于价值的信号是内在地由市场成员提供的.这称为**自我选择**.例如,在劳动力市场,教育是一个重要的信号,它反映了工人的素质,并且工人了解这一点.[34]

307 不幸的是,我们不能在此详尽地探讨所有这类问题.一些重要的、有启发性的论著可以在Diamond和Rothchild(1989)中找到.现在我们把注意力集中到保险市场的信息不对称和道德风险问题上.

5.4.2 保险中的防范措施与信息不对称

如同 5.3.1 节中那样，考察这样一个例子，一个人正在考虑购买一个保险单.[35]假定只有两种状态 S_1 和 S_2. 如果 S_1 发生，则此人会损失 b 美元，在 S_2 情况下没有损失. 令 π 为 S_1 发生的概率. 令 a 为他(或她)想要投保的资产的初始值. 同样，令 x 为当 S_1 发生时，保险公司赔偿的金额，其中 P 为这个保险的保险费. 假定该人可以选择这个水平的保险金额 x. 与 5.3.1 节中讨论的不同，这里我们假定通过防范措施，被保险者可以影响损失的概率 π.

假定防范措施的成本按美元来计算. 那么，令 z 为这种花费的数量，可以得到 $\pi(z)$，其中 $\pi'<0, \pi''>0$. 假定防范措施的成本为每单位 1 美元，承保者看不到 z. 投保者所面临的问题与下列彩票问题一致.

$$[\pi(z); a-b-z-P+x, a-z-P]$$

具体一些，我们可以想像一个汽车保险，其发生事故的概率决定于投保者
308 所采取的防范事故措施的水平. 这里存在信息的不对称，投保人知道而承保者并不知道，这种不对称是当前公式的关键.

按照 Pauly(1974)的方法，我们以两个阶段来考虑投保人购买多少保险的问题. 首先，他或她要确定 z 的值，以最大化每个 x 值的期望效用. 然后选择 x 以最大化期望效用. 也就是说，在第一个问题中，期望效用只作为 z 的函数处理，即

$$\phi(z) \equiv \pi(z)u(a-b-z-P+x)+[1-\pi(z)]u(a-z-P)$$

投保者在 $z \geqslant 0$ 的范围内选择 z 以最大化 $\phi(z)$. 省略(*)表示最优的，可将一阶条件写为

$$d\phi/dz = \pi'(z)[u(a_1)-u(a_2)] - [\pi(z)u'(a_1)+\{1-\pi(z)\}u'(a_2)] \leqq 0 \tag{79a}$$

$$(d\phi/dz)z = 0, z \geqslant 0 \tag{79b}$$

其中 $a_1 \equiv a-b-z-P+x$，并且 $a_2 \equiv a-z-P$.

如果 $x=b$(全保险)，则 $u(a_1)=u(a_2)$，使得 $d\phi/dz<0$，它推出 $z=0$(一个边界解). 也就是说，全部资产都投了保的人不会采取任何防范措施. 同样，由式(79a)可知，对一些小于 b 的 x，$d\phi/dz<0$. 对于这样的 x 值，$z=0$. 另一方面，对于那些最优点处 $z>0$ 的 x，条件(79a)和(79b)化简为 $d\phi/dz=0$，即

$$\pi'(z)[u(a_1)-u(a_2)] = \pi(z)u'(a_1)+[1-\pi(z)]u'(a_2) \tag{80}$$

反过来，它又决定了 z 为 x 的函数，因此 $z=z(x)$，这里假定 $z'<0$.[36] 条件 $z'<0$ 表示随着保险金额的增加，投保人所采取的防范措施将减少. 如果

309 $z(x)=0$,即无论保险金额为多少,投保者都不采取防范措施,则对这样的 x 值,$z'=0$.

假定对于 x 的每个值 z 都被确定在由式(80)所决定的水平上,于是有 $z=z(x)$.投保者将确定保险金额以最大化他或她的期望效用,约束为 $x\geqq 0$.令 $P=P(x)$为保险费价格目录.当 $z=z(x)$,$P=P(x)$时,投保者的期望效用变为 x 的单变量函数,也就是,

$$\psi(x)\equiv\pi[z(x)]u[a-b\cdot z(x)-P(x)+x]$$
$$+\{1-\pi[z(x)]\}u[a-z(x)-P(x)]$$

现在我们回到投保者的第二个问题,在 $x\geqq 0$ 的条件下选择一个 x 以最大化 $\psi(x)$.假定在最优处 $x>0$,省略(*)表示最优的,由一阶条件 $\psi'(x)=0$,可得

$$[\pi u'(a_1)+(1-\pi)u'(a_2)](dP/dx)$$
$$=\pi u'(a_1)-[\pi u'(a_1)+(1-\pi)u'(a_2)]z'+\pi' z'[u(a_1)-u(a_2)] \tag{81}$$

由式(80),可删除式(81)右侧的最后两项.因此我们可得

$$dP/dx=\pi u'(a_1)/[\pi u'(a_1)+(1-\pi)u'(a_2)] \tag{82}$$

如果承保者能观察到 z,则保险费将随 z 的变化而变化,这反过来又会影响 π.[37]

310 为检查竞争情况下的结果,假定所有的投保者在下述意义下是相同的,即在给定的价格目录下将购买同等数额的保险.假定保险业的竞争使得期望利润为零,即竞争使保险费变得精算公平,于是我们有 $-\pi(x-P)+(1-\pi)P=0$,或

$$P(x)=\pi[z(x)]x \tag{83}$$

因此,$P'=\pi+\pi' z' x$.将它代入式(82)的左侧,我们可得

$$\pi+\pi' z' x=\pi u'(a_1)/[\pi u'(a_1)+(1-\pi)u'(a_2)]\equiv D(x) \tag{84}$$

这里 $D(x)$为保险金额 x 的需求计划.

保险公司并不知道投保者的 z.也许有人会说,如果保险公司知道 x,它们应该能由 $z(x)$推出 z,使得公司可以对单位保险金额的保险费进行调节.然而,这种方法不可行,因为公司只知道它卖给投保人多少保险.如果公司根据 x 增加每单位的保险费,理性的投保人将转向其他公司,因为完全竞争条件下公司进入保险市场是自由的.

正是因为竞争性的 $P'(\equiv dP/dx)$,每单位保险的保险费对所有投保人必须相同,将导致竞争的非最优性.因为保险公司并不知道 z 的程度,不得不以同样的价格 p 出售每个单位的保险.将此代入式(83),可得 $P=\pi$,因此我们得到

$$p(-\pi) = D(x) \tag{85}$$

因为 $\pi' < 0$ 且 $z' < 0$，所以 π 明显小于式(84)左侧的 $\pi + \pi' z' x$. 因此，如果需求计划 $D(x)$ 为下倾的，保险需求将大于式(84)中所确定的需求.[38] 也就是说，竞争均衡以保险过度为特征，也就是**"过度保险"**."通常没有理由期望竞争均衡是最优的"(Pauly, 1974, 51 页).

311 在我们刚考虑的问题中，投保人知道他(或她)的防范措施(z)的水平而承保人并不知道. 后者暗示保险费将不受 z 的影响. 因此当保险金额增加时将诱导投保人减少防范措施. 也就是说，当这样的变化不会改变保险费时，保险诱使投保人降低 z 的水平. 于是将使保险公司赔钱，这称为**道德风险**问题.[39] 这里信息的不对称起了很重要的作用，因为如果保险公司能够知道 z，则保险费将随 z 的不同而变化，这种情况就将不会有道德风险的问题.[40]

不用说，保险公司在道德风险问题面前并非无计可施. 有两种解决办法. 一种为不完全地赔偿损失，如可扣除保险单；第二种为查看投保者采取的预防
312 措施. 两者都将提供投保人防止损失的动力. 如果不可能查看投保人所采取的预防措施或成本太高，不完全赔偿对保险公司而言是一个最优的策略，但如果保险公司能十分精确地知道投保人所采取的预防措施，那么最优保险策略将包括全额保险以及事后了解投保人的预防措施. 如果保险公司了解投保人的预防措施时不是十分精确，但花费的成本很低，则最优的策略一般包括不完全保险，并且其他事前事后的观察都具有积极的作用(见 Shavell 1979).

5.4.3 逆向选择

投保人与保险公司在发生灾难的概率方面的信息不对称还引起一个重要问题，即**逆向选择**，前面已经提到过. 假定可依据事件发生的概率将投保人分为两组，一个高风险组和一个低风险组. 令 π_H 和 π_L 分别代表处于高风险组和低风险组的概率，这里 $\pi_H > \pi_L$. 这些概率并不一定取决于预防 z 的水平. 重要的是保险公司并不能分辨这两类人，而投保人自己知道他们的风险. 因此保险
313 公司显然将会想办法使低风险的人自己暴露出来，主要是通过向他们提供一些更吸引他们的折扣方案. 假定这个办法失败了. 那么基本保险单对高风险的人有更大的吸引力，这反过来又会使保险费上升. 最终，低风险的人被逐出市场，保险市场将被高风险的人占据. 这类似于前面讨论过的汽车市场的 Lemon 法则. 注意这样一个事实，65 岁以上的老人难以买到医疗保险，为什么价格上升并不与风险匹配呢? Akerlof (1970, 492～493 页)说到：

> 一种答案是当价格升高时，为自己投保的人将是那些越来越确定自己需要保险的人……结果是随着价格的上升，保险申请人的平均医疗条件恶化——导致在任何价格都不会有保险销售. 这与汽车市场的例子严格地类似，当价格水平下降时，所提供的旧车的质量随之下降. 这又是一个道德风险问题. **信息的不对称诱使某些人利用它来损害另一**

些人，而这些受损害的人对此却一无所知.上面逆向选择的例子必然涉及了道德风险.另一方面，逆向选择也可在不涉及道德风险的情况中发生.Stiglitz 和 Weiss(1981)在论述信贷配给时为此提供了一个有趣的例子.

他们考虑在一个竞争性的银行系统中，信贷资金的供给为利率的增函数.假设有两类公司 θ_1 和 θ_2.[41] θ_1 类公司承担投资项目 θ_1，θ_2 类公司承担投资项目 θ_2.假定两类公司都需要同等数量的资金.工程 θ_1 如果成功，将为公司带来 R_1 美元，如果失败则为 0 美元，而失败概率为 q_1.另一方面，工程 θ_2 如果成功将为公司带来 R_2 美元，如果失败则为 0 美元，而失败的概率为 q_2.假定 $q_1<q_2$，并且 $R_1<R_2$，也就是说，工程 θ_1 相对于工程 θ_2 失败的概率更小，而成功所带来的收入也更少.也就是说，θ_1 类公司为低风险、低回报的公司，而 θ_2 类公司为高风险、高回报的公司.每个公司以 C 美元作抵押借得 B 美元，利率为 r.如果工程 θ_i 成功，θ_i 类公司将得到 $[R_i-(1+r)B]$ 美元.如果失败，公司将损失 C 美元.

工程 θ_1 的期望值为

$$y_1(r)\equiv q_1C+(1-q_1)[R_1-(1+r)B]$$

类似地，工程 θ_2 在给定 r 的情况下的期望值为

$$y_2(r)\equiv -q_2C+(1-q_2)[R_2-(1+r)B]$$

假定 $(1-q_1)R_1<(1-q_2)R_2$ 且 $B>C$，其中第一个关系式说明在成功的情况下，工程 θ_2 的期望收入比工程 θ_1 的高.于是可以证明对所有 r，

$$y_1(r)<y_2(r)$$

定义 r^* 和 r^{**} 如下：

$$y_1(r^*)=0 \text{ 且 } y_2(r^{**})=0$$

那么根据当前利率 r，我们可得到下列关系

$r<r^*$ $\quad\rightarrow$两个工程都将进行

$r^*<r<r^{**}$ $\quad\Rightarrow$只有工程 θ_2 将进行

令 $z_i(r)$ 为银行的期望收入，如果进行工程 θ_i 并且利率等于 r，则有

$$z_1(r)\equiv q_1C+(1-q_1)(1+r)B$$

$$z_2(r)\equiv q_2C+(1-q_2)(1+r)B$$

很明显，因为 $q_1<q_2$ 且 $B>C$，有 $z_1(r)>z_2(r)$.因此，在贷款方面，银行将倾向于 θ_1 而不是 θ_2.这是出现信息不对称之处.假定银行不知道公司属于那种类型，每个借款者都要求得到同样数量的资金，而银行却无法分辨它们.如果银行提高利率，其收入将会增加.但是，如果利率从低于 r^* 的水平提高到高于 r^* 的水平，$r^*<r<r^{**}$，则只有 θ_2 类公司保留下来.也就是说，市场由高风险、高回报的公司占据，如同 Akerlof 所说的旧车市场由次品占据一样.这

是由公司和银行之间的信息不对称所造成的逆向选择.然而,此逆向选择不涉及道德风险.

假如银行根据经验知道 $\alpha\cdot 100\%$ 公司属于 θ_1 类且 $(1-\alpha)\cdot 100\%$ 的公司属于 θ_2 类.进一步假定银行为总共 n 个工程提供融资.那么银行的期望利润
315 为

$$\pi(r)\equiv \alpha n z_1(r)+(1-\alpha)nz_2(r)-nB$$

当利率 r 升高时,银行愿为更多的工程融资(即 n 增加),同时,$z_1(r)$ 和 $z_2(r)$ 也会升高.因此,$\pi(r)$ 在最初时也会增加.但是,随着 r 的升高,最终将只有 θ_2 类公司(高风险的公司)留下.这种情况下 $\pi(r)$ 会相应地下降,这里我们可以回想 $z_1(r)>z_2(r)$.那么对银行而言,利润最大化的 r 可以低于市场利率,通过降低利率使之低于市场出清利率,吸引低风险的公司,银行有可能提高它的期望回报率.既然每个借款者都希望利率更低,所以更高的"市场出清"利率是不能维持的.其结果为均衡的回报率伴随着过量的贷款需求,即一个信贷配给下的均衡模型.

对信贷配给的分析在**委托人—代理人问题**上有广泛的应用.[42]**代理人**由**委托人**雇用,以委托人的名义进行活动.实际情况中,一个人的行为很难被观察到.当委托人不能准确地监督代理人的行为时,就会出现委托人—代理人问题.问题在于委托人怎样才能设计一个补偿系统(一个合约)以激励代理人按他或她的利益采取行动.Stiglitz 和 Weiss(1981)断言,对信贷配给的分析"可以应用到任何一个委托人—代理人问题中.例如,在农业中,银行(委托人)相当于地主,借款者(代理人)相当于佃农,而借款合同相当于租借合同.委托人—代理人问题的核心是如何向代理人提供适当的激励.一般地,像股权集资或分成制这样的收益共享的方法,是无效的.在那些方案下……不能使代理人努力工作."(407 页)

§5.5 结束语

期望效用理论尽管受到批评,但却有助于在经济学中得出一些开阔视野的结果.这也带动了信息经济学有趣的新发展.虽然 von Neumann - Morgenstern
316 的期望效用理论有着易于操作的有利条件,但我们可以注意到它的应用也存在明显的缺陷.也就是说,大多数不确定经济学的结果都基于这样一个假设,即只有一个随机变量,例如以货币单位表示的变量.当随机变量多于一个时,分析就变得极其困难,因为有多个随机变量时得到期望的过程通常涉及双重或更多重积分.如果只有一个随机变量,一个简单的积分就可得到期望.也许更重要的是,风险厌恶的 Arrow - Pratt 度量还不能令人满意地推广到多随机变量的情况.

但是，正如我们在本章的讨论中看到的一样，在限制于一个变量的情况下，期望效用理论已能产生许多启发性的结论.随着当前对策论以及经济学其他领域的理论(如产业组织)的迅速发展，毫无疑问不确定性经济学和信息经济学将继续产生越来越多的有趣结论.

▶ 注　释

[1]对此问题作了严肃阐释的微观经济学教科书包括：Malinvand (1977)、Green (1978)、Layard 和 Walters (1978)、Deaton 和 Muellbauer (1980)、Henderson 和 Quandt (1980)、Varian (1984)、Okuno 和 Suzumura (1985)、Cowell (1986)、Quirk (1987)、Nishimura (1989)、Pyndick 和 Rubinfeld (1989)、Silberberg (1990)和 Kreps (1990). 不确定性(和信息)经济学的教科书包括：Borch (1968)、Hey (1979)、Sakai (1982)、Ford (1983)、Sinn (1983)、McKenna (1986)、Hosoe (1987)和 Laffont (1989). 这个问题上有用的综述性文章包括：McCall (1971)、Hirschleifer 和 Riley (1979)、Lippman 和 McCall (1981)、Schoemaker (1982). Diamond 和 Rothchild (1989)收集了有关此专题的许多重要的文章，并附有一些有用的练习和评论.

[2]为简化这里的说明，假定 s 有限并且概率为离散的. 这些假定是非本质的，可以去掉.

[3]一般地一个特定的集合 Y 上的二元关系 $\gtrsim$ 如果是自反的并且是可传递的，则被称为**偏拟序**. 如果对于所有的 $y, y' \in Y$，$y \gtrsim y'$ 或 $y' \gtrsim y$，则称为**完备序或全序**. 如果由 $y \gtrsim y'$ 和 $y' \gtrsim y$ 推出 $y \sim y'$，则简单地称为一个**序**. 本段的叙述仅在于作出了这样的假定，即在预期集 Y 上定义了一个完备序 $\gtrsim$.

[4]令 $x_1 \succ x_2$ 且 $1 > \pi > \pi' > 0$. 则由独立性公理(公理 5.4)

$$(\pi; x_1, x_2) \succ (\pi; x_2, x_2) = x_2$$

但是因为 $0 < \pi'/\pi < 1$，再次运用公理 5.4，由上可得下列关系

$$[1 - \pi'/\pi; (\pi; x_1, x_2), (\pi; x_1, x_2)] \succ [1 - \pi'/\pi; x_2, (\pi; x_1, x_2)]$$

令 y^1 和 y^2 分别代表该关系的左侧和右侧，由公理 5.3，我们可看到

$$Pr(x_1) = (1 - \pi'/\pi)\pi + (\pi'/\pi)\pi = \pi$$

且

$$Pr(x_2) = (1 - \pi'/\pi)(1 - \pi) + (\pi'/\pi)(1 - \pi) = (1 - \pi)$$

因此 $y^1 \sim (\pi; x_1, x_2)$. 对 y^2，观察

$$Pr(x_1) = P_r(\pi; x_1, x_2) \cdot Pr[x_1 | (\pi; x_1, x_2)] = (\pi'/\pi) \cdot \pi = \pi'$$

且

$$Pr(x_2) = (1 - \pi'/\pi) + (\pi'/\pi) \cdot (1 - \pi) = \pi'$$

于是可得 $y^2 \sim (\pi'; x_1, x_2)$. 由于根据公理 5.1 可知 $\sim$ 是传递的，可得

$$(\pi; x_1, x_2) \succ (\pi'; x_1, x_2)$$

容易看出，由上述关系可推出 $\pi > \pi'$. 这证明了单调性属性的命题(i). 交换 π 和 π'，可得

$$\pi' > \pi \Leftrightarrow (\pi'; x_1, x_2) \succ (\pi; x_1, x_2)$$

单调性属性的命题(ii)由此可得.

[5]这里 b 和 w 分别代表"最好"和"最坏"的结果.

[6]最初的证明由 von Neumann 和 Morgenstern(1953，第三节及附录)给出，他们系统地阐述了此定理，给出了公理，并证明了此定理. 人们作了大量尝试以扩展或修改这些标准定理. 还有许多教科书介绍此定理. Luce 和 Raiffa (1957)包括了对该定理非常有用的讨论. 关于期望效用理论和相关专题的简洁阐述，见 Hommon(1987)、Machina(1987)以及 Machina 和 Rothchild(1987).

[7]这里回顾一下"线性仿射"变换的定义很有益处. 令 $f(x)$ 为定义在凸集 X 上的一个实函数. 如果 $f(x)$ 既是凸的又是凹的，则它为**线性仿射**或简单地就是**仿射**，即

$$\text{对任意 } x, x' \in X, f[\theta x + (1 \quad \theta)x'] = \theta f(x) + (1-\theta) f(x'), 0 \leqq \theta \leqq 1$$

等价地，f 是线性仿射的，当且仅当 $f(x) - f(0)$ 是线性的，即对所有 x，$x' \in X$，$f(x + x') = f(x) + f(x')$ 且 $f(ax) = af(x)$，$a \in R$，$x \in X$. 例如，如果 $X = R$，$a, b \in R$，且 $b \neq 0$，则 $f(x) \equiv ax + b$ 为线性仿射函数，且 $f'(x) \equiv ax$ 为线性函数. 因此，线性函数是线性仿射函数中特殊的一类. 但是，线性仿射函数在文献中通常简单地称为"线性函数". 如果我们要严格地区分这二者，则"线性规划"应被称为"线性仿射规划"，但这就显得迂腐了.

[8]如前所述，期望效用理论是不确定性经济学中最流行的理论. 因此，了解其他可行方法的批评对于理解此理论非常重要. Khaneman 和 Tversky (1979)给出了一些同期望效用模型相矛盾的实验证据. Machina(1982)对文献进行了综合，并给出了一个比 von Neumann - Morgenstern 理论更为一般化的理论，其中，他试着不用独立性公理(公理 5.4)来建立期望效用的分析. 参见 Loomes 和 Sugden(1982 和 1983)的"懊悔理论"，它比 Khaneman 和 Tversky (1982)的"预期理论"简单. 另见 Machina(1987 和 1989).

[9]Allais 的反论以及迅速致富效应的例子及其讨论取自 Sakai(1982，74～78 页)，而这又来源于 Khaneman 和 Tversky(1979)和其他人. Maurice Allais 是 1988 年诺贝尔经济学奖的获得者. *迅速致富效应*一词来自 Sakai (1982).

[10]因为 $u_1' > 0$，且 $u_2' > 0$，易知存在一个 φ，使得 $u_1 = \varphi(u_2)$，$\varphi' > 0$ 成立. 对此求微分，可得 $u_1' = \varphi' u_2'$ 从而 $u_1'' = \varphi''(u_2')^2 + \varphi' u_2''$. 根据 $\varphi' = u_1'/u_2'$ 以及 R_a 的定义，由此可以很容易地得到 $\varphi'' = (R_{a2} \quad R_{a1}) u_1'/(u_2')^2$.

[11]令实函数 $M_u(x)$ 代表与效用函数 u 相关的风险厌恶度量. 因为

$u(x)$和$v(x)\equiv au(x)+c$一定产生同样的度量，所以一定有$M_u(x)=M_v(x)$.因此，可以简单断定$R_u(x)$和$R_r(x)$满足M的这样一个属性.同样，我们也可以为函数$M_u(x)$加上下列属性：

(a)M_u对于风险厌恶为正，即$M_u(x)>0$，当且仅当$u''(x)<0$.当对某x_0，$u''(x_0)=0$，$M_u(x_0)\neq 0$，反之亦然.

(b)M与u''的量单调相关.也就是说，对任何效用函数$u(x)$和$v(x)$，如果$u'(x_0)=v'(x_0)$且$u''(x_0)<v''(x_0)$，则$M_u(x_0)>M_v(x_0)$.

很明显$R_a(x)$和$R_r(x)$都满足这些属性.

[12]在图5.3(a)和5.3(b)中，假定$u'(x)$为严格凸函数，或对所有的x，$u'''(x)>0$.这是绝对风险厌恶递减($R_a'(x)<0$)的必要条件，这被认为是$R_a(x)$上的一个关键性假定.在图5.3(b)中，不失一般性，假定a大于1.注意在图5.3(b)中，两条通过C和C'的切线在B点相交.这来自于$u_2'=au_1'$和$u_2''=au_1''$.Sakai(1982,97页)也利用了此图.

[13]关于假设B，Arrow(1970,第97页)写道："相对风险厌恶递增的假设不易面对直觉的质疑.因为如果财富和赌注都以同样的比例增加，接受此赌注的意愿将下降."

[14]为得到(28b)，将(28a)关于x_1求微分，注意对(28a)中给定的$u=u^0$，有$dx_2/dx_1=-au'(x_1)/u'(x_2)$.Yaari(1969)的"状态偏好方法"中对无差异曲线和等高集有很好的应用.对状态偏好方法的有用解释参见Hirschleifer(1965)和Green(1978,249～274页).后者基于前者."

[15]见Arrow(1963)和Sandmo(1971).对此主题的一个极好的基础性阐述，例如，参见Hey(1979)，Mckenna(1986)及Sakai(1982).Lippman和McCall(1981)及Laffont(1989)对其后来的发展作了介绍.Lippman和MaCall认为："保险经济学是确定性经济学的一个最重要的主题"(1981,288页,214页).他们对保险的阐述相当有启发性.有关此理论的更详尽的阐述参见Borch(1990).

[16]此例中，a美元作为资产(或财富)，是**存量**.另一方面我们可以把它当做收入，是**流量**.这个解释上的变化不会影响当前及以后的讨论.在许多例子中，流量解释更为合适.

[17]$a-b<a_1$意味着$p<x$，即保险费低于保险金额.$a_1<a_2$表示$x<b$，即保险公司支付的赔偿少于全部损失.这些假定的放宽留给有兴趣的读者.

[18]如课文中所说的，精算公平保费由$p=\pi$给出，即每单位保险金额的保险费与事故概率相等.Laffont(1989,124页)写道："在实际中，交易费用(及缺乏竞争)导致保险费大于精算公平保费…实际上，这些费用可能是相当大的."

[19]这一小节的解释见Sandmo(1971)；Hey(1979)和Sakai(1982).

[20]γ的增加意味着常数均值分布的"延伸"，这里p的均值为$\bar{p}$.当$\gamma=0$时，$p=\bar{p}$，不确定性消失.

[21]类似地，当且仅当 $q=0$（或 $q<0$）时，我们可以断定该公司为风险中性（或风险爱好者）.

[22]因此，当且仅当该公司为风险厌恶时，风险承担费为正（$q>0$）.风险承担费一词来自 Sakai(1982).

[23]有人认为这证实了 Frank Knight(1921)的论点：利润是承担风险的报酬.例如，见 Sakai(1982，42 页).但是，最近 Applebaum 和 Katz(1986，528 页)认为保持均值不变的价格不确定性的增加对单个公司产出的作用"看起来"是模糊的，而保持均值不变的价格不确定性的增加引起行业总产出的下降.

[24]这里的讨论很大程度来源于 Arrow(1970，第 3 章)，而它又源于 Arrow(1965).许多资产组合的现代理论受到 Tobin 一篇重要的论文(1958)的启发，人们发现他的理论基于一些限制性的假定.例如，只有当投资者的效用函数为二次的，或风险资产回报率为正态分布时他的均值方法才有效.同样，他的"分离定理"通常对多个风险证券的情况不成立(参见 Feldstein 1969).此"定理"认为投资者对资产组合选择的决策可以与消费和储蓄之间的选择分开.

[25]可以证明

$$(A/a^*)(da^*/dA)-1=[R_r(w_1^*)-R_r(w_2^*)]u'(w_1^*)/(a^*\Delta r_1)$$

我们然后回顾当且仅当 $u''<0$ 时，$\Delta<0$.

[26]这里的讨论源于 Leland(1968)，Sandmo(1969 和 1970)和 Sakai(1982).另见 Sandmo(1974)、Hey(1979)、Laffont(1978)及 Sandmo(1985).对于此专题的有用的概述，另见 Sandmo(1985).

[27]这里的分析可扩展到 T 个时期，其中 $T>2$.

[28]等式(62a)是众所周知的.按照 Gravelle 和 Rees(1981，405 页)的解释，可叙述如下：c_1 减少 1 美元，使 u 减少边际效用 u_1.这里存在 u_2 的一个增长，使消费者有与减少 1 美元以前相同的效用.对 c_1 增加的补偿是 $(1+\rho)$ 美元，由下式定义

$$u_1(c_1,c_2)=u_2(c_1,c_2)(1+\rho)$$

这里，ρ 为消费者的主观利率或边际时间偏好率.在竞争的环境下，ρ 变为与实际(市场)利率 r 相等.

[29]由比较静态学的通常运算，我们可得

$$\partial s/\partial y_1=E[u_{11}-(1+r)u_{12}]/\phi'',\partial c/\partial y_1$$
$$=(1+r)E[-u_{12}+(1+r)u_{22}]/\phi''$$

因为 $u_{11}<0$，$u_{22}<0$，$u_{12}\geqslant 0$ 与 $\phi''<0$，可得结论 $\partial s/\partial y_1>0$ 与 $\partial c_1/\partial y_1>0$.

[30]未来收入变动的增加取决于 γ 只是为了简化而做的一个假设.虽然经常做这个假设，但它不一定成立.参见 Rothchild 和 Stiglitz(1971).

[31]见 Sandmo(1970)和 Sakai(1982). 证明如下. 由式(59′)和式(67),可得 $c_2=\overline{y_2}+\gamma\epsilon+(1+r)s$. 因此令 $\overline{c_2}\equiv E(c_2)$,可得 $c_2-\overline{c_2}=y_2-\overline{y_2}=\gamma\epsilon$,因此

(*)　　当 $\epsilon\gtrless 0$ 时,$c_2-\overline{c_2}\gtrless 0$

由式(64a),u_2 关于 c_2 是递减函数(即 $u_{22}<0$),

$$\text{当 } \epsilon\gtrless 0 \text{ 时},u_2(c_1,c_2)\lessgtr u_2(c_1,\overline{c_2})$$

因此

$$\epsilon u_2(c_1,c_2)\leqq\epsilon u_2(c_1,\overline{c_2})$$

其中,只有当 $\epsilon=0$ 时等式成立. 取期望,可得

$$(**)\qquad E[\epsilon u_2(c_1,c_2)]<E[\epsilon u_2(c_1,\overline{c_2})]=u_2(c_1,\overline{c_2})E(\epsilon)=0$$

另一方面,因为由式(75)$\partial R_a/\partial c_2<0$,(*)也推出

$$\text{当 } \epsilon\gtrless 0 \text{ 时},-u_{22}(c_1,c_2)/u_2(c_1,c_2)\lessgtr -u_{22}(c_1,\overline{c_2})/u_2(c_1,\overline{c_2})$$

由此可进一步推出

$$-\epsilon u_{22}(c_1,c_2)\leqq -[u_{22}(c_1,\overline{c_2})/u_2(c_1,\overline{c_2})][\epsilon u_2(c_1,c_2)]$$

其中,只有当 $\epsilon=0$ 时等式成立. 取期望,可得

$$-E[\epsilon u_{22}(c_1,c_2)]\leqq -[u_{22}(c_1,\overline{c_2})/u_2(c_1,\overline{c_2})]E[\epsilon u_2(c_1,c_2)]$$

然后由式(**)知,$E[\epsilon u_2(c_1,c_2)]<0$,即得

$$E[\epsilon u_{22}(c_1,c_2)]>0$$

类似地,由 $\partial R_a/\partial c_1\leqq 0$,可得

$$E[\epsilon u_{12}(c_1,c_2)]\leqq 0$$

[32]Sandmo(1970)讨论了收入风险和资本风险,而 Leland(1968)只讨论了收入风险.

[33]有关信息不对称的简述,见 Postlewaite(1987).

[34]有关信号传递的讨论,见 Spence(1973). 遵循其思路,考虑一个就业市场. 如同在大多数的就业市场中一样,雇主并不能确切地了解工人的生产能力. 假定有两类工人,A 类和 B 类. 每个 A 类工人的边际产出价值为 a 美元,B 类为 b 美元,其中 $a<b$. 假定雇主在雇佣工人之前不能直接地观察到边际产品. 假定雇主为风险中性,故他只考虑边际产品. 如果由过去的经历可知工人的工作能力与他或她的教育程度有很强的关系. 也就是说,令 c_i 为教育(上学)成本,并假定这与教育程度 y 成比例,$c_i=k_iy$,$i=A,B$,$k_A>k_B$,即能力低的人比能力高的人要花更多的教育成本才能达到某个教育程度 y. 因为 y 是可以观察到的,所以雇员的工资可以根据教育程度来决定. 问题是雇主能否依据工人的教育程度来成功地区分工人的工作能力. Spence 认为这个问题的答

案是肯定的.这可以产生**信号传递的均衡**,其中教育是一个**信号**,教育成本是**信号传递成本**.这里雇员需要将自己考虑成信号传递,只假定他选择信号以最大化工资收入和信号传递成本之间的差距.Spence(1973,374 页)指出上述信号在传递模型的应用相当广泛,他说,"我进一步认为,从选择录取程序到升职、贷款和消费者信贷以及借助惹人注目的消费来传递社会地位的一系列现象都适合于用相同的基本概念体系来分析".有关信号传递理论的简要概述,见 Riley(1987).

[35]本小节的讨论主要源于 Pauly(1974).Shavell(1979)提供了一个类似的模型,其中避免事故的成本以效用单位来计算.另见 Arrow(1963)、Ehrlich 和 Becker(1972)、Lippman 和 McCall(1981)及 Laffont(1989).

[36]z'由下式得到

$$z'=\frac{[\pi u''(a_1)-\pi' u'(a_1)]}{[\pi''|u(a_1)-u(a_2)|+|\pi u''(a_1)+(1-\pi)u''(a_2)|]}$$

分母总为负,而因为 $\pi'<0$,所以分子可为正也可为负.

[37]虽然我们沿用 Pauly(1974),用两个步骤来考虑当前的最优化问题,我们也可用一个步骤来考虑它.即定义 $\Phi(z,x)$如下

$$\Phi(z,x)\equiv\pi(z)u[a-b-z-P(x)+x]$$

$$+|1-\pi(z)|u[a-z-P(x)]$$

考虑使 Φ 取最大值的 z,x.当我们有一内部解(在最优点 $z>0$ 且 $x>0$)时,一阶条件写为

$$\partial\Phi/\partial z=\pi'[u(a_1)-u(a_2)]-[\pi u'(a_1)+(1-\pi)u'(a_2)]=0$$

$$\partial\Phi/\partial x=\pi u'(a_1)-[\pi u'(a_1)+(1-\pi)u'(a_2)]P'(x)=0$$

这里,$a_1\equiv a-b-z-P(x)+x$,$a_2\equiv a-z-P(x)$,与文中定义的一样.因此 $\partial\Phi/\partial z=0$ 得式(82),$\partial\Phi/\partial x=0$ 得式(84).此问题的二阶条件留给读者.这样的条件看起来并不来自 $\pi'<0,\pi''>0,u'>0,u''<0$ 这样的假定.

[38]为说明这一点,我们已隐含地假定保险的需求是下倾的,即式(84)右侧为 x 的减函数.在当前的模型中,看起来这不一定为真,即使我们假定绝对风险厌恶递减($R_a'<0$,这推出 $u'''>0$).于是下倾的需求曲线成了一个简单假定.

[39]Diamond 和 Rothchild(1989,307 页)将此问题归纳如下:

> 对于许多商品而言,提供此商品的成本取决于购买者的行为.这在保险中明显是真实的,例如,提供汽车保险的期望成本取决于投保人驾驶的公里数.有保修的产品也会出现类似的情况,产品在保修期内的损坏概率取决于对该产品的使用方式或使用次数.如果供应者看不到购买者的行为.也就是说,产品的价格就不能决定于影响成本的行为,也就是说,汽车保险的价格通常不由驾驶的公里数决定.

一般以为"道德风险"一词不太合适,因为如果契约中的各方并未被阻止追求标准的效用最大化,则这个词便带来不必要的道德内涵.因此,Guesneri(1987)提出用**隐藏行为**来代替它.Guesneri(1987)包含了对此问题一个简要的、有用的概览.

[40]为研究保险中的道德风险问题,Laffont(1989,125～127 页)限定 $P(x)$等于 $\pi(z)x$.则投保的问题是选择 z 和 x,以最大化

$$\psi(z,x)=\pi(z)u[a-b-z-\pi(z)x+x]+[1-\pi(z)][a-z-\pi(z)]$$

当能保证一个内部解(即最优处 $z>0$ 且 $x>0$)时,一阶条件写为

$$\partial\psi/\partial z=0 \text{ 且 } \partial\Phi/\partial x=0$$

为使$\partial\psi/\partial x=0$,需有

$$\pi(1-\pi)[u'(a_1)-u'(a_2)]=0 \text{ 或 } a_1=a_2$$

由此可推出 $x=b$,或全保险.此解的主要困难,也就是道德风险的来源,是保险公司无法观察到投保人自我保护的程度 z.如果不是这样,保险公司可设定一个独立于 z 的价格 p,则此问题转化为选择 z 和 x 以最大化

$$\Gamma(z,x)=\pi(z)u(a-b-z-px+x)+[1-\pi(z)]u(a-z-px).$$

问题的一阶条件为

$$\partial\Gamma/\partial z=\pi'[u(a_1)-u(a_2)]-[\pi u'(a_1)+(1-\pi)u'(a_2)]\leqq 0$$

$$\partial\Gamma/\partial x=\pi' u(a_1)-p[\pi' u(a_1)+(1-\pi)u'(a_2)]\leqq 0$$

$$z(\partial\Gamma/\partial z)=0, x(\partial\Gamma/\partial x)=0, z\geqq 0 \text{ 且 } x\geqq 0.$$

零利润条件,$\pi(x-px)-(1-\pi)px$,要求 $p=\pi$,在这种情况下,$\partial\Gamma/\partial x=\pi(1-\pi)[u'(a_1)-u'(a_2)]$.因此,如果在最优处 $x>0$,则$\partial\Gamma/\partial x=0$,那么 $u(a_1)=u(a_2)$或 $a_1=a_2$.这又进一步推出全保险.用 $a_1=a_2$,可得

$$\partial\Gamma/\partial z=-[\pi u'(a_1)+(1-\pi)u'(a_2)]<0$$

因此,由 $z(\partial\Gamma/\partial z)=0$,一定有在最优处 $z=0$.也就是说,在竞争均衡条件下,自我保护程度为零.保险的价格 p 等于$\pi(0)$.

[41]对于 Stiglitz 和 Weiss(1981)的简洁和有用的阐述见 Nishimura(1989,254～257 页)和 Wilson(1987).

[42]对委托人—代理人问题的精辟而简洁的解释,见 Stiglitz(1987).另见 Kotowitz(1987),他引用了《国富论》.在亚当·斯密的书中,管理者是一个代理机构,委托人是资本家.斯密说:"或多或少地,在这样一个公司的事务管理中,疏忽和滥用权力一定总是盛行."(Smith,1776,700 页).

参考文献

Akerlof, G. 1970. "The Market for Lemons: Qualitative Uncertainty and the Market Mechanism." *Quarterly Journal of Economics* 84(August):488 – 500.

Alchian, A. A. 1953. "The meaning of Utility Meaurement." *American Economic Review* 43(March):26 – 53.

Allais, M. 1953. "Le Comportement de l'homme rationnel devant le risque Critique des postulates ex axiomes de l'ecole americaine." *Econometrica* 21 (October):503 – 46.

Anscombe, F. J., and R. J. Aumann. 1963. "A Definition of Subjective Probability." *Annals of Mathematical Statistics* 34(March):199 – 205.

Applebaum, E., and E. Katz. 1986. "Measure of Risk Aversion and Comparative Statics." *American Economic Review* 76(June):524 – 29.

Arrow, K. J. 1963. "Uncertainty and Welfare Economics of Medical Care." *American Economic Review* 53(December):941 – 73. Reprinted in Arrow 1970 and also in Diamond and Rothchild 1989. The latter does not contain the appendix.

317 ——. 1965. *Aspects of the Theory of Risk-Bearing*. Yrjö Jahnsson Lectures. Helsinki: Yrjö Jabnssoin Sattio.

——. 1970. *Essays in the Theory of Risk-Bearing*. Chicago: Markanham.

Bacharach, M. 1977. *Economics and the Theory of Games*. London: Macmillan.

Borch, K. H. 1968. *The Economics of Uncertainty*. Princeton, N. J.: Princeton University Press.

——. 1990. *Economics of Insurance*. Amsterdam: North-Holland.

Cass, D., and J. E. Stigliz. 1970. "The Structure of Investor Preferences and Asset Returns, and Separability in Portfolio Allocation: A Contribution to the Theory of Mutual Funds." *Journal of Economic Theory* 2(June):122 – 60.

Cowell, F. A. 1986. *Microeconomic Principles*. New York: Oxford University Press.

Deaton, A., and J. Muellbauer. 1980. *Economics and Consumer Behavior*. Cambridge: Cambridge University Press.

Diamond, P., and M. Rothchild, eds. 1989. *Uncertainty in Economics: Readings and Exercises*. Rev. ed. New York: Academic Press(1st ed. 1978).

Eatwell, J., M. Milgate, and P. Newman, eds. 1987. *The New Palgrave: A Dictionary of Economics*. 4 vols. London: Macmillan.

Ehrlich, I., and G. S. Becker. 1972. "Market Insurance and Self-Protection." *Journal of Political Economy* 80(July/August):623 – 48.

Ellsberg, D. 1954. "Classic and Current Notions of 'Measurable Utility.'" *Economic Journal* 64(September):528 – 56.

Feldstein, M. S. 1969. "Mean-Variance Analysis in the Theory of Liquidity Preference and Portfolio Selection." *Review of Economic Studies* 36(January):5 – 12.

Fisher, I. 1930. *The Theory of Interest*. London: Macmillan.

Ford, J. L. 1983. *Choice, Expectation, and Uncertainty*. Oxford: Martin Robertson.

Friedman, M., and L. J. Savage, 1948. "The Utility Analysis of Choice Involving Risk." *Journal of Political Economy* 56(August):279 – 304.

Gravelle, H., and R. Rees. 1981. *Microeconomics*. London: Longman.

Green, H. A. J. 1978. *Consumer Theory*. New York: Academic Press.

Guesnerie, R. 1987. "Hidden Actions, Moral Hazard, and Contract Theory." In Eatwell, Milgate, and Newman 1987, 2:646 – 50.

Hammond, P. J. 1987. "Uncertainty." In Eatwell, Milgate, and Newman 1987, vol. 4:728 – 33.

Hart, O. D. 1975. "Some Negative Results on the Existence of Comparative Statics Results in Portfolio Theory." *Review of Economic Studies* 42 (October): 615 – 21.

Henderson, J. M., and R. E. Quandt. 1980. *Microeconomic Theory: A Mathematical Approach*. 3d ed. New York: McGraw-Hill.

Hey, J. D. 1979, *Uncertainty in Microeconomics*. New York: New York University Press.

Hirschleifer, J. 1965. "Investment Decision under Uncertainty: Choice-Theoretic Approaches." *Quarterly Journal of Economics* 79(November): 509 – 36.

Hirshleifer, J., and J. G. Riley. 1979. "The Analytics of Uncertainty and Information—An Expository Survey." *Journal of Economic Literature* 17 (December):1375 – 421.

Hosoe, M. 1987. *Economic Analysis of Uncertainty and Information* (in Japanese). Fukuoka, Japan: Kyushu University Press.

Kahneman, D., and A. Tversky. 1979. "Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk." *Econometrica* 47(March):263 – 91.

Kihlstrom, R. E, and L. J. Mirman. 1974. "Risk Aversion with Many Commodities." *Journal of Economic Theory* 8(July):361 – 88.

Kiritani, T. 1986. *Modern Theory of Asset Selection* (in Japanese). Tokyo: Toyo Keizai Shimpo-sha.

Knight, F. H. 1921. *Risk, Uncertainty, and Profit*. New York: Houghton Mifflin.

Kotowitz, Y. 1987. "Moral Hazard." In Eatwell, Milgate, and Newman 1987,

3:549 - 51,700.

Kreps, D. M. 1990. *A Course in Microeconomic Theory*. Princeton, N. J.: Princeton University Press

Laffont, J. J. 1989. *The Economics of Uncertainty and Information*. Trans. by J. P. Bonin and H. Bonin. Cambridge, Mass.: MIT Press.

Layard, P. R. G., and A. A. Walters. 1978. *Microeconomic Theory*. New York: McGraw-Hill.

Leland, H. E. 1968. "Savings and Uncertainty: The Precautionary Demand for Saving." *Quarterly Journal of Economics* 82, August: 465-73. Reprinted in Diamond and Rothchild 1989.

Lippman, S. A., and J. J. McCall. 1981. "The Economics of Uncertainty: Selected Topics in Probabilistic Methods." In *Handbook of Mathematical Economics*, ed. K. J. Arrow and M. D. Intriligator, 1:211 - 84. Amsterdam: North-Holland.

Loomes, G., and R. Sugden. 1982. "Regret Theory: An Alternative Theory of Rational Choice under Uncertainty." *Economic Journal* 92(December):805 - 24.

——. 1983. "A Rationale for Preference Reversal." *American Economic Review* 73(March):428 - 32.

Luce, R. D., and Raiffa, H. 1957. *Games and Decisions*. New York: John Wiley and Sons.

319 Machina, M. J. 1982. "Expected Untility Analysis without the Independence Axiom." *Econometrica* 50(March):277 - 323.

——. 1987. "Expected Utility Hypothesis." In Eatwell, Milgate, and Newman 1987, 2:232 - 39.

——. 1989. "Dynamic Consistency and Non-Expected Utility Models of Choice under Uncertainty." *Journal of Economic Literature* 22(December):1622 68.

Machina, M. J., and M. Rothchild. 1987. "Risk." In Eatwell, Milgate, and Newman 1987, 4:201 - 06.

Malinvaud, E. 1977. *Leçons de théorie microéconomique*. 4th ed. Paris: Dunod. (The Japanese translation by T. Hayashi from the 4th ed. French original with translator's corrections of typos. Tokyo: Sobunsha, 1981. The English translation by A. Silvey from the 2d revised ed., Amsterdam: North-Holland.)

Marschak, J. 1950. "Rational Behavior, Uncertain Prospects, and Measurable Utility." *Econometrica* 18(April):111 - 41.

McCall, J. J. 1971. "Probabilistic Economics." *Bell Journal of Economics and management Science* 2(Autumn):403 - 33.

McKenna, C. J. 1986. *The Economics of Uncertainty*. London: Wheatsheaf Books.

Nishimura, O. 1989. *Microeconomics* (in Japanese). Kyoto: Showado.

Okuno, M., and K. Suzumura. 1985. *Microeconomics I* (in Japanese). Tokyo: Iwanami.

Pauly, M. V. 1974. "Overinsurance and Public Provision of Insurance: The Roles of Moral Hazard and Adverse Selection." *Quarterly Journal of Economics* 8 (February): 44 - 54. Reprinted in Diamond and Rothchild 1989.

Pindyck, R. S., and D. L. Rubinfeld. 1989. *Microeconomics*. London: Macmillan.

Postlewaite, A. 1987. "Asymmetric Information." In Eatwell, Milgate, and Newman 1987, 1: 133 - 35.

Pratt, J. W. 1964. "Risk Aversion in the Small and in the Large." *Econometrica* 32 (January/February): 122 - 36. Reprinted in Diamond and Rothchild 1989.

Quirk, J. P. 1987. *Intermediate Microeconomics*. 3d ed. Chicago: Science Research Associates. (1st ed. 1976, 2d ed. 1983).

Riley, J. G. 1987. "Signaling." In Eatwell, Milgate, and Newman 1987, 4: 330 - 33.

Rothchild, M., and J. E. Stiglitz. 1970. "Increasing Risk I: A Definition." *Journal of Economic Theory* 2 (September): 225 - 43.

——. 1971. "Increasing Risk II: Its Economic Consequences." *Journal of Economic Theory* 3 (March): 66 - 84.

320 Sakai, Y. 1978. "A Simple General Equilibrium Model of Production: Comparative Statics with Price Uncertainty." *Journal of Economic Theory* 19 (December): 287 - 306.

——. 1982. *The Economics of Uncertainty* (in Japanese). Tokyo: Yuhikaku.

Sandmo, A. 1969. "Capital Risk, Consumption, and Portfolio Choice." *Econometrica* 37 (October): 586 - 99.

——. 1970. "The Effects of Uncertainty on Saving Decisions." *Review of Economic Studies* 37 (July): 353 - 60.

——. 1971. "On the Theory of the Competitive Firm Under Price Uncertainty." *American Economic Review* 65 (March): 65 - 73.

——. 1974. "Two - Period Models of Consumption Decision under Uncertainty." In *Allocation under Uncertainty: Equilibrium and Optimality*, ed. J. H. Drèze. New York: Macmillan.

——. 1977. "Portfolio Theory, Asset Demand, and Taxation: Comparative Statics with Many Assets." *Review of Economic Studies* 44 (June): 369 - 79.

——. 1985. "Effects of Taxation and Savings and Risk Taking." In *Handbook of Mathematical Economics*, ed. A. J. Auerbach and M. Feldstein, 1: 265 - 311. Amsterdam: North-Holland.

Savage, L. J. 1954. *Foundations of Statistics*. New York: John Wiley.

Schoemaker, P. J. H. 1982. "The Expected Utility Model: Its Various

Purposes, Evidences and Limitations." *Journal of Economic Literature*, 20(June): 529 – 63.

Shavell, S. 1979. "On Moral Hazard and Insurance." *Quarterly Journal of Economics* 93(November): 541 – 62.

Silberberg, E. 1990. *The Structure of Economics*. 2d ed. New York: McGraw Hill(1st ed. 1978.)

Sinn, H.-W. 1983. *Economic Decisions under Uncertainty*. Amsterdam: North-Holland.

Spence, M. 1973. "Job Market Signaling." *Quarterly Journal of Economics* 87, August: 355 – 74. Reprinted in Diamond and Rothchild 1989.

Stiglitz, J. E. 1987. "Principal and Agent." In Eatwell, Milgate, and Newman 1987, 3: 966 – 72.

Stiglitz, J. E., and A. Weiss. 1981. "Credit Rationing in Markets with Imperfect Information." *American Economic Review* 71(June): 393 – 410.

Tobin, J. 1958. "Liquidity Preference as Behavior Towards Risk." *Review of Economic Studies* 25(February): 65 – 86.

Varian, H. 1984. *Microeconomic Analysis*. 2d ed. New York: W. W. Norton.

von Neumann, J., and O. Morgenstern. 1953. *Theory of Games and Economic Behavior*. 3rd ed. Princeton, N. J.: Princeton University Press(1st ed. 1944, 2nd ed. 1949).

321

Wilson, C. 1987. "Adverse Selection." In Eatwell, Milgate, and Newman 1987, 1: 32 – 34.

Yaari, M. 1969. "Some Remarks on Measures of Risk Aversion and Their Use." *Journal of Economic Theory* 1(October): 315 – 29. Reprinted in Diamond and Rothchild 1989.

第4篇

微分方程与经济分析

第 6 章　微分方程基础与经济应用

325　近几年，在经济分析中纳入显式动态学变得越来越重要. 许多经济学家们满意的单一时期情况的模型，现在已经包括了显式动态学. 微分方程和最优控制论是由数学发展出的两种工具，对经济学家来说可能是分析动态问题的最基本工具. 在该书的剩余部分，我们将研究它们并讨论其在经济学中的非凡应用.[1]

§6.1　基本概念及解的存在性

宽泛地讲，微分方程是含有未知函数的导数方程. 例如，令 $\dot{x}\equiv dx/dt$，考虑下列方程：

$$\dot{x}(t)=-ax(t) \tag{1}$$

这里 a 为一正的常数，$x(t)$为定义在开区间上的实值函数. 这里 $x(t)$为“未知函数”，是指其显式形式未知或者没有事先指定. 因此式(1)为一个微分方程.

更一般地，我们可以考虑下列方程：

$$\dot{x}(t)=f[t,x(t)] \tag{2}$$

其中 $x(t)$ 为"未知函数",且 f 为已知函数.因此,对 $t\in R$,f,x 均为实值函数,且 f 的定义域为开区间 $(\alpha,\beta)\subset R$.显然,方程(1)为(2)的特例.

如果存在一个函数 $\phi(t)$,将其代入式(2)中,可以将式(2)化为一个特定开区间 $(\alpha,\beta)\subset R$ 上的恒等式,我们称 $\phi(t)$ 为式(2)的一个**解**,区间 (α,β) 为
326 解 $\phi(t)$ 的**定义域**.也就是说,$\phi(t)$ 为(2)在区间 (α,β) 上的一个解,当且仅当

$$\dot{\phi}(t)=f[t,\phi(t)],t\in(\alpha,\beta) \tag{3}$$

例如,函数

$$\phi(t)=ce^{-at}\quad(c\text{ 为一个任意常数}) \tag{4}$$

为微分方程(1)的一个解.这里 $\phi(t)$ 的定义域为 $R\equiv(-\infty,\infty)$.实际上,我们容易看到,对所有 $t\in R$,

$$\dot{\phi}(t)=-ace^{-at}=-a\phi(t) \tag{5}$$

也就是说,对所有 $t\in(-\infty,\infty)$,形如方程(4)的 $\phi(t)$ 化方程(1)为一个恒等式.

式(2)的一个更简单的例子为如下微分方程:

$$\dot{x}=1 \tag{6}$$

易得其解为

$$\phi(t)=t+c,t\in R \tag{7}$$

其中 c 为一任意常数.

例(1)、(6)表明上述定义的解一般是不惟一的.事实上,由于 c 为任意实数,两种情况均有无穷多个解.另一方面,如果 x 值给定为 $t=t^0$ 时 $x=x^0$,例(1)或例(6)的解均惟一.例如,如果对 $t=0$,$x=x^0$,例(1)或例(6)的解分别惟一地如下:

$$\phi(t)=x^0e^{-at} \tag{4'}$$

$$\phi(t)=t+x^0 \tag{7'}$$

常数 c 的值由这样的"初始条件"惟一确定.式(7)和式(7')见图 6.1,这是式(6)的解.

因此,微分方程理论最重要的问题之一就是是否存在一个通过给定点
327 (t^0,x^0) 的解.如果存在,我们自然关心通过给定点 (t^0,x^0) 的解是否惟一.对于微分方程(1)或(6),我们易知通过任意给定点 $(t^0,x^0)\in R^2$ 的解存在且惟一.

一般地,寻找通过给定点 (t^0,x^0) 的微分方程(2)的解的问题称为**初值问题**,其中 $x(t^0)=x^0$ 或 $\phi(t^0)=x^0$ 称为**初始条件**.满足式(3)以及 $\phi(t^0)=x^0$,

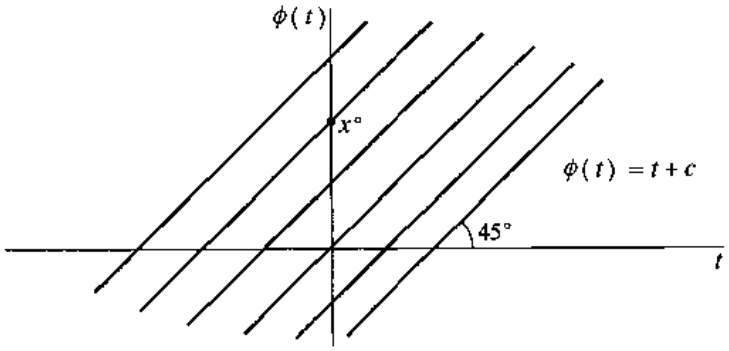


图 6.1　式(6)的解的图示

$t^0 \in (\alpha, \beta)$的函数 $\phi(t)$，称为(2)的初值问题的一个**解**. 初始这个词表明 t^0 经常设为 0，表示初始时刻.

另一方面，t^0 不必为 0. 在初值问题中，只需提供一个特定点(t^0, x^0)即可确定一个**解**，无需限定 $t^0 = 0$. 例如，对于给定点$(0, x^0)$，式(1)的解为式(4′)，即当 $t = 0$ 时 $x = x^0$. 然而，对于给定点(t^0, x^0)，即当 $t = t^0$ 时 $x = x^0$，其**解**为[2]

$$\phi(t) = x^0 e^{-a(t-t^0)} \tag{4''}$$

我们可能还要指出尽管 t 习惯上代表“时间”(如词“初始”所启示的)，实际没有必要这样. 微分方程理论是一个数学理论，因此它可以脱离在各种领域
328 中使用的概念(例如“时间”). 另一方面，由于大多数应用把 t 解释为“时刻”，如果我们接受这种解释将有利于我们对该理论的理解. 在这种情况下，式(2)代表一种**动态的**或**演变的**过程.

在式(2)中，我们设 x，f 均是实值的. 更一般的，它们可以是向量值. 我们可以考虑：

$$\dot{x}_i(t) = f_i[t, x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)], \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{8}$$

式(8)称为 ***n* 元一阶微分方程组**. 我们讨论的微分方程仅限于这种形式. 如果函数 f_i 独立于 t(对所有的 i，$\partial f_i / \partial t = 0$)，则式(8)称为**自控**微分方程.

在式(2)中，涉及的导数的最高阶数为 1. 这种方程称为**一阶微分方程**. 此外，我们可以考虑如下方程：

$$\ddot{x}(t) = f[t, x(t), \dot{x}(t)] \tag{9}$$

其中 $\ddot{x}(t) \equiv d^2x/dt^2$. 这称为**二阶微分方程**. 通常，微分方程的**阶**定义为方程中所包含的(未知函数的)导数的最高阶数. 我们观察到式(9)可以转换成式(8)中描述的方程的形式. 定义 $y(t)$ 为 $y(t) \equiv \dot{x}(t)$，式(9)改写为

$$\dot{y}(t) = f[t, x(t), y(t)] \text{ 和 } \dot{x}(t) = y(t) \tag{9'}$$

这是两元一阶微分方程组. 同理，一个 n 阶微分方程可以转换成一个 n 元一

阶方程.我们必需指出的是,在以上的论述中,假定"未知函数"$x(t)$只含一个独立变量,更具体地,$t\in R$,因此 $\dot{x}$代表 $x(t)$的**全**微分.此外,如果 t 为向量,则通常我们得到"未知函数"$x(t)$的**偏**导数.这时微分方程称为**偏微分方程**,而以上讨论的方程,例如式(2)、式(8)和式(9),称为**常微分方程**,或简称**微分方程**.我们讨论的**微**分方程仅限于常微分方程.

下面将进行稍微规范的论述.我们将以**叙述**微分方程理论中最重要的定理开始展开讨论.该定理也阐明了在处理微分方程中涉及的一些基本假定.

329 **【定理 6.1】(Cauchy－Peano)** 考虑由式(8)给出的微分方程组,或更简化地

$$\dot{x}(t)=f[t,x(t)] \tag{10}$$

其中 $x=(x_1,\cdots,x_n)$,$f=(f_1,\cdots,f_n)$,$f:D\to R^n$为定义于 $D\equiv T\times B$ 上的连续函数,T 为 R 上的开区间(a,b),B 为R^n的开子集.假定 f 关于 B 中的 x 连续可微,[3]令 t^0,x^0 分别是 T 和B 中满足$x(t^0)=x^0$ 的点.那么存在一个定义域为 T 的开子区间(α,β),且在R^n中取值的函数$\Phi(t)$,使得 $t^0\in(\alpha,\beta)$,以及

(i) $\phi(t)$在(α,β)上连续;

(ii) 对所有 $t\in(\alpha,\beta)$,$\dot{\varphi}(t)=f[t,\phi(t)]$,可能不包括$(\alpha,\beta)$的某一可数子集的元素;

(iii) $\phi(t^0)=x^0$;

(iv) 如果另一个函数 $\Psi(t)$对 T 的某个开于区间(α',β')满足条件(i)到(iii),使得 $t^0\in(\alpha',\beta')$,则我们有

$$\text{对 } t\in(\alpha,\beta)\cap(\alpha',\beta'),\phi(t)=\psi(t) \tag{11}$$

注:满足定理 6.1 的条件(i)和(ii)的函数 $\phi(t)$称为微分方程组(10)的一个**解**,其中 $x(t^0)=x^0$ 为初始条件.条件(iv)表明满足初始条件的解是**惟一**的.

330 注:在特定的假设下,定理 6.1 在给定的初始条件下建立了一个特定区间(α,β)上的惟一解 $\phi(t)$.注意解 $\phi(t)$的定义域(α,β)是 T 的子集(可以很小).也就是说,定理 6.1 只是一个**局部**存在性定理.

注:注意在微分方程(10)中函数 f 不必定义在整个空间$R\times R^n$上,而是可以定义于特定开于集 D 上.如果 $x=\phi(t)$为一标量函数,解的路径(t,x)可以用图形表示出来,其中解的路径用 $t-x$ 空间中D 的曲线表示.D 可以为图 6.1 所示的整个 R^2,但一般不必是这样.D 通常可能比R^2 小.同时也要注意初始点(t^0,x^0)必须在集合 D 中.它不是 R^2 中的任意点.

定理 6.1 保证了在特定假定下,给定(t^0,x^0)时,t 的一个特定区间上的

惟一解的存在性.以下例子有利于说明解的非惟一性或不存在性:

【例 6.1】 考虑如下方程:[4]

$$\dot{x}(t)=f[x(t)]=x(t)^{2/3},\text{其中 } x\in R,t\in R$$

令 $t^0=0,x^0=0$.则当 $t\in R$ 时,$\phi(t)=0$ 和 $\phi(t)=(t/3)^3$ 均满足该方程,根据条件(iii),$\phi(t^0)=x^0$.通过(0,0)的解不惟一.显然,函数 f 在 $x=0$ 处不可导,因此违反了定理 6.1 的假定之一

【例 6.2】 考虑如下方程:[5]

$$\dot{x}(t)=f[x(t)]=x(t)^2,\text{这里 } x\in R,t\in R$$

显然,f 在 R 上连续可导,易知该方程通过点 $t^0=1,x^0=1$ 的解为 $\phi(t)=-1/t$,可以看出 $\Phi(t)=1/t^2$.另一方面,该微分方程的解在 $t^0=0$ 时不存在.该例子说明定理 6.1 并不确保一个解的**全局**存在性,即对 $x(t)$ 定义于其中的所有 t 来说一个解的存在性.

微分方程的一个重要分类是线性和非线性.如果函数 f 是关于 x 的线性函数,则 n 元微分方程组(8)或(10)是**线性的**,否则 f 为**非线性的**.例 6.1、6.2 中的微分方程均是非线性的.通常,一个线性微分方程可以写成如下形式:

331

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+u(t) \tag{12}$$

其中 $A\equiv[a_{ij}]$为一个 $n\times n$ 矩阵,其元素 a_{ij}通常为 t 的函数.也就是说,$a_{ij}=a_{ij}(t)$或 $A=A(t)$.函数 $u(t)$在R^n中取值,它是事先指定的.函数 $u(t)$称为控制函数或**强制函数**.如果 $u(t)\equiv 0$,则式(12)为**齐次**的.如果 A 为一常数矩阵,即如果 a_{ij}均为常数,则式(12)称为**常系数线性微分方程组**.方程(1)和(6)为齐次常系数线性微分方程组.注意函数 f 的线性既推不出也不要求解 $\phi(t)$ 的线性(参见方程 4).

对线性微分方程组而言,定理 6.1 可以大大地加以强化.换句话说,我们得到定理 6.2.

【定理 6.2】 假定定理 **6.1** 中的式(10)以式(12)的形式给出,其中假设函数 $A(t)$和 $u(t)$是 T 上的连续函数.[6]令 t^0 与 x^0 分别是 T 和 B 上满足 $x(t^0)=x^0$ 的点.则存在 $\phi(t)$,使得:

(i) $\phi(t)$对 T 中所有 t 连续;

(ii) 对 $t\in T,\dot{\phi}(t)=A\phi(t)+u(t)$;

(iii) $\phi(t^0)=x^0$;

(iv) 对所有 $t\in T$,满足条件(i)到(iii)的 $\phi(t)$惟一.

注:换句话说,如果微分方程组是线性的,只要 $A(t)$和 $u(t)$连续,解总是存在的,且其存在性对 T 中所有 t 成立(即解是全局性的).若给定初始条件 (t^0,x^0),解是惟一的.

注:对于 n 元线性微分方程组,可能得到一个包括 n 个任意常数的解,一切可能的解可依据"初始条件"$\phi(t^0)=x^0$ 对这些常数赋予不同的值而得到.

例如，式(1)的所有解可以通过对式(4)中的 c 赋值得到.从这个意义上讲，式(4)和式(7)分别为式(1)和式(6)的**通解**.通过给这些常数赋予特定值而得到的解称为**特解**.因此式(4′)和式(7′)分别为式(1)和式(6)的特解.另一方面，对非线性方程来说"通解"的概念失去了意义.即使能够找到一个包括 n 个任意常数的解，也可能会发现不能通过给常数赋值而得到的解.尽管在例 6.1 和 6.2 中容易证明这一点，我们还是通过例 6.3 再来说明一下.

【例 6.3】 考虑如下简单非线性方程：

$$\dot{x}(x) = f[x(t)] = -x(t)^3, x \in R, t \in R \tag{13}$$

容易得出

$$\phi(t) = |2(t+c)|^{-1/2}, t > -c \tag{14}$$

是一个解(其中 c 为任意常数).此外，对所有的 t，$\phi(t) = 0, t \in R$，也是式(13)的一个解，但是它不能通过给式(14)中的 c 赋值得到.我们还必须注意式(13)的解在给定初始条件(t^0, x^0)时仍然是惟一的.[7]

注：式(10)中的 f 的间断可以在 D 中的一些特定点上出现.如果 t^* 为这样的间断点，则必须分别对 $t < t^*$，$t > t^*$ 解方程.例如，考虑如下方程：

$$\dot{x}(x) = 1/t \tag{15}$$

该方程的解可以写成

$$\text{对 } t > 0, \phi(t) = \log t + c \tag{16a}$$

$$\text{对 } t < 0, \phi(t) = \log(-t) + c \tag{16b}$$

c 为任意常数.对应于两个开区间$(-\infty, 0)$和$(0, \infty)$存在两个解.我们可以回忆由定理 6.1(或定理 6.2)确定的一个微分方程的解必须是定义于一个特定开区间上的连续函数，使得对于在该区间上的所有 t 满足给定的方程.注意式(16)中的 $\phi(t)$满足这些性质，其中式(16a)、式(16b)中的 $\phi(t)$分别定义在区间$(0, \infty)$和$(-\infty, 0)$上，$t = 0$ 为间断点.[8]

§6.2 稳定性

考虑如下一阶(自控)微分方程组：

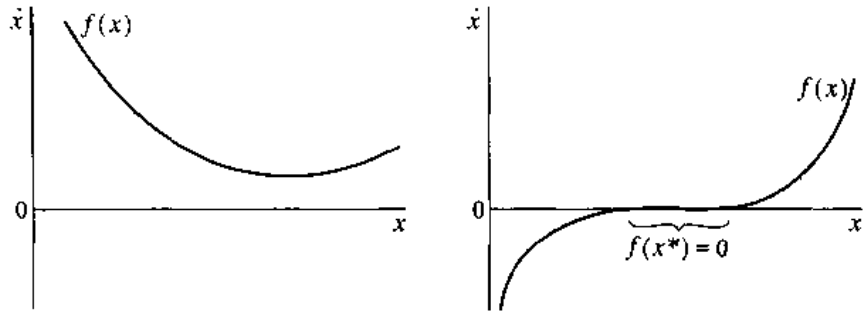
$$\dot{x}_i(t) = f_i[x_1(t), \cdots, x_n(t)], i = 1, \cdots, n \tag{17}$$

更简约地，$\dot{x} = f(x)$，f 为定义在R^n中开子集 D 上的连续可微函数，其中 t 属于开区间(a, b).令 x^0 为当 $t = t^0$ 时 x 的值，假定 $x^0 \in D$.我们记下通过$(t^0,$

x^0)的微分方程(17)的解为 $x(t;x^0)$,它关于 x^0 是连续的.[9]我们假定解 $x(t;x^0)$存在且惟一.

微分方程理论中一个重要的概念就是"稳定性",这是一个当 $t\to\infty$时,解
334 $x(t;x^0)$是否收敛于一个称为"平衡点"的特定点的问题,

【定义 6.1】 一个常向量 x^* 称为式(17)的一个平衡(点)或均衡(点),如果 $f(x^*)=0$,即 $f_i(x^*)=0, i=1,2,\cdots,n$,其中 x^* 是 x 静止($\dot{x}=0$)时的值.



(a) 均衡的不存在性　　(b) 非孤立均衡

图 6.2　平衡不存在和非孤立平衡

一般地,平衡点也许不存在,也就是说,也许不存在一个 x^* 使得 $f(x^*)=0$.图6.2(a)属于这种情况.进一步,当平衡点存在时,它也许不惟一.也许有不止一个 x^* 适合 $f(x^*)=0$.事实上,可以存在无穷多个平衡点.如果关于 x^* 存在一个领域,其中没有另外的平衡点,则 x^* 称为**孤立**平衡点.在非线性体系中,平衡点甚至可以不是孤立的.在图6.2(b)中,我们展示了有无穷多个非孤立平衡点的情况.

假定存在一个平衡点 x^*,它是孤立的,则我们可以定义下面的稳定性概念.

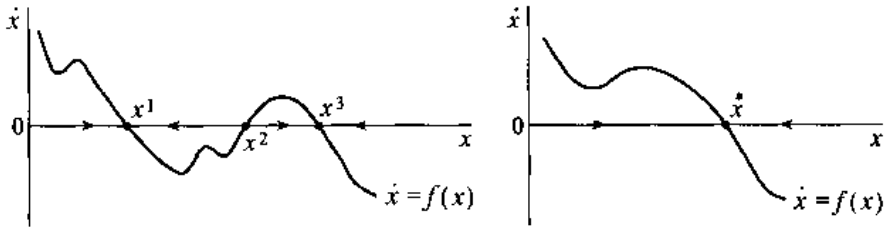
【定义 6.2】 如果当 $t\to\infty$时,初始时充分接近 x^* 的每个解均收敛于
335 x^*,即,随着 $t\to\infty$,对所有充分接近 x^* 的 x^0,$x(t;x^0)\to x^*$,我们称 x^* 是**(渐近)局部稳定**的.[10]

【定义 6.3】 如果当 $t\to\infty$时,所有解均收敛于 x^*,即当 $t\to\infty$时,不考虑初始点 x^0(或者与 x^0 是否接近 x^* 无关),$x(t;x^0)\to x^*$,我们称 x^* 是**(渐近)全局稳定的**.

显然,如果 x^* 是全局稳定的它也是局部稳定的,反之不成立.如果 x^* 不是局部稳定的,则称其是**不稳定的**.这些定义中的"渐近"一词在经济学文章中经常省略.[11]当从上下文中可以明显看出某一平衡点是全局还是局部稳定点时,我们通常省略全局或局部二词.

为简化论述,我们假定 x 为一标量,函数为实值函数($n=1$).稳定性概念图示于图 6.3.在图 6.3(a)中,存在三个孤立平衡点 x^1,x^2,x^3.从该图中容易发现点 x^1 和 x^3 是渐近局部稳定的,而 x^2 是不稳定的.注意,一个特定平衡点的稳定性,可以仅通过检查 $f'(x^i)$ 的符号来确定,其中 x^i 为该特定平衡点 $[f(x^i)=0]$.如果 $f'(x^i)<0$,则 x^i 是渐近(局部)稳定的,如果 $f'(x^i)>0$,则

它是不稳定的.在图6.3(a)中,$f'(x^1)<0, f'(x^2)>0, f'(x^3)<0$.另外注意除了平衡点以外的点的 $f'(x)$(即 $x\neq x^i$ 的 $f'(x)$的符号)的符号与决定平衡点 x^i 的稳定性无关,而在 $x=x^i$ 处的 $f'(x)$的符号起决定作用.如图 6.3(a)所示,$f(x)$曲线能够在平衡点外振荡($f'(x)$的符号也相应变化)而不影响它们的稳定性.在图6.3(b)中,x^* 为惟一的渐近全局稳定的平衡点.注意 $f'(x^*)<0$,对于 $x\neq x^*$ 时,$f'(x)$的符号不确定.



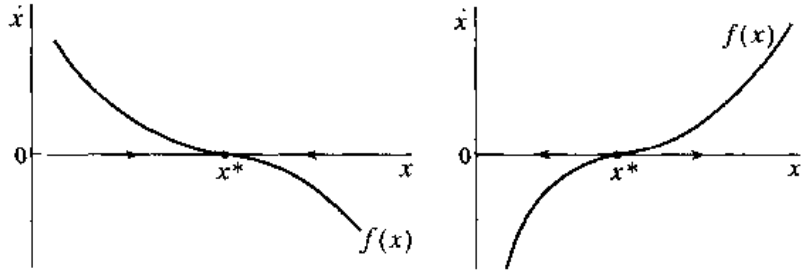
(a) 非惟一性与稳定性　　(b) 惟一性与全局稳定性

图 6.3　平衡点的非惟一性和稳定性

当 x 为一标量且 f 为实值函数时,我们易通过画类似于图 6.3 的图来确定平衡点的稳定性,这称为一维情况下的**相图(Phase Diagram)**.更特别地,通过画类似于图 6.3 的图,下列结论很明显.

【定理 6.3】 令 $\dot{x}=f(x), x\in R$,令 x^* 为一孤立平衡点.如果 $f'(x^*)<0$,则 x^* 是渐近局部稳定的;如果 $f'(x^*)>0$,则是不稳定的,其中 $f'(x^*)$是在 x^* 处赋值的 $f'(x)$.如果对所有使 $f(x^*)=0$ 的 x^*,$f'(x^*)<0$,则 x^* 是惟一的且渐近全局稳定的.

注意定理 6.3 只为稳定性提供了充分条件而非必要条件.因为当 $f'(x^*)=0$ 时,x^* 可以是稳定的也可以是不稳定的.这很容易从图 6.4 中看出,其中 $f'(x^*)=0$;在图 6.4(a)中 x^* 是渐近全局稳定的,而在图 6.4(b)中是不稳定的.



(a) 渐近稳定　　(b) 不稳定

图 6.4　$f'(x^*)=0$ 时稳定性

根据定理 6.3 容易获得如下推论.

【推论】 令 $\dot{x}=f(x), x\in R$,设 x^* 为一孤立平衡点,排除 $f'(x^*)=0$ 的"刀刃情况(knife-edge case)"的可能性,当且仅当 $f'(x^*)<0$ 时,x^* 是渐近局部稳定的.

回到式(17)的一般的 n 维情况,或与式(17)有关的线性体系,我们首先考虑函数 f 为线性的特殊情况.特别地,考虑如下齐次线性微分方程组

$$\dot{x}(t)=Ax(t) \tag{18}$$

337 其中 $A\equiv[a_{ij}]$ 为一 $n\times n$ 实数矩阵，我们假定 A 是非奇异的. 显然，原点 $x^*=0$ 是此方程组惟一的(因此孤立的)平衡点. 此外，正如在定理 6.2 中所说的，该方程的解 $x(t;x)$ 对所有的 t 总是存在的，给定初始条件 (t^0,x^0) 时它是惟一的.

假定该线性体系以非齐次的形式给出：

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+b \tag{19}$$

其中 A 同样非奇异且 b 为一常向量. 式(19)的平衡点得为 $x^*=-A^{-1}b$，这是惟一的(因此也是孤立的).

对于该体系，定义 $y(t)\equiv x(t)-x^*$，则式(19)可以记为

$$\dot{y}(t)=Ay(t) \tag{18'}$$

其形式与式(18)完全相同. 通过 $x=y-A^{-1}b$，式(19)的解的行为可以完全用式(18′)的解来描述，因此考虑式(18)或式(18′)就足以了解式(19)的性质. 式(18)的最简单的情况是当 A 为一标量($n=1$)时. 方程(4)提供了这样一个例子. 对于这种情况，式(18)的解(如先前讨论的)为

$$x(t;x^0)=x^0e^{A(t-t^0)} \tag{4'''}$$

338 由此，我们可以得出结论：当且仅当 $A<0$(忽略 $A=0$ 的"刀刃情况")时，平衡点 $x^*=0$ 是渐近全局稳定的. 显然，没有得到显式解(4‴)时，这种稳定性质也可以通过画相图得到.

为了研究非线性系统(17)的稳定性，研究其"线性对应者"通常是有用的. 令 x^* 为非线性系统(17)($\dot{x}=f(x)$)的一个孤立平衡点，由于 f 连续可微，我们得到

$$f(x)=f(x^*)+A(x-x^*)+o(\|x-x^*\|)$$

其中 $A\equiv[a_{ij}]$ 且 $a_{ij}\equiv\partial f_i(x^*)/\partial x_j$，$i,j=1,2,\cdots,n$，其中 $o(\cdot)$ 为 Landau 的 o(即当 $h\to0$ 时，$\lim o(\|h\|)/\|h\|=0$). 由于 x^* 为一平衡点，$f(x^*)=0$，可得

$$f(x)=A(x-x^*)+o(\|x-x^*\|)$$

如果初始点 x^0 和解 $x(t;x^0)$ 充分地接近 x^*，则可忽略该方程右边的第二项(这相当于忽略 Taylor 展开式中的二次或高次项). 因此，系统(17)可以"近似"为

$$\dot{x}=A(x-x^*) \tag{20}$$

我们称之为(17)关于 x^* 的**线性近似系统(LAS)**. 定义 $y(t)$ 为 $y(t)\equiv x(t)-x^*$，则式(20)简化为

$$\dot{y}(t)=Ay(t) \tag{20'}$$

这与式(18)在形式上相同.因此,式(20)的稳定性质可以通过检验齐次线性系统(18)的稳定性质的结果来研究.

定理6.4强调了线性近似系统在原非线性系统的稳定性质中所起的作用.

【定理6.4】(Liapunov) 如果x^*对系统(20)是渐近(全局)稳定,则x^*对原系统(17),$\dot{x}=f(x)$,是渐近局部稳定的.

339 也就是说,由定理6.4知,线性近似系统的稳定性为原系统的渐近局部稳定性提供了充分条件.[12]平衡点x^*称为**线性近似稳定**,如果它对其线性近似系统来说是渐近稳定的.毫无疑问,原系统可以包含不止一个平衡点.因此,定理6.4涉及原系统的孤立平衡点中的一个.

注意定理6.4的**逆定理**通常不正确.可能x^*是原系统(17)的一个稳定平衡点,却不是LAS(20)稳定平衡点.原系统的稳定性并不代表LAS的稳定性,例6.4有助于澄清这一点.

【例6.4】 考虑如下微分方程:

$$\dot{x}(t)=\frac{-1}{5}[x(t)-x^*]^3, x\in R \tag{21}$$

显然,如图6.5所示,x^*是惟一的全局稳定的平衡点.此外,注意式(21)的线性近似系统可以写成$\dot{x}=0$.由于对所有的t,$\dot{x}=0$时的解$x(t;x^0)$等于x^0且每当$x^0\neq x^*$时不趋近x^*,则x^*对$\dot{x}=0$不是一个渐近稳定平衡点.平衡点x^*不是线性近似稳定的.[13]

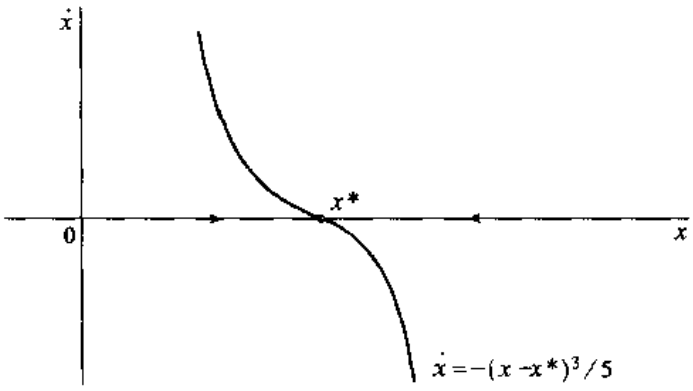


图6.5 $\dot{x}=-(x-x^*)^3/5$的稳定性

对于二维的情况($n=2$),以下结论是大家熟知而且非常有用的:

340 **【定理6.5】** 考虑线性系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

其中a_{ij}为常实数,假定系数矩阵非奇异.则(惟一)平衡点$x^*=0$(原点)是渐

近全局稳定的，当且仅当

$$a_{11}+a_{22}<0 \tag{22a}$$

和

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}>0 \tag{22b}$$

注意条件(22a)和(22b)分别确定了系数矩阵的迹和行列式的符号. 例 6.5 说明了定理 6.5.

【例 6.5】 考虑系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -1\\ -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

显然，该系统的平衡点是原点($x_1=x_2=0$). 因为

$$(-3)+(-1)=-4<0 \text{ 和 } (-3)(-1)-(-1)(-2)=1>0$$

341 满足条件(22a)和(22b)，因此由定理 6.5，原点(0,0)是渐近全局稳定的.

接下来，结合定理 6.4 和 6.5，我们可以获得二维非线性体系的局部稳定性结果(定理 6.6).

【定理 6.6】 考虑微分方程组

$$\dot{x}(t)=f[x(t)],x=(x_1,x_2)\in R^2$$

令 x^* 为该系统的一个孤立平衡点. 如果

$$a_{11}+a_{22}<0 \tag{22′a}$$

和

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}>0 \tag{22′b}$$

其中 $a_{ij}\equiv\partial f_i(x^*)/\partial x_j, i,j=1,2$，则 x^* 是渐近局部稳定的.

注意定理 6.6 只为平衡点的(渐近)**局部**稳定性提供了**充分**条件，而定理 6.5 为(惟一)平衡点的(渐近)**全局**稳定性提供了**充分必要**条件. 条件(22′a)表明 f 的雅可比矩阵的迹在 x^* 处为负，条件(22′b)表明该矩阵的行列式为正.

在 x^* 处赋值的 $f(x)$ 的雅可比矩阵记为

$$f'(x^*)=\begin{bmatrix}f_{11}(x^*) & f_{12}(x^*)\\ f_{21}(x^*) & f_{22}(x^*)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$$

其中 $f_{ij}=\partial f_i/\partial x_j, i,j=1,2$. 条件(22′a)和(22′b)可分别地称为**迹条件和雅可比行列式条件**. 对线性系统来说，系数矩阵不过是 $f(x)$ 的雅可比矩阵. 因此，条件(22′)对应于条件(22).

定理 6.6 只为局部稳定性提供了一个条件. 基于二维的情况，我们有全局稳定性的定理 6.7，这由 Olech(1962)提出.

【定理 6.7】(Olech 1962) 给定非线性系统

$$\dot{x}=f[x(t)],x=(x_1,x_2)\in R^2$$

如果

$$\text{对所有的 } x, f_{11}+f_{22}<0 \tag{23a}$$

$$\text{对所有的 } x, f_{11}f_{22}-f_{12}f_{21}>0 \tag{23b}$$

$$\text{对所有的 } x, f_{11}f_{22}\neq 0 \text{ 或者 } f_{12}f_{21}\neq 0 \tag{23c}$$

这里 $f_{ij}\equiv \partial f_i(x)/\partial x_j, i,j=1,2.$

则其平衡点 x^* 是渐近全局稳定的.[14]

注:

(i) 定理 6.6 中的 a_{ij} 为在 x^* 赋值的 f_{ij} 的值. 显然,条件(22′a)和(22′b)为条件(23a)和(23b)的"局部"版本.

(ii) 注意定理 6.6 和 6.7 都只为稳定性提供了充分条件. 因此,即使在违反这些条件的情况下平衡点也可能是稳定的.

对于 n 维线性系统,我们有如下结论:

【定理 6.8】 考虑常系数线性系统

$$\dot{x}(t)=Ax(t), x(t)\in R^n$$

其中 $A=[a_{ij}]$ 为一具实数项的 $n\times n$ 矩阵. 则其平衡点 $x^*=0$(原点)是渐近全局稳定的,**当且仅当** A 的任何特征值的实部为负.

如果 A 对称且为负定的,则 A 的任何特征值是负实数. 因此,定理 6.8 中 $x^*=0$ 的稳定性的充分条件是 A 对称且为负定的. 现在我们希望得到使一个任意 $n\times n$ 矩阵的所有特征值均有负实数的条件. 有一个决定条件,这就是著名的 **Routh - Hurwitz 定理**. 它处理特征方程的根,即特征值.

【定理 6.9】 一个**充分必要**条件是实系数方程

$$a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots a_{n-1}\lambda+a_n=0$$

的所有根均有负实数,它进一步成立的条件是**当且仅当**

$$a_1>0, \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}>0, \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}>0, \cdots,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & \cdots \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}>0 \tag{24}$$

这里,取 a_0 为正(如 $a_0<0$ 则将方程乘以 -1),条件(24)称为 **Routh - Hurwitz**

条件.

定理 6.9 的作用在于当它与定理 6.8 结合起来后，为线性系统的稳定性提供了**充分必要**条件.为说明这一点，令 $n=2$，系数矩阵给定为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

该矩阵的特征方程可得为

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

其中 $a_1 = -(a_{11}+a_{22})$，$a_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.由于 $a_0 = 1$，$n=2$ 的情况下的 Routh - Hurwitz 条件根据(24)可得为

$$a_1 > 0, a_1 a_2 > 0 \tag{24'}$$

这相当于 $a_1 > 0$ 且 $a_2 > 0$.因此，条件(24′)可以等价地重写成

$$a_{11} + a_{22} < 0 \text{ 和 } a_{11}a_{21} - a_{12}a_{21} > 0$$

这与二维线性系统的稳定性条件(22)毫无差别.

344 当 $n=3$ 时，Routh - Hurwitz 条件变为

$$a_1 > 0, a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) > 0$$

由于 $a_0 > 0$，易将其改写成为如下的等价形式

$$a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \tag{24''}$$

当 $n \geqq 4$ 时，除非我们使用计算机，否则 Routh - Hurwitz 条件的计算将会非常冗长乏味.这经常导致在理论应用中失去使用 Routh - Hurwitz 条件的勇气.

假设我们用非线性系统取代线性系统

$$\dot{x}(t) = f[x(t)]，\text{其中 } x(t) \in R^n$$

在这种情况下，通过使用定理 6.4、6.8 和 6.9，可以获得一个(孤立)平衡点是渐近局部稳定的充分条件.特别地，关于一个(孤立)平衡点 x^* 对该系统线性化后得到如下线性近似系统：

$$\dot{x}(t) = A[x(t) - x^*]$$

其中 $A = [a_{ij}]$ 和 $a_{ij} \equiv \partial f_i(x^*)/\partial x_j$，$i, j = 1, 2, \cdots, n$.然后，计算矩阵的特征方程并检验 Routh - Hurwitz 条件.该条件将为线性近似系统的稳定性提供充分必要条件并给原系统提供充分(但非必要)条件.正如前面提出的，原系统的稳定性并不需要其线性近似系统同时也稳定.由于文中在这一点存在一点混淆，故应该着重提出.这种情况尤其体现在当研究者希望运用 Samuelson (1947)的"对应原理"去分析比较静态学问题时.类似地，Routh - Hurwitz 条件通常不给原非线性系统的(局部)稳定性提供必要条件.因此，与通常的实践相

反，Routh－Hurwitz条件不能用于确定比较静态学的结论.

只有当我们知道原非线性系统稳定性的必要条件(如一维情况下的定理6.3的推论)时，才能使用这样一个稳定性条件的信息去确认方程参数变动对
345 均衡点的影响.对于二维的情况，下一章中的定理7.10提出了一种条件，在这种条件下线性近似系统的稳定性标准对原系统来说是必要的.

§6.3 经济应用

6.3.1 竞争性均衡的稳定性：瓦尔拉斯过程[15]

令 x_i 表示第 i 种商品($i=1,2,\cdots,n+1$)的市场超额需求.如果 D_i 和 S_i 分别代表第 i 种商品的市场需求和市场供应，则 $x_i\equiv D_i-S_i$.令 P_i 为第 i 种商品($i=1,2,\cdots,n+1$)的价格，假设 x_i 只取决于 P_i，这里

$$x_i=F_i(P_1,P_2,\cdots,P_n,P_{n+1}),\ i=1,2,\cdots,n+1 \tag{25}$$

或更简约地，$x=F(P)$，其中 $x=(x_1,\cdots,x_{n+1})$，等等.为了体现瓦尔拉斯和马歇尔稳定性之间的区别，(见后面的注释[40])，我们假定 D_i 取决于 P，但对每个 i，S_i 为常数.一个**竞争性均衡**可以定义为

$$F_i(P_1^*,\cdots,P_n^*,P_{n+1}^*)=0,\ i=1,\cdots,n+1 \tag{26}$$

或更简约地，$F(P^*)=0$.式(26)中($n+1$)个方程决定了($n+1$)种价格 P_1^*，$\cdots,P_{n+1}^*$的均衡值.假定存在一个 $P^*>0$，使得 $F(P^*)=0$.

另一方面，市场对所有商品的超额需求的价格加权和必须恒等于0，即

$$P_1F_1(P)+\cdots+P_nF_n(P)+P_{n+1}F_{n+1}(P)\equiv 0 \tag{27}$$

式(27)通过对经济主体(消费者、生产者、资源持有者)的预算条件进行相加而得到，这称为**瓦尔拉斯法则**.这样式(26)中的一个方程变得多余了，因此方程
346 的数目将少于变量的数目.然而，只需注意每种商品的超额需求函数对所有价格是(正)零次齐次性的，我们便避开了这一问题.[16]

现令 $p_i\equiv P_i/P_{n+1}$，$i=1,2,\cdots,n$，我们可以定义函数 f_i 为

$$f_i(p_1,p_2,\cdots,p_n)\equiv F_i(p_1,p_2,\cdots,p_n,1),\ i=1,2,\cdots,n$$

第($n+1$)种商品称为**一般等价物**.借助 f_i，竞争性平衡可以定义为

$$f_i(p_1^*,p_2^*,\cdots,p_n^*)=0,\ i=1,2,\cdots,n \tag{28}$$

或更简约式，$f(p^*)=0$.假定式(28)中的 n 个方程决定价格的 n 个均衡值 $(p_1^*,\cdots,p_n^*)$.假定存在 $p^*>0$，使得 $f(p^*)=0$，我们称之为(**标准化**)**均衡价**

格向量. 如果 p 不是均衡价格向量，则对部分或全部 i，$f_i(p)\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$. 对 $(n+1)$ 种商品的超额需求的值 x_{n+1} 可通过式(27)得到.

$$x_{n+1}=\cdot[p_1f_1(p)+p_2f_2(p)+\cdots+p_nf_n(p)] \tag{27'}$$

注意到如果 p^* 为一均衡价格向量，则式(27′)说明 $x_{n+1}=0$. 换句话说，如果前面的几个市场是均衡的，则第 $(n+1)$ 个市场自动均衡.

竞争均衡的**(瓦尔拉斯)稳定性问题**是关于当价格向量 p 偏离平衡点 p^* 时是否会回到 p^*. 研究该问题的首要前提是第 i 种商品的超额需求将导致商品价格上升，第 i 种商品过剩供应将导致价格降低. 根据萨缪尔森(1947)对瓦尔拉斯稳定性问题的重新规定，我们可以用如下微分方程组来指定这样一个基本前提.[17]

$$\dot{p}_i(t)=k_if_i[p_1(t),p_2(t),\cdots,p_n(t)],i=1,2,\cdots,n \tag{29}$$

347 其中 $\dot{p}_i$ 代表 p_i 对时间(用 t 表示)的导数，k_i 代表第 i 个市场的**调整速度**(其中 k_i 假定为正常数). 令上述系统的初始条件为 $t=0$ 时 $p=p^0$，记方程组的解为 $p(t;p^0)$. 我们假定 $p(t,p^0)$ 存在且惟一，$f(p^*)=0$，p^* 为方程组(29)的一个孤立平衡点. 则一个竞争性均衡的稳定性问题可以表述如下：

给定一个 p^*，使得 $f(p^*)=0$，当 $t\to\infty$ 时，$p(t;p^0)$ 会趋近于 p^* 吗?

当我们允许 p^0 存在于 p^* 的一个邻域时，该问题变成了微分方程组的一个渐近局部稳定性问题，如果 p^0 不局限于 p^* 的领域，则该问题为渐近全局稳定性问题.

为简化论述，首先假定商品数等于 2(如“农产品”和“工业品”或者“出口商品”和“进口商品”)，其中第二种商品指定为一般等价物. 然后令 $f_1=f$，式(29)简化为

$$\dot{p}(t)=kf[p(t)],p\equiv P_1/P_2 \tag{30}$$

其中 p 为一标量. 令 p^* 为两种商品的一个(孤立)均衡价格比，$f(p^*)=0$. 则稳定性问题与图 6.3 和 6.4 中描述的情况类似，这些图中的 x 被 p 代替. 因此，我们可以立即得到如下结果.[18]

348 **【命题 6.1】** 在非负均衡的两个商品体系中，假定排除刀刃情况 $f'(p^*)=0$，当且仅当 $f'(p^*)<0$ 时，p^* 是渐近局部稳定的. 如果对任何使 $f'(p^*)=0$ 的 p^*，$f'(p^*)<0$，则 p^* 是惟一的渐近全局稳定点.

注：$f'(p)<0$ 表明，相对于商品 2 的价格提高，商品 1 将降低超额需求.[19]如果这在 p 的相关范围成立，则均衡价格比(假定它存在)是惟一且渐近全局稳定的.

注：两种商品体系的假定广泛应用于许多关于经济发展、国际贸易、政府财政等的研究中. 在一般均衡框架下，它被认为是突出了特定经济问题的重要

方面的有用假定.三种商品体系的情况包含了有趣的分析问题,我们将其推迟至本章的末尾来讨论它.

对于一般 n 商品体系,可以将式(29)改写成

$$\dot{p}(t)=Kf[p(t)] \tag{29'}$$

其中 K 为 $n\times n$ 对角矩阵,该矩阵的第 i 个对角元素 $k_i>0$. 令 p^* 为其孤立均衡点.则(29)或(29)′的线性近似体系可以写成

$$\dot{p}=KA(p-p^*) \tag{31}$$

其中 $A=[a_{ij}]$, $a_{ij}\equiv\partial f_i(p^*)/\partial p_j$, $i,j=1,2,\cdots,n$. 则局部稳定性问题化解为矩阵 A 的性质,这又与 Hicks(1939,1946)的关于稳定性的研究有关.实际上,Hicks 的"完美稳定性"条件是根据 A 的主子式符号的交替来加以表述的.萨
949 缪尔森(1947)证明该条件在 n 种商品的情况下既不是动态系统(31)稳定性的必要条件也不是其充分条件.在《计量经济学》1958 卷中,Hahn,Negishi 与 Arrow 和 Hurwicz 独立地证明如果对 $i\neq j$, $a_{ij}>0$,则 p^* 是线性系统(31)的一个渐近全局稳定均衡点.这表明 p^* 是式(29)的一个渐近局部稳定均衡点.[20]

1959 年,Arrow、Block 和 Hurwicz 获得了一个关于稳定性的主要结论:如果对所有的 p 和所有 $i\neq j$, $f_{ij}(\equiv\partial f_i/\partial p_j)>0$,则 p^* 对式(29)是渐近全局稳定均衡的.该假定可称为**全局总可替代性**,[21]与之相对的假定是 $a_{ij}\equiv\partial f_i(p^*)/\partial f_j>0$, $i\neq j$,称为**局部总可替代性**.[22]尽管 Arrow-Block-Hurwicz 结论具有里程碑似的性质,但对所有商品的总可替代性的假定对 n 种商品体系来说太严格,许多试图放宽该假定的尝试已经提出.由于大多数努力都不很成功,所以注意力又转移至一种算法以找到均衡价格向量(见,Scarf 1974;Eaves 和 Scarf 1976;Scarf 1982). Hirota(1981)的工作在这一方面是一个显著例外.

6.3.2 宏观经济均衡的稳定性[23]

850 **凯恩斯体系** 著名的"凯恩斯"(IS-LM)宏观均衡体系可以表述如下:[24]

$$Y^*=E(Y^*-T,r^*)+G,\ M/p=L(Y^*,r^*) \tag{32}$$

其中 Y=产出, r=利率, E=消费(C)加上投资(I), G=政府支出, T=税收减去转移支付(净税收), M=货币供给, p=价格水平, L=货币需求.这里 G、T、M 和 p 假设是固定的.该体系的动态调节方程可以写成

$$\dot{Y}=a[E(Y-T,r)+G-Y]\equiv f(Y,r) \tag{33a}$$

$$\dot{r}=b[L(Y,r)-M/p]\equiv g(Y,r) \tag{33b}$$

其中 a 和 b 为正的常数,代表各个市场的调节速度. 显然满足式(32)的(Y^*, r^*)是微分方程组(33)的均衡点. 容易看出,IS 和 LM 曲线的交点代表点(Y^*, r^*).

为便于分析,我们加上如下("通常")假定:

$$\text{对所有}(Y,r),0<E_Y<1,E_r<0,L_Y>0,L_r<0 \tag{34}$$

其中 $E_Y \equiv \partial E/\partial(Y-T)$, $E_r \equiv \partial E/\partial r$,等等. 在这种假定下,曲线 IS 以通常的方式向下倾斜而 LM 曲线则向上倾斜,因此均衡点(Y^*, r^*),假定它存在,是惟一的. 使用式(34),我们可以计算出(f,g)的雅可比行列式为:对所有(Y, r),

$$f_Y = a(E_Y - 1) < 0, f_r = aE_r < 0$$

351

$$g_Y = bL_Y > 0, g_r = bL_r < 0 \tag{35}$$

这里 $f_Y \equiv \partial f/\partial Y$, $f_r \equiv \partial f/\partial r$,等等. 由此我们易观察到

$$\text{对所有}(Y,r), f_Y + g_r < 0 \tag{36a}$$

$$\text{对所有}(Y,r), f_Y g_r - f_r g_Y > 0 \tag{36b}$$

$$\text{对所有}(Y,r), f_Y g_r \neq 0, f_r g_Y \neq 0 \tag{36c}$$

因此,定理 6.7(Olech 定理)的所有假定均被满足,这样我们获得以下的结论.[25]

【命题 6.2】 在由非线性系统(33)定义的调节过程下,(32)的"凯恩斯"宏观均衡点(Y^*, r^*)是渐近全局稳定的.

新古典体系. 新古典体系可以解释为在 Y 保持不变,比如说在充分就业的情况下,p 波动从而导致均衡. 可能有以下两类调节机制:

【类型 1】

$$\dot{p} = a[E(Y-T,r) + G - Y] \equiv \Phi(p,r) \tag{37a}$$

$$\dot{r} = b[L(Y,r) - M/p] \equiv \Psi(p,r) \tag{37b}$$

【类型 2】

$$\dot{r} = a[E(Y-T,r) + G - Y] \equiv \varphi(r,p) \tag{38a}$$

352

$$\dot{p} = -b[L(Y,r) - M/p] \equiv \psi(r,p) \tag{38b}$$

这里 $E + G - Y = (I + G - T) - (Y - T - C)$. 方程(37a)表明对商品和服务的超额需求(或者供给)使价格上扬(或者下降),而方程(37b)描述通常的借助于货币和债券之间的资产选择而实现的凯恩斯调节过程. 方程(38a)可以被一个假设所证实,这个假设是如果对于"信用"或者贷款($= I + G - T$;即私人投资加上政府预算赤字)的新的信贷资金的需求减去新的可贷资金的供给($= Y - T - C$ = 储蓄)为正值(或为负),则利率上升(或下降).[26]该过程可与**古典信贷资金理论**相联系. 另一方面,方程(38b)可以被如下假定所证实,该假定是现金余额的超额供给(或者需求)将减少(或增加)"货币价值"($1/p$),因

353 此使 p 增大(或减少),其中 p 为商品和服务相对于货币的价格.[27]然而,实际的调节过程也许是这两类过程的复合体.

又假定 $E_r<0$ 和 $L_r<0$,我们可以确定 1 类和 2 类调节过程的雅可比矩阵的元素符号如下:

【类型 1】

$$\Phi_p=0,\Phi_r=aE_r<0$$
$$\Psi_p=bM/p^2>0,\qquad \Psi_r=bL_r<0 \tag{39}$$

【类型 2】

$$\varphi_r=aE_r<0,\qquad \varphi_p=0$$
$$\psi_r=-bL_r>0,\qquad \psi_p=-bM/p^2<0 \tag{40}$$

因此,我们有

$$\begin{bmatrix}\Phi_p & \Phi_r\\ \Psi_p & \Psi_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -\\ + & -\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}\varphi_r & \varphi_p\\ \psi_r & \psi_p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}- & 0\\ + & -\end{bmatrix} \tag{41}$$

第一类新古典体系的均衡点可以定义为

$$\Phi(p^*,r^*)=0 \text{ 和 } \Psi(p^*,r^*)=0$$

而第二类新古典体系的均衡点可以定义为

$$\Phi(\hat{r},\hat{p})=0 \text{ 和 } \Psi(\hat{r},\hat{p})=0$$

通过式(41),我们可以断定 1 类过程的均衡点(p^*,r^*)和 2 类过程的均衡点$(\hat{r},\hat{p})$都是惟一的(假定它们存在).同样,通过式(41),容易断定两类调
354 节过程均满足定理 6.7(Olech)的所有三个条件.因此可得命题 6.3 中的结论.

【命题 6.3】

(i) 1 类调节过程的均衡点(p^*,r^*)是渐近全局稳定的.

(ii) 2 类调节过程的均衡点$(\hat{r},\hat{p})$也是渐近全局稳定的.

如以前提到的,调节过程(38a)可以与古典信贷资金理论相联系.严格说,这并不正确.更确切地,对新的信贷资金的超额需求(F)可以写成

$$F\equiv[I+(G-T)]-[(Y-T-C)+(M/p-L)] \tag{42}$$

其中,C=消费,I=投资,T=税收减去转移支付,$M/p-L$=实际现金余额的过剩供给.为说明式(42)的意义,我们使用 Akerlof(1973 年)的解释,他假定公共储蓄$(Y-T-C)$专门用于提高其证券持有量,货币的过剩供给$(M/p-L)$立即转化为对证券的需求(因此没有储蓄或$[M/p-L]$用于购买证券).因此对新的信贷资金的总供给等于储蓄加上$(M/p-L)$,即$(Y-T-C)+(M/p-L)$,其中 Akerlof(1973)称$(M/p-L)$为"证券转移".Akerlof 假定公

司的投资(I)只通过发行证券来融资,政府全部预算赤字($=G-T$)通过印刷债券来融资.因此,对新的信贷资金的总需求等于 $I+(G-T)$.总之,新的信贷资金的超额需求可以写成式(42)定义的形式.尽管 Akerlof 使用的所有这些假设对获得式(42)的解释并不是必要的(见 Drabicki 和 Takayama 1979),但有助于提供对式(42)的有用解释.

同忆 $E\equiv C+I$,将(42)改写成

$$F\equiv E+G+(L-M/p)-Y \tag{43}$$

假设 $\dot{r}=aF$,其中 a 为信贷资金市场的调节速度,我们有

$$\begin{aligned}\dot{r}&=a[E(Y-T,r)+G+L(Y,r)\cdot M/p \quad Y]\\ &\equiv\varphi(r,p)\end{aligned} \tag{44}$$

355

与式(38a)比较,它为调节过程提供了一个更精确的表达.为完成上面的讨论,我们使用调节过程(38b)描述 p 的运动如下:

$$\dot{p}=-b[L(Y,r)-M/p]\equiv\tilde{\psi}(r,p) \tag{45}$$

式(44)和(45)所描述的调节过程可称为"修正的类型 2 新古典过程".

该过程的雅可比矩阵的元素符号可以确定为,对所有的(r,p),

$$\begin{aligned}&\tilde{\varphi}_r=a(E_r+L_r)<0,\tilde{\varphi}_p=aM/p^2>0\\ &\tilde{\psi}_r=-bL_r>0,\tilde{\psi}_p=-bM/p^2<0\end{aligned} \tag{46}$$

修正的类型 2 过程的均衡点仍用$(\hat{r},\hat{p})$表示,定义为

$$\tilde{\varphi}(\hat{r},\hat{p})=0 \text{ 和 } \tilde{\psi}(\hat{r},\hat{p})=0$$

根据式(46),结合 Olech 的定理,易得命题 6.3′.

【命题 6.3′】 假定其存在,修正的 2 类过程的均衡点$(\hat{r},\hat{p})$惟一且渐近全局稳定.

6.3.3 新古典增长模型

由 Solow(1956)[28]和 Swan(1956)提出的著名的新古典增长模型考虑了一个生产单一投资——消费商品的经济.该经济可以由如下五个方程来描述,其中为简化忽略了政府部门和折旧.该方程组有如下方程:

$$Y=C+I \tag{47a}$$

$$Y=F(N,K) \tag{47b}$$

356

$$\dot{K}=I \tag{47c}$$

$$\dot{N}/N=n \tag{47d}$$

$$C=(1-s)Y \tag{47e}$$

其中，Y=产出，C=消费，I=投资，F=生产函数，N=劳动，K=资本，s=储蓄倾向.

方程(47a)假定商品市场的均衡，(47b)指定总量生产函数，(47d)假定人口或劳动力的恒定增长率，(47e)假定产出的一个固定部分被用于储蓄. 方程(47b)和(47d)中使同一符号(N)的事实表示劳动力充分就业，而在方程(47b)和(47c)中使用相同的符号(K)表示资本的充分使用. 方程组(47)中忽略了资本折旧，至少是在它的显形式上. 方程组(47)追求的是充分就业均衡增长途径的行为.

假定规模收益不变，(47b)可以改写为

$$y=f(k)\equiv F(1,k)，其中\ y\equiv Y/N\ 和\ k\equiv K/N \tag{48}$$

又假定对所有的 k，

$$f'(k)>0, f(k)-kf'(k)>0, f''(k)<0 \tag{49a}$$

$$f(0)=0, f'(0)=\infty 和\ f'(\infty)=0. \tag{49b}$$

容易得出 $f'=\partial F/\partial K$(资本的边际产品)和 $f-kf'=\partial F/\partial N$(劳动的边际产品)，以及当且仅当$\partial^2 F/\partial K^2<0$ 和$\partial^2 F/\partial N^2<0$ 时，$f''<0$.

通过方程(47a)、(47b)、(47c)和(48)，可以看出

$$f(k)=Y/N=(C+I)/N=C/N+\dot{K}/N$$

另一方面，通过 $k\equiv K/N$ 和(47d)，有 $\dot{k}=\dot{K}/N-nk$. 因此我们得到

$$\dot{k}=f(k)-c-nk，其中\ c\equiv C/N \tag{50}$$

这是新古典总量增长模型的基本方程式. $\dot{k}=0$ 的路径称为**稳态**. 从方程(47a)、(47c)、(47d)、(48)和(50)可看出沿着稳态，N、K、Y、C 和 I 均以相同的速率 n 增长. 因此稳态又称为**平衡增长路径**.

357

在 Solow－Swan 模型中，施加了(47e)形式指定的需求条件，模型就完整了. 换句话说，结合方程(50)和(47e)，可得

$$\dot{k}=sf(k)-nk\equiv\varphi(k) \tag{51}$$

这是 Solow－Swan 新古典增长模型的基本微分方程. 通过设定方程(51)中 $\dot{k}=0$，可得该系统的(正)均衡点 k^* 满足下述方程：

$$sf(k^*)=nk^* \tag{52}$$

令 $k(t;k^0)$为微分方程(51)的解，其中 k^0 为 $t=t^0$ 时 k 的值. 假设条件

$$\varphi'(k^*)=sf'(k^*)-n<0 \tag{53}$$

在当 $k^*>0$ 时总满足. 回忆定理 6.3，存在一个惟一的 $k^*>0$ 是渐近全局稳定的：即，不论 k^0 为何值(只要 $k^0>0$)，当 $t\to\infty$ 时，$k(t;k^0)\to k^*$(其中 $k^*>$

0). 条件(53)可称为 **Solow－Swan 条件**，稳态 k^* 可称为 **Solow－Swan 路径**.

一个惟一 $k^*>0$ 具渐近全局稳定的存在性，易用图解表示出来，其中 Solow－Swan 条件(53)在(49)下满足. 图 6.6(a)在条件(49)下，$k^*>0$ 惟一存在，我们注意到条件(53)已被满足. 图 6.6(b)为当前动态系统的相图. 这说明了 k^* 的稳定性. 从图中，可以清楚地看出，如果 $k^0<k^*$，则 K 随时间变化而上升；如果 $k^0>k^*$，则 k 随时间变化而减少，其中 k^0 假定为正. 如果 $k^0=k^*$，则 k 保持在 k^0. 不论初始值 $k^0>0$ 为何值，当 $t\to\infty$ 时，$k(t;k^0)$ 趋近于 k^*. 因此，我们可得知如下结果：

【命题 6.4】(Solow, Swan) 在当前模型的限定下，存在一个惟一的 $k^*>0$，只要 $k^0>0$，它是渐近全局稳定的.

注：简单地将经济部门的数目从一增加到二，命题 6.4 良好的稳定性就会破坏. 这一点分别由 Uzawa(1961)和 Takayama(1963)独立发现. 这个论述的
358 要点总结于 Takayama(1972，第 65－68 页).

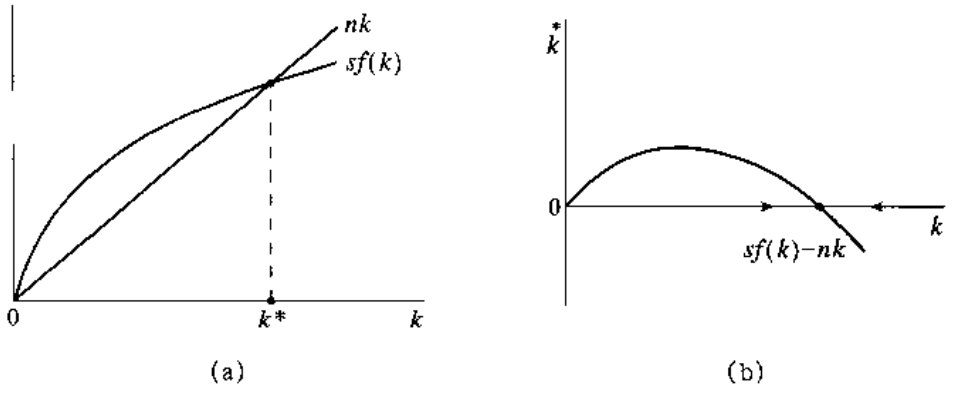


图 6.6 Solow－Swan 增长模型

6.3.4 关于 Phillips 曲线

60 年代以来，通货膨胀率和失业率之间似乎存在的规律性联系引起了人们的浓厚兴趣. 这种讨论的焦点是附加预期的“Phillips 曲线”关系

$$\pi=f(u)+\alpha\pi^e,\ f'<0(\text{并且通常 } f''<0) \tag{54}$$

其中，π－实际通货膨胀率，u＝失业率，π^e＝预期通货膨胀率，α 为正的常数. $f(u)$项体现了最初的 Phillips 曲线关系(Phillips, 1958)的精神，其中 $f'<0$ 象征价格稳定性和低失业率之间的“替代”关系(即，由于 $f'<0$，降低 u 必然会增加 π). 项 $\alpha\pi^e$ 体现了由于对通货膨胀率预期的变化而产生的 Phillips 曲线的整体的偏移. 60 年代末以后，项 $\alpha\pi^e$ 的作用已得到强调.[29] 预期通胀率(π^e)一旦变化，我们就得到一条不同的 Phillips 曲线. 它显示在图 6.7 中，其中[$\pi=f(u)$]曲线代表对应于 $\pi^e=0$ 的曲线.

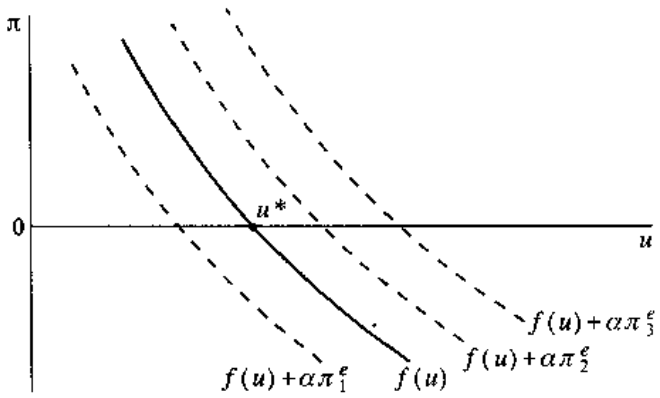


图 6.7　附加预期的 Phillips 曲线

关于预期公式的形成机制，我们假设如下**适应性预期公式**：[30]

$$\dot{\pi}^e = \beta(\pi - \pi^e) \tag{55}$$

其中 β 为正的常数.这表明如果实际通胀率超过预期值($\pi > \pi^e$)，则预期将被
359 修改以提高预期率($\pi^e > 0$).相反，如果 $\pi < \pi^e$，则 $\dot{\pi}^e < 0$，预期将被修改以降低预期率.现在假设政府实施了一个试图将失业率维持在一个特定目标水平 $\overline{u}$ 的政策，并进一步假设该政策是成功的.为研究这种政府行为的内含，我们设 $u = \overline{u}$，关于时间 t 微分式(54)，得

$$\dot{\pi} = \alpha\dot{\pi}^e$$

依次回顾式(55)和式(54)，可以观察到

$$\dot{\pi} = \alpha\dot{\pi}^e = \alpha(\beta\pi - \beta\pi^e)$$

$$= \beta\{\alpha\pi - [\pi - f(\overline{u})]\} = \beta[f(\overline{u}) - (1-\alpha)\pi]$$

因而可得

$$\dot{\pi} = \beta[f(\overline{u}) - (1-\alpha)\pi] \tag{56}$$

设 $\dot{\pi} = 0$，令 π^* 为所得的 π 的值.π^* 可从下式获得：

$$(1-\alpha)\pi^* = f(\overline{u}) \tag{57}$$

微分方程(56)的解 $\pi(t;\pi^0)$ 的动态行为(π^0 为 π 的初值)和均衡率 π^* 的存在关键依赖于 α 和 1 的相对大小.如果 $\alpha = 1$，则 π^* 根本不存在，除非 $f(\overline{u}) = 0$.因此，如果我们以式(54)的形式接受了 Phillips 曲线关系，α 的大小将变得非常重要.60 年代末，发表的许多研究都试图经验地确定 α 的大小.[31]

许多早期研究认为 α 为介于 0 和 1 之间的分数，即 $0 < \alpha < 1$.此时，π^* 惟一存在且渐近全局稳定的.当 $t \to \infty$ 时，不论初值 π^0 为何值，$\pi(t;\pi^0)$ 的值趋
361 近 $\pi^* \equiv f(\overline{u})/(1-\alpha)$.这在图 6.8 中得到解释.从图中可以清楚地看出，如

果 $\pi(t;\pi^0)<\pi^*$，则 $\dot{\pi}>0$，π 随时间增加；反之，如果 $\pi(t;\pi^0)>\pi^*$，则 $\dot{\pi}<0$，π 随时间减少. 当 $\pi=\pi^*$，根据式(56)，$\dot{\pi}=0$，因此 $\dot{\pi}^e=0$(由于 $\dot{\pi}=\alpha\dot{\pi}^e$). 通过式(55)，进一步推出 $\pi=\pi^e$(=常数). 通胀率被准确预报的这种状态在文献中称为长期状态.

Friedman(1968)极力倡导 α 的值在理论上一定等于 1.[32]这也与 Phelps (1967)的论点相一致. $\alpha=1$ 的观点现在已经得到许多经济学家的支持.(我们还要注意在 70 年代和 80 年代的经验对"Phillips 曲线"的确切存在提出了怀疑).[33]在任何情况下，如果 α 的确等于 1，从式(54)可得出如下重要结论：在实际通胀率可以正确预期的情况下($\pi=\pi^e$)，失业率 u 为常数，而与通胀率无关. u 的这样一个值易从式(54) $f(u^*)=0$ 得出，称这个 u^* 为**自然失业率**.[34]

362 在长期环境下($\pi=\pi^e$)，失业率独立于通胀率. 相反，给定 Phillips 曲线关系(54)，该观点(即 $\pi=\pi^e$ 时，$f(u^*)=0$)必然推出 $\alpha=1$. 该观点的基础 $\alpha=1$ 可以解释如下，在长期中，货币现象的一个变化如通胀率的变化对实际现象如失业率没有影响.[35]

设(56)中的 $\alpha=1$，可得

$$\dot{\pi}=\beta f(\overline{u}) \tag{56'}$$

然而，根据 $f'<0$，可得

$$f(\overline{u})\gtrless 0 \text{ 取决于是否 } \overline{u}\lesseqgtr u^*$$

这样，(56′)中我们可立即得出结论：如果 $\overline{u}<u^*$，通胀率 π 随时间变化将无限增长；如果 $\overline{u}>u^*$，π 将无限减少.[36]如果政府能够成功地将失业率维持在其目标水平 $\overline{u}$，且如果 $\overline{u}$ 与自然率 u^* 不同，则经济将面对通货膨胀率或者通货紧缩率的持续增加. 相信这种观点的人称为**加速论者**.[37]

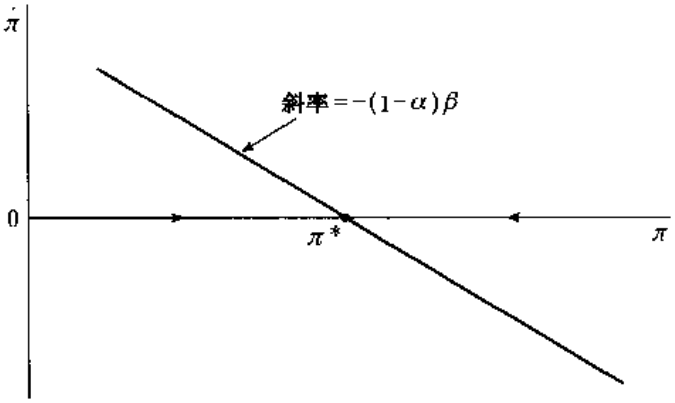


图 6.8　$0<\alpha<1$ 时(55)的相图

总之，我们得到命题 6.5 中的结论.

【命题 6.5】 假设 Phillips 曲线关系(54)和适应性预期机制(55)成立，进

363 一步假定政府成功地将失业率维持在目标水平 $\overline{u}$，则

(i) 如果 $0<\alpha<1$,存在一个惟一的均衡通胀率 $\pi^*=f(u)/(1-\alpha)$,它是渐近全局稳定的.

(ii) 如果 $\alpha=1$,保持失业率($\overline{u}$)低于正常值(u^*)的惟一方法是持续提高通胀率,其中失业率由 $f(u^*)=0$ 决定.

由式(55)给出的适应性期望机制随后遭到了攻击."理性预期方法"却得到了有力的倡导.后者认为个人的预测应与模型的预测相一致(即预期是内在
364 实现的).[38]虽然适应性预期的弱点很明显,[39]如果我们能够在 Frank Knight 的意义下区分"不确定性"与"风险",如果我们相信"不确定性"是这个世界的特点,π 和 u 之间相反的关系仍然是可以接受的.事实上,这看起来是以 Milton Friedman 为代表的"货币主义Ⅰ"的观点.关于两类货币主义之间区别的精彩论述见 Hoover(1984).正如 Hoover 指出的,在经济主体对将来的无知这一点上,"货币主义Ⅰ"和"货币主义Ⅱ"之间存在重要区别(也见 Takayama, 1986).然而,如果我们根据 Von Neumann－Morgenstern 公理认为风险和不确定性之间事实上没有区别,货币主义Ⅱ也许更有意义,尽管它离现实经验更远.

两种货币主义之间的关键区别在于 Fredman 倡导通胀率和失业率之间的"短期"替代关系,但不允许长期中存在这种替代关系.与之相反,Ⅱ甚至在短期中也不允许这种替代关系,因而 Phillips 曲线应永远垂直于在正常失业率处.根据Ⅱ,经济经常处于充分就业状态."由于货币的中性,新古典论甚至否认这种短期替代关系"(Hoover,1984,62 页).关于Ⅱ,在某种程度上关于Ⅰ,Modigliani(1977,6 页)的下述评论看起来很正确:

MREH(宏观理性预期假设)最显著的缺点在于它与证据不一致:如果它是正确的,失业率对自然率的偏离应该很小且短暂,在这种情况下就不
365 存在"通论",甚至本篇文章也不会存在.Sargent(1976)试图通过假设来弥补这一缺点……换句话说,美国在 30 年代所发生的情况是懒惰造成的严重打击.

无论我们使用Ⅰ还是Ⅱ,现实世界的经济的行为都与它们没有什么关系.

60 年代以来,Phillips 曲线关系流行于一些经济学家当中.然而,当代的学者(自从 60 年代早期)一直认为:我们的经济太复杂而不能允许如此简单的解释,而且看来 Phillips 本人也持这种观点.这种批判同样适用于加速论者和非加速论者的研究.即使排除通常的诸如政府预算赤字的规模,货币供给,国际收支赤字等因素对 Phillips 曲线的影响,读者通过询问如下问题就会懂得这一点:外汇汇率的波动率对 Phillips 曲线和"自然"失业率的影响是什么,比如说,5% 或者 500%(外生的或内生的,可预料或不可预料)?在 70 和 80 年代,不论我们是否采用附加预期形式,从实际数据中观察到 Phillips 曲线关系逐渐变得困难起来.Phillips 曲线一段时期像幽灵一样出没于一些经济学家(特别是美国的经济学家)中.许多理论性和经验性的论文都假定它存在.也许,现在到了该完全抛弃它的时候了.

6.3.5 Tobin 的"Walras－Keynes－Phillips"模型：Routh－Hurwitz 定理的一个应用

这里的论述受 Tobin(1975)启迪.我们首先考虑下述通常的 IS－LM 宏观均衡关系(我们省略了代表均衡的星号(*))：

$$Y = E(Y - T, r - \pi^e) + G \tag{58a}$$

$$M/p = L(Y, r) \tag{58b}$$

其中，Y＝产量，E＝消费加投资，r＝名义利率，π^e＝预期通胀率，T＝净税收，G＝政府支出，M＝货币供给，p－价格水平，L＝货币需求，G，T，M 假定为常数.式(58a)和式(58b)所描述的模型基本上与式(32)中描述的相同，除了 π^e 在式(32)中默认为外生的给定的常数，且 p 在式(58)中不再是常数.在本模型中，π^e 应视为内生的.注意到 $r - \pi^e$ 代表实际利率.如同式(32)，我们仍假定偏导数符号由式(34)给出，这里 E_r 现在定义为 $\partial E/\partial(r - \pi^e)$.

以之为起点，我们进行一系列的修改使模型接近 Tobin(1975)模型.该模型的一个关键特征是商品市场不能迅速地调节.我们将此假设表示为

366

$$\dot{Y} = \alpha[E(Y - T, r - \pi^e) + G - Y] \tag{59}$$

其中 α 为一正的常数.Tobin(1975，第 198 页)肯定了这种形式的方程并说，"这贯彻了 Keynes 的观点：在非常短的时期内货币工资和价格是固定的，同时产出反应需求的变化".[40]

与此相对，假定货币市场由于利率的波动而迅速调节，式(58b)对所有的 t 成立.对 r 解式(58b)，我们得

$$r = r(Y, p, M)$$

其中

$$r_Y(\equiv \partial r/\partial Y) = -L_Y/L_r > 0$$

$$r_p(\equiv \partial r/\partial p) = -M/(p^2 L_r) > 0$$

据此可用下式定义函数 D：

$$D(Y, p, \pi^e) \equiv E[Y - T, r(Y, p, M) - \pi^e] + G$$

其中

367

$$D_1(=\partial D/\partial Y) = E_Y + E_r L_Y/L_r$$

$$D_p(=\partial D/\partial p) = -E_r M/pL_r < 0$$

$$D\pi^e(\equiv \partial D/\partial \pi^e) = -E_r > 0$$

我们假定 G 和 M 是外生固定的.由于 $E_Y<1$,我们有 $D_Y-1=(E_Y-1)-E_rL_Y/L_r<0$,因而我们有 $D_Y<1$.将函数 D 代入(59),可得如下商品市场的调节方程:[41]

$$\dot{Y}=\alpha[D(Y,p,\pi^e)-Y] \tag{60}$$

根据 Tobin(1975),我们假定价格变化的预期(π^e)以适应性方式形成

$$\dot{\pi}^e=\beta(\pi-\pi^e),\beta>0 \tag{61}$$

这与式(55)相同.令 Y^* 为充分就业的产出水平,Y^* 代表对应于自然失业率的产出水平.

最后,又根据 Tobin(1975),假设自然率情况下的 Phillips 曲线

$$\pi(\equiv\dot{p}/p)=\gamma(Y-Y^*)+\pi^e \tag{62}$$

其中 γ 为一正的常数.包括式(60)、(61)和(62)的方程组抓住了 Tobin(1975)称作 **WKP**(Walras-Keynes-Phillips)**模型**的实质.虽然我们对式(60)的解释与 Tobin 不同,但它与相应的 Tobin 方程在形式上和性质上都是等同的.[42]式(61)和(62)也与他的方程相同.因此,我们的系统应与 Tobin 的系统以同样的方式运作.

将(62)代入(61),可得

$$\dot{\pi}^e=\beta\gamma(Y-Y^*) \tag{63}$$

368 给定了初始条件,三个微分方程(60)、(62)和(63)决定了 Y,p,π^e 的时间路径.通过在式(60)、(62)和(63)中设 $\dot{Y}=\dot{p}=\dot{\pi}^e=0$,可得 Y,p 和 π^e 的均衡值.注意到在均衡点处有 $Y=Y^*$ 和 $p=$ 常数(因此 $\pi=\pi^e$).也就是说,在均衡点处我们有充分就业和价格稳定.我们用 p^* 代表 p 的均衡值.

对(60),(62)和(63)作关于均衡点的线性化,可得

$$\begin{bmatrix}\dot{Y}\\ \dot{p}\\ \dot{\pi}^e\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha(D_Y-1) & \alpha D_p & -\alpha E_r\\ \gamma p^* & 0 & p^*\\ \beta\gamma & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Y-Y^*\\ p-p^*\\ \pi^e\end{bmatrix} \tag{64}$$

这里我们注意到在均衡处 $\pi^e=0$ 和 $D_{\pi^e}=-E_r$,其中偏导数 D_Y,D_p 和 E_r 在均衡点处赋值.

式(64)的系数矩阵的特征方程可以写成

$$\lambda^3+a_1\lambda^2+a_2\lambda+a_3=0 \tag{65}$$

$$a_1\equiv-\alpha(D_Y-1),a_2\equiv-\alpha\gamma(D_pp^*-\beta E_r)$$

$$a_3\equiv-\alpha\beta\gamma D_pp^* \tag{66}$$

369 Routh-Hurwitz 稳定性条件[回顾定理 6.9 和条件(24″)]可以写成

$$a_1>0,a_2>0,a_3>0,a_1a_2-a_3>0 \tag{67}$$

关于 a_2 的条件可由其他条件推出. 由 $D_Y<1$ 和 $D_p<0$ 可知条件 $a_1>0$ 和 $a_3>0$ 满足. 剩下的条件, $a_1a_2-a_3>0$, 可以写成

$$D_pp^*-\beta E_r<-\beta D_pp^*/\alpha(D_Y-a)(<0) \tag{68}$$

正如 McDonald(1980, 第 830 页)指出的, 此处与 Tobin 稳定性条件有一个小差别. 也就是说, Tobin 的条件(1975, 第 199 页)可以根据我们记号写成

$$D_pp^*-\beta E_r<0 \tag{69}$$

条件(68)不同于条件(69), 也就是说, 它比条件(69)更严格.[143]归纳一下, 我们便可得到命题 6.6 中的结论.

【命题 6.6】 Tobin 的 WKP 模型中的均衡未必是稳定的.

在如当前样的一个非随机模型中, 理性预期等于假定"完美的缺乏远见的预测", 即 $\pi=\pi^e$. 于是, 式(62)表明 $Y=Y^*$. 因此, 经济必须停留在自然(或充分就业)水平. 由于 $Y-Y^*$, 根据(62)有 $p-$ 常数, 因此我们有 $\pi=\pi^e=0$. 在(60)中设 $Y=Y^*$, $p=p^*$, $\pi^e=0$, 可得

$$\dot{Y}=\alpha[D(Y^*,p^*,0)-Y^*] \tag{70}$$

显然, 不能保证我们有

$$D(Y^*,p^*,0)-Y^*=0$$

令 $D^*\equiv D(Y^*,p^*,0)$, 则根据式(70), 我们可以得出结论: 如果 $D^*>Y^*$, Y 将随时间增长; 如果 $D^*<Y^*$, Y 将随时间减少. 也就是说, , 如果 $\pi=\pi^e$, (70)中 Y 的均衡是不稳定的.[144]这表明充分就业状态($Y=Y^*$)很难在 $\pi=\pi^e$ 条件下达到. 如果人们准确预计了未来的通胀率, 则一旦 Y 偏离 Y^*, 产出水平(Y)将离开充分就业水平(Y^*). 看起来这是一个奇怪的结论. 在任何情况下, Y 不能从充分就业值 Y^* 处上升太多. 还不清楚是什么构成了 Y 的一个上界以及阻止 Y 无限上升(或下降)的机制是什么.

370

下面是对 Tobin 的 WKP 附加评价. 可以看出他的模型给一个市场(比如说, 商品市场)加上了两个调节方程(61)和(62). 这也许是导致其模型有些奇特含义的一个原因.[145]另外注意在以上所述的 Tobin 的 WKP 模型中, 货币供给被假定是不变的, 但是包含(60)、(62)和(63)的方程组却可以产生通货膨胀直至达到其长期均衡, $\pi=\pi^e=0$.

§6.4 三种商品情况下的竞争均衡

这里我们考虑一种包括三种商品("住所"、"服装"和"食物"或"出口品"、"进口品"和"非贸易品", 等等)的竞争均衡模型. 与 6.3.1 节中的(31)不同, 我

们将不考虑线性近似系统.而是基于总可替代性的假定,这里我们将证明一个竞争均衡的全局稳定性.现在的证明也说明了 Olech 定理(定理 6.7)的运用.我们将用图解来说明我们的论述.由于这种称为**相图技术**的图表技术广泛用于经济学分析,这里发展的图解方法应该在经济学中有广泛的应用.

与前面类似,我们令 $x_i = F_i(P_1, P_2, P_3), i = 1,2,3$,为对第 i 种商品的超额需求.对所有 P,Walras 法则可以写成

371

$$P_1F_1(P) + P_2F_2(P) + P_3F_3(P) \equiv 0$$

其中 $P = (P_1, P_2, P_3)$.利用超额需求函数的零次齐次性,可得

$$F_i(P_1, P_2, P_3) = F_i(p_1, p_2, 1)[\equiv f_i(p_1, p_2)], i = 1,2,3$$

其中 $p_i \equiv P_i/P_3, i = 1,2$.动态调整过程可用微分方程描述,

$$\dot{p}_i = k_iF_i(p_1, p_2, 1)[\equiv k_if_i(p_1, p_2)], i = 1,2 \tag{71}$$

这里 k_i 为正的常数,$i = 1,2$ 表示第 i 个市场的调整速度.竞争均衡价格向量 (p_1^*, p_2^*)定义为

$$F_i(p_1^*, p_2^*, 1) = 0 \text{ 或 } f_i(p_1^*, p_2^*) = 0, i = 1,2$$

这种情况下价格的运动变成静止的.因此,竞争均衡价格向量也代表微分方程组(71)的一个均衡点.假定 $p^* = (p_1^*, p_2^*)$存在且是一个孤立均衡点.注意如果前两个市场处于均衡或已出清,则根据 Walras 法则,第 3 个市场自动出清.

由于 $F_i(P), i = 1,2,3$,是零次齐次性的,利用 Euler 方程我们有

$$F_{i1}(P)P_1 + F_{i2}(P)P_2 + F_{i3}(P)P_3 \equiv 0, i = 1,2,3$$

其中 $F_{ij} \equiv \partial F_i/\partial P_j, i,j = 1,2,3$.由此,立即得到

$$F_{i1}p_1 + F_{i2}p_2 + F_{i3} \equiv 0, i,1,2,3 \tag{72}$$

其中 $F_{ij} = F_{ij}(p_1, p_2, 1), i,j = 1,2$.由式(72)我们有

$$p_1/p_2 = -F_{12}/F_{11} - F_{13}/(F_{11}p_2) \tag{73a}$$

$$p_1/p_2 = -F_{22}/F_{21} - F_{23}/(F_{21}p_2) \tag{73b}$$

我们现在假定(全局)总可替代性为

$$\text{对所有的 } p = (p_1, p_2), i \neq j, i,j = 1,2, F_{ij}(p,1) > 0 \tag{74}$$

基于此假定和(72)推出

$$\text{对所有的 } p, F_{ii} < 0, i = 1,2,3^{[46]} \tag{75}$$

372 也就是说,自身价格影响必须总为负.同样,对所有的 p,式(74)和(75)也推出

$$p_1/p_2 > -F_{12}/F_{11}, p_1/p_2 < -F_{22}/F_{21} \tag{76}$$

这进一步推出

$$\text{对所有的 } p, -F_{22}/F_{21} > -F_{12}/F_{11} \tag{77}$$

现在我们准备证明命题 6.7 中的结果.

【命题 6.7】 在(全局)总可替代性式(74)下,竞争性均衡(p_1^*, p_2^*)在式(71)定义的动态调节过程下是渐近全局稳定的.

证明:根据 Olech 定理,$p^* = (p_1^*, p_2^*)$是渐近全局稳定的,如果

(a)对所有 p, $k_1F_{11} + k_2F_{22} < 0$;

(b)对所有 p, $k_1k_2(F_{11}F_{22} - F_{12}F_{21}) > 0$;

(c)对所有 p, $F_{11}F_{22} \neq 0$ 或者对所有的 p, $F_{12}F_{21} \neq 0$.

在总可替代性下条件(a)和(c)明显满足,这里我们利用了式(74)和(75).条件(b)也满足,因为(77)可以改写成

$$\text{对所有的 } p, F_{11}F_{22} - F_{12}F_{21} > 0 \tag{77'}$$

(证毕)

373

注:注意在这个证明中,通过齐次性运用式(73)起了关键作用.这种利用齐次性证明稳定性的方法取自 Drabicki 和 Takayama(1983).

以上的讨论也可用于得到三种商品情况的竞争性均衡稳定性问题的图形表达,我们考虑(p_1, p_2)平面.定义$(F_i = 0)$曲线为满足 $F_i(p_1, p_2, 1) = 0$ 的(p_1, p_2)的轨迹,$i = 1, 2$.为得到$(F_i = 0)$—曲线的斜率,对 $F_i = 0$ 微分,可得

$$F_{i1}dp_1 + F_{i2}dp_2 = 0, i = 1, 2$$

据此,易得两曲线的斜率

$$\left.\frac{dp_1}{dp_2}\right|_{F_1=0} = -\frac{F_{12}}{F_{11}} > 0, \quad \left.\frac{dp_1}{dp_2}\right|_{F_2=0} = -\frac{F_{22}}{F_{21}} > 0 \tag{78}$$

其中式(78)中的不等式来自总可替代性,或来自式(74)和(75).因此两条曲线在(p_1, p_2)平面上均向上倾斜.进一步,利用式(78),可将式(76)改写成

$$\left.\frac{dp_1}{dp_2}\right|_{F_1=0} < \frac{p_1}{p_2}, \left.\frac{dp_1}{dp_2}\right|_{F_2=0} > \frac{p_1}{p_2} \tag{76'}$$

这表明从原点到$(F_1 = 0)$—曲线上任意一点的射线的斜率大于$(F_1 = 0)$—曲线在这一点上的斜率,以及小于$(F_2 = 0)$—曲线在此点上的斜率.见图 6.9 的图解,其中图 6.9(a)和 6.9(b)分别对应$(F_1 = 0)$—曲线和$(F_2 = 0)$—曲线,其中虚线表示从原点到$(F_1 = 0)$或$(F_2 = 0)$—曲线的不同射线.

竞争均衡(p_1^*, p_2^*)可定义为

$$F_i(p_1^*, p_2^*, 1) = 0, i = 1, 2$$

这可由($F_1 = 0$)—曲线或($F_2 = 0$)—曲线的交点来描述.其图解见图 6.10,其中点 A 代表竞争均衡.[47]注意,要想得到式(76′)中的关系,6.10 中的射线 $0A$ 必须落在曲线($F_1 = 0$)和($F_2 = 0$)—曲线之间.因此($F_1 = 0$)—曲线必须从上与($F_2 = 0$)—曲线在 A 点相交.这提供了在总可替代性下的惟一的竞争性均衡存在的图形证明.[48]不必说,在证明命题 6.7 的全局稳定性的结论中,竞争性均衡的存在是预先假定的.

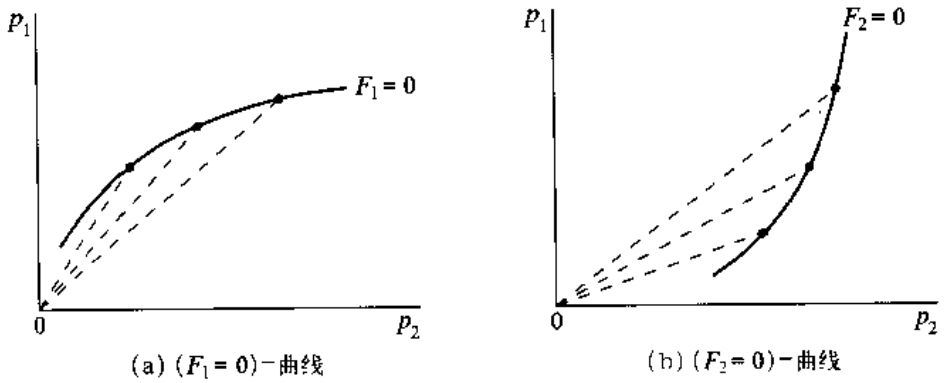


图 6.9 ($F_1 = 0$)—曲线和($F_2 = 0$)—曲线

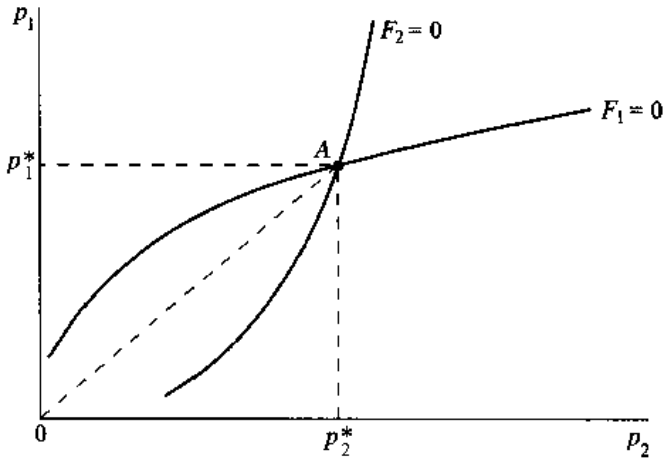


图 6.10 竞争均衡的惟一性和存在性

我们现在得到(p_1, p_2)动态行为的图解,其运动在式(71)中描述.这在图 6.11 中表明.注意($F_1 = 0$)—曲线和($F_2 = 0$)—曲线把(p_1, p_2)空间的非负域分为四个区域.由于 $F_{12} > 0$,在($F_1 = 0$)—曲线的右面有 $F_1 > 0$,($F_1 = 0$)—曲线左面有 $F_1 < 0$.因此在($F_1 = 0$)—曲线右面 $\dot{p}_1 > 0$ 或 p_1 随时间增加,在($F_1 = 0$)—曲线左面 $\dot{p}_1 < 0$ 或 p_1 随时间减少.类似地,由于 $F_{22} < 0$,在($F_2 = 0$)—曲线右面有 $F_2 < 0$,在($F_2 = 0$)—曲线左面 $F_2 > 0$.故在($F_2 = 0$)—曲线右面 $\dot{p}_2 < 0$ 或 p_2 随时间减少,在($F_2 - 0$)—曲线左面,$\dot{p}_2 > 0$ 或 p_2 随时间增加.

(p_1, p_2)的方向由被这两条曲线定义的四个区域中的箭头表明.注意沿着每条曲线的(p_1, p_2)的动态行为可以类似地得到.如果函数 F_1 和 F_2 都是线性的,那么$(F_1=0)$和$(F_2=0)$曲线都是直线.平面上的这种线性微分方程的动态行为是熟知的,我们将在下一章加以阐述.

图 6.11 中所示的平衡点 A 被称为"不正常结点".对于非线性系统,除了某些例外,平面上的微分方程解的动态行为在平衡点的一个领域内可由其线性近似体系的解的行为加以近似.这个结论称为 Poincaré **定理**(定理 7.5),图 6.11 模拟了这个定理的结论.在得到二维非线性体系的解的行为的图解中,这里运用的图表技术非常有用.这种被称作**相图技术**的方法在经济分析中应用很广.[49]

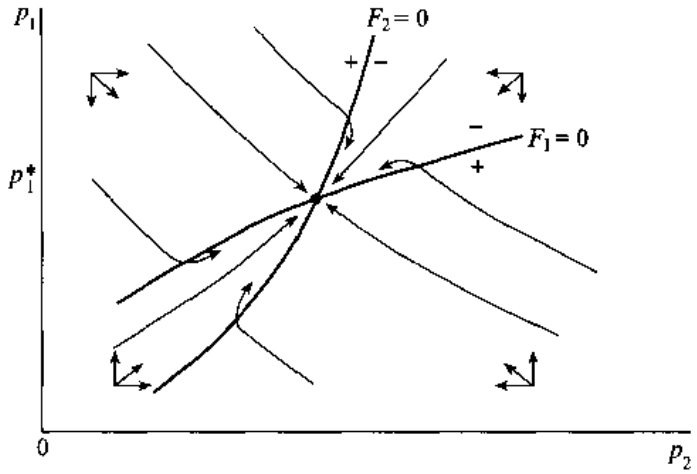


图 6.11 (p_1, p_2)的动态行为

▶ 注 释[50]

[1]该章摘自 Takayama(1980a,b).

[2]从式(4)得出 $x^0 = ce^{\alpha t^0}$,因此 $c = x^0 e^{-\alpha t^0}$,将此代入式(4)得到式(4″).

[3]注意未假定 f 关于 t 的连续可微性.函数 f 关于 x 的连续可微性可以被放宽为称作"Lipschitz 条件"的条件.另一方面,该放宽在本阐述中不重要,放可忽略.

[4]该例摘自 Arnold(1978,14～15 页).

[5]该例摘自 Yoshizawa(1967,3～4 页).

[6]在这种情况下,f 在(t, x)空间上连续,且在 x^0 中连续可导.

[7]注意尽管 x^3 可以定义在 R 中所有的 x 上,式(14)和式(14′)中的 $\varphi(t)$不能取任何负值.与将 t 限定在R 的一定区间对应,$\varphi(t)$也限定为 R 的子集.在该例中,定理 6.1 中的集合 D 不是R^2,而限定为 R^2 的子集.

[8]不必说,可以存在多个的间断点.

例如,微分方程 $\dot{x}(t)=2/(t^2-1)$的解定义在三个区间$(-\infty,-1)$,$(-1,1)$和$(1,\infty)$上,其中 $t=-1$ 和 $t=1$ 均为间断点.得到该微分方程的解如下:

$$\varphi(t)=\log(t-1)-\log(t+1)+c,t>1$$

$$\varphi(t)=\log(1-t)-\log(t+1)+c,-1<t<1$$

$$\varphi(t)=\log(1-t)-\log[-(t+1)]+c,t<-1$$

[9]关于 $x(t;x^0)$对 x^0 的连续性的假定,见 Kalman 和 Bertram(1960).在这方面,注意由解的定义,$x(t;x^0)$要求在 t 上连续.另外注意符号 φ 在以前章节中用来代表解,现在被 x 取代.这简化了符号并且遵循了经济学中的惯例.

[10]使用邻域的概念,我们可以用另一种方式给出局部稳定性的定义:如果 x^*存在一个邻域 $N(x^*)$使得 $x^0\in N(x^*)\subset D$ 推出,当 $t\to\infty$时,$x(t;x^0)\to x^*$,则 x^*是**(渐近)局部稳定的**.

[11]数学家经常用术语稳定性来表示他们所谓的 **Liapunov 稳定性.** Liapunov 稳定性,笼统地说,就是如果 x^0 充分接近 x^*,则 $x(t;x^0)$保持有界(但当 $t\to\infty$时,可以收敛或不收敛于 x^*).在这种情况下,渐近一词在把渐近稳定性与(Liapunov)稳定性区别开来中起重要作用.

[12]定理 6.4 曾被 Liapunov(1907)以稍微不同的形式得出.引用 Kalman 和 Bertram(1970,第 37 页)的话,"通过把 f 以关于平衡点的泰勒级数展开并忽略所有更高阶的项,来考察一个对平衡点的微小偏离是工程学中的通常做法".这种检验渐近局部稳定性质的实践在经济学中变得非常流行,尤其是在 Samuelson(1947)的著作之后更是这样.然而,以 Liapunov 定理表示的这样一种过程的证明常被掩盖了.见 Kalman 和 Bertram(1960,例 9).

[13]Takayama(1985,308 页)使用了一个类似的例子.对另外一个简例,考虑

$$\dot{x}=-x^3,x\in R$$

显然,$x^*=0$ 是惟一平衡点且渐近全局稳定.令 $f(x)\equiv-x^3$,则 $f'(x^*)=-3(x^*)^2=0$,因此上面的线性化系统可写成

$$\dot{x}=f'(x^*)(x-x^*)=0;\text{即},\dot{x}=0$$

$\dot{x}=0$ 的平衡点又为 $x^*=0$,但它不是渐近稳定的.

[14]记 $f_{11}f_{22}\equiv\alpha(x)$和 $f_{12}f_{21}\equiv\beta(x)$,则式(23b)说明对所有 x,$\alpha(x)-\beta(x)>0$,而式(23c)说明对所有 x,$\alpha(x)\neq0$ 或 $\beta(x)\neq0$.人们也许会猜想式(23c)是否是多余的,因为由式(23b)可以推出(23c).尽管该猜想对线性系统来说是正确的,因为系统中 $\alpha(x)$和 $\beta(x)$是与 x 无关的常数,但对非线性系统来说则是错误的,因为 α,β 现在依赖于 x.也就是说,对所有的 x,$\alpha(x)-\beta(x)>0$ 不一定表明对所有的 x,$\alpha(x)\neq0$ 或者对所有 x,$\beta(x)\neq0$.例如,如

果 $\alpha(x^0)=0,\beta(x^0)<0$,或者如果 $\alpha(x')>0$ 和 $\beta(x')=0$,对某个 x^0 和 x',(23b)得到满足而(23c)则不能.

[15]对竞争性均衡的稳定性问题的概述,见 Negishi (1962),Hahn(1982)和 Takayama(1985,第 3 章).

[16]对每个 $i=1,2,\cdots,n+1$,我们有

$$\text{对任何 } \alpha>0, F_i(\alpha P_1,\cdots,\alpha P_{n+1})=F_i(P_1,\cdots,P_{n+1})$$

这可以依据行为的理性来证明.换句话说,如果 P_i 根据一些记账单位(比如说以美元)来计量,则改变计量单位将不会影响每个人的行为.

[17]该系统可解释为表示"同时探索".关于稳定性分析中探索假定的问题见 Takayama(1985,第 339～347 页).

[18]Walras 在其经典著作中从对二种商品纯交换经济的全面讨论开始分析(Walras 1954,2 页),然后再从多个方面系统地推广这一分析.

[19]对需求方来说,这表明商品 1 价格的相对上升将导致需求向商品 2 转移,因而降低了对商品 1 的需求.这将减少对商品 1 的超额需求,因此 $f'(p)<0$.不必说,当商品 1 的价格相对上升时,负向的收入效应能够提高对商品 1 的需求(参看 Hicks－Slutsky 方程).在这种情况下,对商品 1 的超额需求将随商品 1 价格的相对上升而提高,即 $f'(p)>0$.

[20]现在看来,首先证明了竞争平衡稳定性的荣誉应归于 M. Allais.对这点,Negishi(1989,266 页)写道,"是 Allais…,通过假定总可替代性说明了 Walras 的探索过程的收敛性…"Allais 的成果于 1943 年出版.早在 Allais 获 1988 年诺贝尔经济学奖之前,Negishi 在其对竞争经济现象稳定性进行研究的出色文章中(1962,656～657 页)总结了 Allais 的贡献.

[21]Arrow,Block 和 Hurwicz(1959)已经提出了一个居民效用函数的例子(此函数将导致体现总体可替换性的需求函数).他们的例子是居民 i 的效用函数给定为

$$u_i(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{in})=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\log x_{ij}$$

这里,$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=1$,对所有的 i 和 j,$a_{ij}>0$.

[22]为了研究竞争性均衡的稳定性,$\dot{p}_i=k_i f_i(p)$,$i=1,2,\cdots,n$,经常假设"通过对商品单位的适当选择",使对所有 i,$k_i=1$,(见 Arrow 和 Hurwicz,1958;Arrow,Block 和 Hurwicz,1959).正如 Lewis(1963)指出的,"这表明单位的一种特定选择,但稳定性结论如同在 Arrow 和 Hurwicz(1958)Arrow,Block 和 Hurwicz(1959)的情况下一样,将不受影响."

[23]该部分摘自 Takayama(1983).例如,Samuelson(1947)、Chang 和 Smyth(1972)也讨论过 IS—LM 宏观均衡的稳定性.有相当数量的文章把政府预算约束纳入基本的 IS—LM 框架,因而动态就产生了.见 Takayama(1980)和其中引用的文献.

[24]关于 Hicks(1937)的 IS—LM 框架是否构建了对凯恩斯"通论"的正

确解释这一点，从60年代末期出现了争论. Hicks(1973)报导说Keynes自己接受了Hicks的解释，并将Keynes给他的日期为1937年3月31日的信复制了一份(Hicks 1973，9～10页). 作为对Hicks的IS—LM解释的反应，Keynes写道："我发现它非常有趣并且真的不能对之加以批评". Hicks从此信得出"Keynes接受SI—LL图来作为其立场的合理陈述"的结论(1973，10页). 另一方面，Hicks接着说，"这是一个我自己都不相信的陈述".

[25]现在对命题的证明有一个明显的弱点. 该证明中没有一处证明了动态过程中 Y 和 r 的值停留在正相，而仅是简单地被假定. 在下一章中，我们能借助轨迹的图解说明来检验它.

[26]以下来自Ohlin(1937，224～225页)的引用也许有关.

某些人想增加其债权或其他资产的意愿减去另一些人想减少他们相应产权的愿望给出了在时期内不同种类的新的信贷的供应曲线. 当然每个人愿意提供的数额取决于利率.……类似地新的债权的总供给减去旧的债权的流通数额的折扣给出了时期内对不同种类的信贷的需求量——也是利率的函数. 这些不同债权的固定于市场中的价格以通常的方式由供求关系决定.

Keynes(1937，第245页)就在他引用了前面的Ohlin的段落之后评论到：

这样我们又完全回到了Ohlin刚刚批驳过的古典教条——在以储蓄的形式出现的信贷的供给等于对投资形式出现的信贷的需求的水平下，利息率是固定的.

从Keynes和Ohlin之间的争论产生了著名的关于"存量和流量"的讨论，该问题在过去已经争论了五十多年. 目前我们并不去关注对这一争论的研究，我们甚至不希望宣称式(37)和(38)中所描述的调节过程正确地代表了新古典或Ohlin的理论. 关于这一点以及存量和流量的全面论述，见Drabicki和Takayama(1979). Bertil Ohlin是1977年诺贝尔经济学奖得主.

[27]在(剑桥型)古典货币数量理论中，对实际现金余额的需求不取决于利率. 利率本身不能直接调节货币市场. 因此，以式(38)的形式进行的调节过程更合理. 价格水平(而不是利率)对货币市场进行调节. 然而，在Keynes体系中，我们能够看到货币需求函数主要由资产选择决定. 在这种情况下，(37)可能更适宜. 见Trevithick(1977，第6章).

[28]Robert Solow是1987年诺贝尔经济学奖得主.

[29]根据来自英国的长期数据，Phillips(1958)发现了工资率的变化率($\Delta\omega/\omega$)与失业率之间规律性的经验关系. 根据美国更短时间的数据，Samuelson和Solow(1960)发现了失业率和通胀率之间的关系并称之为"Phillips曲线". Samuelson和Solow的研究引起了同行广泛的兴趣，导致了通过加上附加变量来对原Phillips和Samuelson－Solow关系进行的改良. 在60年代末以来的经验性研究中，流行用项 $\alpha\pi^e$(α 为正常数)作为解释变量以解释原Phillips曲线关系($\pi=f(u)$)的偏移. 60年代末以来美国的 π 和 u 的同时增长促进了这样的研究. 对 $f'<0$ 时 $\pi=f(u)$ 的稳定关系的广泛信任在那时动摇了(这种稳定的联系在美国60年代大多数时间确实被观察到了). 参看Santomero和Seater(1978)对该论题的研究文献的概述. 70年代和80年代

Phillips 曲线的行为最令那些坚持 Phillips 曲线的任何说法的经济学家失望. 然而,仍有许多人相信它.

[30]根据离散时间模拟,(55)可以写成

$$\pi^e_{t+1} - \pi^e_t = \beta(\pi_t - \pi^e_t) \tag{55'}$$

这可方便上面的解释. 如果令 $0<\beta<1$,(55′)等于假定预期可以用下面的公式表示

$$\pi^e_{t+1} = \beta\pi_t + \beta(1-\beta)\pi_{t-1} + \beta(1-\beta)^2\pi_{t-1} + \cdots$$

即,π^e_{t+1}表示为过去实际通胀率的加权和,其中权数结构是一种几何滞后的结构.

[31]例如,Solow(1969)为美国得出了 $\alpha \cong 0.4$ 或 0.6 的数字,为联合王国给出了 $\alpha \cong 0.2$ 的数字. 对这一课题的综述,见 Santomero 和 Seater(1978,525~527 页). 另见 Solow(1976).

[32]Milton Friedman 是 1976 年诺贝尔经济学奖得主.

[33]得到关于 α 大小的确定性证据的一个困难是 π^e 不可观察. 适应性预期公式确实提供了估计 π^e 的一个方法,然而这个公式不能作为预期形成的法则. 有一种直接估计预期通胀率的方法称为"Livingston 数据". 然而,当前讨论中它的用处值得怀疑. 因此,Solow(1976)写道:"Livingston 级数是预期通胀率的一个非常喧闹的代表".

[34]这通常解释为失业的"充分就业"率. Santomero 和 Seater(1978,515 页)是这么阐述的:

> 由于市场摩擦和结构性改变,失业总是存在. 这就意味着,即使经济处于总体均衡状态,也有失业存在,这种均衡定义为每个市场都不存在超额需求或所有预期都得到实现. **均衡失业**率通常称为**自然率**,是由实际现象如市场摩擦决定的……

[35]因此,观察到的向下倾斜的 Phillips 曲线对短期情况来说只是一种"幻觉",短期情况下通胀率是不可预知的并能产生实际影响,形成了一种向下倾斜的(π, u)关系. 在长期情况中,实际通胀率被确切地预知,这种关系也就消失了. 借用 Solow(1976,5~6 页)生动的语句来说:

> 现在人们认为实际因素和货币因素的变化率之间不存在持久的链合关系……货币是一层面纱.……一句话,价格水平的变化是一层面纱. 你可以这样说,一层面纱之中的变化率是一层面纱……

[36]不必说,如果通胀率变得太大,货币经济将崩溃,分析也必须全部修改.

[37]Solow(1976,7 页)简要地将加速论者的观点总结如下:

> 为永远维持新的较低的失业率,就有必要永远保持实际通胀率和预期通胀率的初始差别,做到这一点的惟一办法是加速通胀,快到足以使预期以一固定数量落后于实际情况. 由于这个原因,相信该观点和认为存在一个自然失业率的人经常被称为"加速论者".

[38]**宏观理性预期假设(或新古典宏观经济学)**的解释超过了本书的范围.关于该课题的有用且富启示的阐述,见 Shizuki 和 Mutoh(1981),Maddock 和 Carter(1982),Sheffrin(1983),Carter 和 Maddock(1984),Shaw(1984),Lucas (1987).Blinder(1987)提供了 J. M. Keynes 和 R. E. Lucas 之间的有趣比较.在文章的开头,Blinder 说到,"我们都知道这样一个笑话:教授年复一年的使用同一问题,但却改变答案.这个笑话很好概括了宏观经济学中发生的事情"(第 130 页).在文章的结束,他说道:"当 Lucas 改变了 Keynes 所给的答案后,他基本上把一个较好的答案变得更糟;……现代 Keynes 经济学……有更好的理由被认为比新古典宏观经济学更科学"(第 136 页).

[39]如同式(55′)中以离散时间的形式写出适应性预期公式,(55′)也可以等价地改写成

$$\pi^e_{t+1}=\pi^e_t+\beta(\pi_t-\pi^e_t) \qquad (55'')$$

其中 $\beta(\pi_t-\pi^e_t)$可以解释为纠正预期错误的项.该公式表明对预期错误进行纠正的基础是 π^e_t(方程 55″右边第一项).当 $\pi_t\neq\pi^e_t$ 时,已经知道 π^e_t 在时刻 t 时是错误的预期值.那么为什么人们纠正建立在错误预测基础上的预期呢?另外,纠正项的系数 β 是与$(\pi_t-\pi^e_t)$大小、模型的结构等无关的常数.最后,适应性预期公式只使用以前的实际通胀率去预测 π^e_{t+1}(回忆注释[30]),而不使用任何其他当前的和包括时间 t 的可用的信息.

[40]虽然许多人同意产出调节远比价格调节缓慢,但(59)是否抓住了这一点是可疑的.虽然货币工资率可能变动缓慢(所谓的"货币工资率的下降刚性"),价格可以快得多地移动,这对于在商品市场中达到暂时的均衡所必须的条件来说已足够.其次,Walras 稳定性和 Marshall 稳定性之间存在区别,我们对 Tobin 如何解释它还不清楚.正如 Peter Newman(1965,106～108 页)指出的,一般容易在这一点上产生的混淆是不能将交换理论与生产理论清楚地区别出来.Marshall(1920)和 Walras(1954)两人都有纯交换理论和生产理论而且他们都同意 Marshall 调节显然是为生产理论而设计的,而 Walras 价格调节更适于交换理论.因此这些概念不能在同一尺度下比较,在同一尺度下讨论它们包含了"混淆交换和生产的严重和本质性的错误"(Newman1965,第 107 页),关于近期对 Walras 和 Marshall 稳定性问题研究,见 Svenson(1984),Ide 和 Takayama(1990,1991a,b 和 1992a,b).

[41]在标准的宏观经济学教科书中,经常假定商品和货币市场中对均衡的调节足够快,因此我们得到了(p,Y)组合的轨迹,对于一个给定的外生变量值,它可以同时出清商品市场和货币市场.这就是 Marschak(1951)和 Brownlee (1950)**的总需求曲线**关系.它可以符号形式表示为

$$Y=Y(p;\pi^e),\text{或 } p=p(Y;\pi^e)$$

这是商品和货币市场的短期均衡轨迹.

[42]关于获得式(60)的过程,我们的模型与 Tobin(1975)不同.我们的式(60)是通过把货币均衡关系和商品市场的调节方程并列而得到的,此时假定

货币市场调节得很迅速，而 Tobin 则忽略了货币市场. Tobin(1975)在商品市场中引入财富效应，但是我们为简单而撇开它. 因此有人可能会认为我们的模型与 Tobin 的模型有很大的不同. 然而，必须强调的是我们模型的限定，式(64)中 $D_Y<1, D_p<0$ 和 $D\pi^e>0$，在形式上与 Tobin 的 WKP 模型(1975，方程 2.1.1)中"商品市场"的规定 $E_Y<1, E_p<0, E_\pi^e>0$ 相同. 因此，分析一下就可以认为我们的微分方程组应以一种与 Tobin 模型相似的方式运作.

[43]Tobin 的式(69)足以确保 $a_2>0$，但不足以确保 $a_1a_2-a_3>0$. Tobin (1975，199 页)称式(69)为"稳定性的关键的必要条件". 即使当我们根据 McDonald(1980)修改式(69)为式(68)，这还是不够精确. 这样一种条件只能为稳定性提供了充分条件. 一般地，线性近似方程的稳定性只为原方程的(局部)稳定性提供充分条件(回忆例 6.4).

[44]Tobin(1975，200 页)写道，当 $\pi=\pi^e$ 时，我们的系统"必然地不稳定". 尽管该结论和我们的相同，但他的证明看来是错误的. 他用他的(错误的)稳定性条件式(69)来证明该结论的正确性.

[45]作另一种方法，可以假设 Marschak(1951)和 Brownlee(1950)的总需求关系式(60")，并假设有调节方程

$$\dot{Y}=\tilde{a}[p(Y;\pi^e)-Y^*],\ \tilde{a}>0$$

由于在当前模型中货币供给是固定的，我们可设 $\pi^e=0$. 由于 $\partial p/\partial Y<0$，该调节方程的平衡是渐近全局稳定的.

[46]回忆 $F_i(p)=D_i(p)-S_i, i=1,2,3$，其中 D_i 和 S_i 分别代表对 i 种商品的需求和供应. 假定 S_i 对所有的 i 为常数. 因此 $F_{ij}>0, i\neq j, F_{ii}<0$ 可以解释如下：第 j 种商品价格的升高导致需求从第 j 种商品向其他商品转移(因此 $\partial D_j/\partial p_j<0$ 及 $\partial D_i/\partial p_j>0, i\neq j$). 根据 Hicks－Slutsky 方程，$\partial D_i/\partial p_i>0$，排除了收入效应充分大的可能性以及来自互补性的可能的负效应.

[47]$F_3(p_1,p_2,1)=0$ 的微分产生

$$F_{31}dp_1+F_{32}dp_2=0 \text{ 或者 } dp_1/dp_2\big|_{F_3=0}=-F_{32}/F_{31}<0$$

因此 $F_3=0$ 上的 (p_1,p_2) 组合的轨迹是负倾斜的. 由于 $F_1=0$ 和 $F_2=0$ 推出 $F_3=0$，这样的曲线通过点 A.

[48]文献中似乎并没有应用(76′)中的关系来证明一个竞争性均衡的存在性和惟一性. 这一问题是由 Drabicki 和 Takayama(1983，第 4 页)阐明的.

[49]Marshall(1879)首先将相图技术引入经济学，Hicks(1939，1946)则将之用于竞争市场的稳定分析中. Arrow 和 Hurwicz(1958)在他们的证明三种商品经济的全局稳定性的论文中更严格地运用了相图技术.

[50]关于微分方程理论有许多很好的教科书. 全部列举它们并不容易，我只列举它们中的一部分. 关于稍全一点的列举，见下一章的参考文献. Beltrami (1987)和 Harris(1987)提供了动态模型的易读的精彩讨论. Brock 和 Malliaris (1989)含有对经济学家有用的最新的题材介绍. 近年来，"混沌"现象引起了许多经济学家、物理学家和其他科学家的兴趣. 对混沌理论的介绍超越了本书的

范围.有兴趣的读者可参考 Gukenheimer 和 Holmes(1983), Eckman 和 Ruelle (1985), Gleick (1987), Beltrami (1987), Baumol 和 Benhabib (1989), Devaney (1989), Brock 和 Malliaris (1989), Brock, Hsieh 和 LeBaron (1991) 和 Benhabib (1992). Gleick(1987)为此专题提供了非技术性的并且有趣的读物. Beltrami (1987)和 Deuaney(1989)提供了通俗的介绍. Guckenheimer 和 Holmes(1983)以及 Eckman 和 Ruelle(1985)对经济学家来说都不容易读懂.

▶ 参考文献

Akerlof, G. A. 1973. "The Demand for Money: A General Equilibrium Inventory Theoretic Approach." *Review of Economic Studies* 40(January): 115 – 30.

Arnold, V. I. 1978. *Ordinary Differential Equations*. Trans. from the Russian orignal by R. A. Silverman. Cambridge, Mass.: MIT Press.

Arrow, K. J., H. D. Black, and L. Hurwicz. 1959. "On the Stability of the Competitive Equilibrium, II." *Econometrica* 27(January): 32 - 109.

377

Arrow, K. J., and L. Hurwicz. 1958. "On the Stability of the Competitive Equilibrum, I." *Econometrica* 26(October): 522 – 52.

Baumol, W. J., and J. Benhabib. 1989. "Chaos: Significance, Mechanism, and Economic Applications." *Journal of Economic Perspectives* 3(Winter): 77 - 105.

Beltrami, E. 1987. *Mathematics for Dynamic Modeling*. New York: Academic Press.

Benhabib, J. ed. 1992. *Cycles and Chaos in Economic Equilibrium*, Princeton, N. J.: Princeton University Press.

Blinder, A. S. 1987. "Keynes, Lucas, and Scientific Progress." *American Economic Review* 77(May): 130 – 42.

Boyce, W. E., and R. C. DiPrima. 1986. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. 4th ed. New York: Wiley(1st ed. 1964).

Brock, W. A., and A. G. Malliaris. 1989. *Differential Equations, Stability, and Chaos in Dynamic Economics*. Amsterdam: North-Holland.

Brock, W. A., D. A. Hseih, and B. Le Baron. 1991. *Nonlinear Dynamics, Chaos and Instability*, Camhridge, Mass.: MIT Press, 1991.

Brownlee, O. H. 1950. "The Theory of Employment and Stabilization Policy." *Journal of Political Economy* 62(October): 412 – 24.

Carter, M., and R. Maddock. 1984. *Rational Expectations: Macroeconomics for the 1980s*. London: Macmillan.

Chang, W. W., and D. J. Smyth. 1972. "Stability and Instahility of IS—LM Equilibrium." *Oxford Economic Papers* 24(November): 372 – 84.

Devaney, R. L. 1989. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. 2d ed., Redwood City, Calif.: Addison-Wesley(1st ed. 1986).

Drabicki, J. Z., and A. Takayama. 1979. "The General Equilibrium Framework of Economic Analysis: Stocks and Bonds—With Special Application to Macroeconomic Models." In *General Equilibrium, Growth, and rade*, ed. J. Green and J. Scheinkman, 355－401. New York: Academic Press.

——. 1983. "The Theory of Comparative Advantage in a Monetary World." *Southern Economic Journal* 50(July): 1　17.

Eaves, C., and H. E. Scarf. 1976. "The Solution of Systems of Piecewise Linear Equations." *Mathematics of Operations Research* 1(February): 1　27.

Eckman, J. P., and D. Ruelle. 1985. "Engodic Theory of Chaos and Strange Attractors." *Review of Modern Physics* 57, July: 617－56.

Friedman, M. 1968. "The Role of Monetary Policy." *American Economic Review* 58(March): 1－17.

Gleick, J. 1987. *Chaos, Making a New Science*. New York: Viking.

Guckenheimer, J., and P. Holmes. 1983. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. New York: Spring-Verlag.

Hahn, F. 1982. "Stability." In *Handbook of Mathematical Economics*, vol. II, ed. K. J. Arrow and M. D. Intriligator, 749－93. Amsterdam: North-Holland.

Harris, M. 1987. *Dynamic Economic Analysis*. Oxford: Oxford University Press.

Hicks, J. R. 1937. "Mr. Keynes and the 'Classics'": A Suggested Interpretation. *Econometrica* 5(April): 147－59.

——. 1946. *Value and Capital*. 2d ed. Oxford: Clarendon Press(1st ed. 1939).

——. 1973. "Recollection and Documents.." *Economica* 40(February): 2－11.

Hirota, M. 1981. "On the Stability of Competitive Equilibrium and the Patern of Initial Holdings: An Example." *International Economic Review* 22(June): 461－67.

Hoover, K. D. 1984. "Two Types of Monetarism." *Journal of Economic Literature* 22(March): 58－76.

Ide, T., and a. Takayama. 1990. "Factor Market Distortions and Variable Returns to Scale: Walrasian and Two Marshallian Criteria." Presented at the International Economics Symposium, University of Pennsylvania, November 17.

——. 1991a. "Variable Returns to Scale, Paradoxes, and Global Correspondence in the Theory of International Trade." In *Trade, Policy, and International Adjustments*, ed. A. Takayama et al, 108－54. San Diego: Academic Press.

——. 1991b. "Marshall-Lerner Condition Reconsidered." *Economics Letters*

35(February):201－7.

——. 1992a. "Variable Returns to Scale and Dynamic Adjustment: The Marshall-Lerner Condition Reconsidered," to appear in *General Equilibrium, Growth, and Trade. II. The Legacy of Lionel W. McKenzie*, ed. by M. Boldrin, R. Becker, R. W. Jones, and W. Thomson, San Diego: Academic Press.

——. 1992b. "Marshallian Stability and Economic Theory." Presented at the Midwest International Economics Conference(October), University of Pittsburgh.

Kalman, R. E., and J. E. Bertram. 1960. "Control System Analysis and Design via the 'Second Methnd' of Liapunov, I: Continuous Time System." *Journal of Basic Engineering* 82(June):371－93.

Keynes, J. M. 1937. "Alternative Theories of the Rate of Interest." *Economic Journal* 47(June):241－52.

Lewis, J. P. 1963. "Dimensions in Economic Theory." *Manchester School of Economics and Social Studies* 31(September):243－54.

Liapunov, A. M. 1907. "Problème général de la stabilité du mouvement." *Annales de la Faculté de L'Université de Toulouse* 9:203－24. Reprinted in *Annals of Mathematical Study*, no. 17 (1949). Princeton, N. J.: Princeton University Press.

Lucas, R. E. 1987. *Models of Business Cycles*. Yrjö Jahnsson Lectures. Oxford: Basil Blackwell.

379 McDonald, I. M. 1980. "On the Comparison of the Stability Implications of Marshallian and Walrasian Adjustment Schemes: A Note." *American Economic Review* 70(September):829－33.

Maddock, R., and M. Carter. 1982. "A Child's Guide to Rational Expectations." *Journal of Economic Literature* 20(March):39－51.

Marschak, J. 1951. *Income, Employment, and the Price Level* (*Notes on Lectures Given at the University of Chicago, Autumn* 1948 *and* 1949). Cowles Commission for Research in Economics. Reprinted(1965) by Augustus M. Kelley: New York.

Marshall, A. 1920. *Principles of Economics*. 8th ed. London: Macmillan(1st ed., 1890).

Modigliani, F. 1977. "The Monetarist Controversy Or, Should We Forsake Stabilization Policies," *American Economic Review* 67(March):1－19.

Negishi, T. 1962. "The Stability of a Competitive Economy: A Survey Article," *Econometrica* 30(October):635－69.

——. 1989. *History of Economic theory*. Amsterdam: North-Holland.

Newman, P. 1965. *The Theory of Exchange*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall.

Ohlin, b. 1937. "Some Notes on the Stockholm Theory of Saving and Investments, II." *Economic Journal* 47(June):221－40.

Olech, C. 1963. "On the Global Stability of an Autonomous System on the Plane." In *The Contribution to Differential Equations*, ed. J. P. LaSalle and J. B. Diaz, 1:389 – 400. New York: Wiley.

Phelps, E. S. 1967. "Phillips Curves, Expectations of Inflation, and Optimal Unemployment Over Time." *Economica* 34(August):254 – 81.

Phillips, A. W. 1958. "The Relation between Unemployment and the Rate of Change of Money Wage Rate in the United Kingdom, 1861 – 1957." *Economica* 25(August):283 – 99.

Pontryagin, L. S. 1962. *Ordinary Differential Equations*. Trans. from the 1961 Russian original by L. Kascinskas and N. B. Counts. Reading, Mass.: Addison-Wesley.

Samuelson, P. A. 1947. *Foundations of Economic Analysis*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press(Enlarged ed. 1983).

Samuelson, P. A., and R. M. Solow. 1960. "The Problem of Achieving and Maintaining a Stable Price Level: Analytical Aspects of Anti-Inflation Policy." *American Economic Review* 50(May):177 – 94.

Santomero, A. M., and J. J. Seater. 1978. "The Inflation-Unemployment Trade-Off: A Critique of the Literature." *Journal of Economic Literature* 16 (June):499 – 544.

Scarf, J. E. 1974. *The Computation of Economic Equilibria* (in Collaboration with T. Hansen). New Haven, Conn.: Yale University Press.

380 ——. 1982. "The Computation of Equilibrium Prices: An Exposition." In *Handbook of Mathematical Economics*, ed. K. J. Arrow and M. D. Intriligator, 2: 1007 – 61. Amsterdam: North-Holland.

Shaw G. K. 1984. *Rational Expectations: An Elementary Exposition*. Brighton, Sussex: Wheatsheaf.

Sheffrin, S. M. 1983. *Rational Expectations*. New York: Cambridge University Press.

Shizuki, T., and T. Mutoh. 1981. *Rational Expectations and Monetarism* (in Japanese). Tokyo: Nihon Keizai Shimbun-sha.

Simmons, G. F. 1972. *Differential Equations*. New York: McGraw-Hill.

Solow, R. M. 1956. "A Contribution to the Theory of Economic Growth." *Quarterly Journal of Economics* 70(February):65 – 94.

——. 1969. *Price Expectations and the Behavior of the Price Level*. Manchester: Manchester University Press.

——. 1976. "Down the Phillips Curve with Gun and Camera." In *Inflation, Trade, and Taxes: Essays in Honor of Alice Bourneuf*, ed. D. A. Besley, E. J. Kane, P. A. Samuelson, and R. M. Solow. Columbus, Ohio: Ohio State University Press.

Svenson, L. E. O. 1984. "Walrasian and Marshallian Stability." *Journal of*

Economic Theory 34(December):391 – 379.

Swan, T. 1956. "Economic Growth and Capital Accumulation." *Economic Record* 32(November):334 – 61

Takayama, A. 1963. "On a Two-Sector Model of Economic Growth: A Comparative Statics Analysis." *Review of Economic Studies* 30(June):95 – 104. This was completed in October, 1960, and included in his Ph. D. thesis, University of Rochester, March, 1962.

——. 1972. *International Trade: An Approach to the Theory*. New York: Holt, Rinehart, and Winston.

——. 1980a. "Olech's Theorem and the Stability of Macro Models." Lecture notes, Purdue Universty, February(a revision of the 1970 lecture notes at Purdue University).

——. 1980b. "Elements of Differential Equations." Lecture notes, Texas A & M University, March(a revision of the 1978 *lecture note* at the same university).

——. 1980c. "Does Monetary Policy Matter?" *Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft*. 136(Dezember):593 – 616.

——. 1985. *Mathematical Economics*. 2d ed. New York: Cambridge University Press.

——. 1986. "The General Theory after Fifty Years: The Neoclassical Approach(A Partial View)." Presented at the annual meeting of the Eastern Economic Association, Philadelphia. Southern Illinois University Discussion Paper Series, No. 86 – 30.

381 Tobin, J. 1975. "Keynesian Models of Recession and Repression." *American Economic Review*. 65(May):195 – 202.

Trevithick, J. A. 1977. *Inflation: A guide to the Crisis in Economics*. Middlesex: Penguin Books.

Uzawa, H. 1961. "On a Two Sector Model of Economic Growth." *Review of Economic Studies* 29(October):40 – 47.

Walras, L. 1954. *Elements of Pure Economics*. Trans. W. Jaffé form the 1926 edition of the French original by W. Jaffé. London: Richard D. Irwin.

Yoshizawa, T. 1967. *Introduction to Differential Equations* (in Japanese). Tokyo: Asakura Shoten.

第 7 章　平面线性微分方程组和非线性系统基础

对二维情形的微分方程组的研究很重要，因为许多微分方程的应用是二维情形的，并且许多关键概念如“结点”，“鞍点”，“螺线极点”和“中心”（在一维问题中它们不存在）均在二维情形中出现. 另外，二维情形的线性系统经常作为非线性系统的近似，因此，研究线性系统并懂得在什么环境下这种近似可能存在是很重要的.

§7.1　线性系统

考察常系数 n 元一阶线性微分方程组

$$x_i(t)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j(t)+b_i,\ i=1,2,\cdots,n \tag{1}$$

或更简约地，

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+b,\ A\equiv[a_{ij}] \tag{2}$$

其中 a_{ij} 和 b_j 为常实数. 又假定 x_i 是实数，A 为非奇异的. 已知系统的解对所有 $(-\infty,\infty)$ 上的 t 存在，在给定**初始条件**

$$x_i(t^0)=x_i^0, i=1,2,\cdots,n$$

384

时其解惟一. (3)

式(2)中的线性方程组是**齐次组**时,有 $b=0$,及

$$\dot{x}(t)=Ax(t) \tag{4}$$

注意(2)可以改写成(4)的形式,即 $\dot{y}=Ay$,其中 $y=x+A^{-1}b$.因此我们将注意力主要集中在(4)上.

显然,对所有的 t,$x(t)=0$,则(4)满足,这称为**平凡解**.为获得更有用的非平凡的解,将(4)的一些特解写为

$$x^{(1)}(t),x^{(2)}(t),\cdots,x^{(k)}(t),\cdots \tag{5}$$

其中 $x^{(k)}(t)$为一 n 维向量,其第 i 个元素为 $x_{ik}(t)$.那么,我们可立即得到定理 7.1 中的结果.

【定理 7.1】 如果 $x^{(1)}(t)$和 $x^{(2)}(t)$为(4)的解,则它们的线性组合

$$c_1x^{(1)}(t)+c_2x^{(2)}(t)$$

也是一个解,其中 c_1 和 c_2 为任意常数.

反复应用定理 7.1 便知,如果 $x^{(1)}(t),x^{(2)}(t),\cdots$和 $x^{(k)}(t)$是(4)的某些解,则对任意常数 $c_1,c_2,\cdots,c_k$,

$$c_1x^{(1)}(t)+c_2x^{(2)}(t)+\cdots+c_kx^{(k)}(t)$$

也是一个解.

令 $k=n$,考虑由该解构成的 $n\times n$ 矩阵 $X(t)$,

$$X(t)\equiv[x^{(1)}(t),x^{(2)}(t),\cdots,x^{(n)}(t)]\equiv[x_{ij}(t)] \tag{6}$$

如果对每个 t,$X(t)$都是非奇异的,则称对每个 t,解 $x^{(1)}(t),x^{(2)}(t),\cdots,$和 $x^{(n)}(t)$都是线性无关的.[1]可以证明,如果 $X(t)$对某个 t 是非奇异的,则

385 $X(t)$对所有的 t 均是非奇异的.[2]称 $X(t)$的行列式为 **Wronskian** 行列式.以下定理是线性微分方程理论的基础:

【定理 7.2】 如果可以找到 n 个特解 $x^{(1)}(t),x^{(2)}(t),\cdots,x^{(n)}(t)$对某个 t 是线性无关的(即,它们的 Wronskian 行列式对某个 t 不为零),则(4)的每个解可以确切地以一种方式表示为这些解的线性组合,即

$$\phi(t)\equiv c_1x^{(1)}(t)+c_2x^{(2)}(t)+\cdots+c_nx^{(n)}(t) \tag{7}$$

由(7)给出的解 $\phi(t)$称为**通解**,(7)中的常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 通常由(3)中的 n 个常数即初始条件确定.含有这种 c_i 的确定值的解称为**特解**.通解的概念是线性微分方程的显著特征.对线性系统来说,例如(2),有可能得到一个包含 n 个任意常数的解,所有可能的解均可以对这 n 个任意常数赋值而获得.对于非线性方程,则不一定如此.即使可以找到一个包含 n 个任意常数的解,也

可能有其他的不能通过给出这些 n 个常数的值而获得的解.[3]

§7.2 平面齐次线性系统

我们现在集中讨论齐次线性系统(4)的特殊情况,其中 $n=2$. 考虑系统

$$\dot{x}=a_{11}x+a_{12}y,\dot{y}=a_{21}x+a_{22}y \tag{8}$$

假定系数矩阵

$$H\equiv\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} \tag{9}$$

是非奇异的.

为找到(8)的一个解,试用

$$x=Ae^{\lambda t},y=Be^{\lambda t} \tag{10}$$

386 其中 A,B 和 λ 是待定常数. (10)中的方程推出

$$\dot{x}=\lambda Ae^{\lambda t}=\lambda x,\dot{y}=\lambda Be^{\lambda t}=\lambda y \tag{10'}$$

将(10′)代入(8),可得

$$(a_{11}-\lambda)x+a_{12}y=0,a_{21}x+(a_{22}-\lambda)y=0 \tag{11}$$

将(10)代入(11),可得

$$(a_{11}-\lambda)A+a_{12}B=0,a_{21}A+(a_{22}-\lambda)B=0 \tag{12}$$

写成矩阵的形式为

$$\begin{bmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\ B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \tag{13}$$

显然,$A=B=0$ 是(13)的平凡解,它使(10)成为(8)的平凡解. 反之,当系数矩阵的行列式等于0,即当

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix}=0 \quad 或 \quad \det[H-\lambda I]=0 \tag{14}$$

时,(13)有非平凡解,其中 I 为 2×2 单位矩阵. 方程(14)称为**本征方程**或**特征方程**,(14)的根称为**本征、特征值**或**特征根**. 通过解(14)可得(14)的根,或者解

$$\lambda^2-p\lambda+q=0 \tag{15}$$

其中 $p\equiv a_{11}+a_{22},q=a_{11}a_{12}-a_{21}a_{12}$. 换言之,解方程

$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})=0 \tag{15'}$$

即可得本征值为

387

$$\lambda=\frac{1}{2}[p\pm\sqrt{p^2-4q}]$$

$$=\frac{1}{2}[(a_{11}+a_{22})\pm\sqrt{(a_{11}+a_{22})^2-4(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})}] \tag{16}$$

记式(16)中得到的两个本征值为 λ_1 和 λ_2.将(13)中的 λ 换成λ_1,记得到的非平凡解为(A_1,B_1),则

$$x=A_1e^{\lambda_1 t},y=B_1e^{\lambda_1 t} \tag{17}$$

是系统(8)的一个非平凡解.同理使用 λ_2,可得另一个非平凡解

$$x=A_2e^{\lambda_2 t},y=B_2e^{\lambda_2 t} \tag{18}$$

注意,(12)或(13)也可以写成

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\ B\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}A\\ B\end{bmatrix} \tag{19}$$

有此性质的非零向量(A,B)称为**本征向量**.[4]显然,(A_1,B_1)是与 λ_1 相应的本征向量,而(A_2,B_2)是与 λ_2 相关的本征向量.注意如果(A,B)是与本征值 λ 相应的本征向量,则其常数倍$(\theta A,\theta B)$也是与 λ 相应的本征向量(对所有 $\theta\neq0$成立).如果(16)得出 λ_1 和 λ_2,且如果 $\lambda_1\neq\lambda_2$,则与 λ_1 和 λ_2 有关的两个本征向量没有比例关系.也就是说,即不存在任何 θ 使得$(A_1,B_1)=(\theta A_2,\theta B_2)$.以另一种方式表示为,如果 $\lambda_1\neq\lambda_2$,则 $A_1/B_1\neq A_2/B_2$.

为了得到系统(8)的通解,我们必须得到两个线性无关的解(参看定理7.2).因此,接下来的任务是确定(17)和(18)给出的两个解是否是线性无关的.为此,需要逐个检验关于 λ_1 和 λ_2 的三种可能性.由于 λ_1 和 λ_2 表达式由(16)给出,因而存在三种可能性:(a)λ_1 和 λ_2 是实数值且相异,(b)λ_1 和 λ_2 是复数值,(c)λ_1 和 λ_2 是实数值且 $\lambda_1=\lambda_2$.

388 **不等实根**

当 λ_1 和 λ_2 两个根是相异实数时,易证明(17)和(18)是线性无关的,因此它们的线性组合

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}A_1e^{\lambda_1 t}\\ B_1e^{\lambda_1 t}\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}A_2e^{\lambda_2 t}\\ B_2e^{\lambda_2 t}\end{bmatrix} \tag{20}$$

即

$$x=c_1A_1e^{\lambda_1 t}+c_2A_2e^{\lambda_2 t},y=c_1B_1e^{\lambda_1 t}+c_2B_2e^{\lambda_2 t} \tag{21}$$

为系统(8)提供了一个通解.c_1 和 c_2 的值由初始条件决定,相应地产生了一个与之相应的特解.

【例 7.1】 方程组

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{22}$$

与(12)相应,可得

$$(2-\lambda)A + B = 0, A + (2-\lambda)B = 0 \tag{23}$$

这里的特征方程为

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{或者 } \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \tag{24}$$

有根 $\lambda_1 = 3$ 和 $\lambda_2 = 1$. $\lambda_1 = 3$,(23)变成

$$-A + B = 0, A - B = 0 \tag{25}$$

式(25)的一个非平凡解是 $A_1 = 1$ 和 $B_1 = -1$. 同理,对应于 $\lambda_2 = 1$ 则有 $A_2 = 1$ 和 $B_2 = 1$. 因此,(22)的通解可以写成

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} e^{t} \\ e^{t} \end{bmatrix} \tag{26}$$

389 也就是说,我们有

$$x = c_1 e^{3t} + c_2 e^{t}, y = -c_1 e^{3t} + c_2 e^{t} \tag{27}$$

不等复根

如果 λ_1 和 λ_2 为相异复数,则可以写成

$$\lambda_1 = a + ib, \lambda_2 = a - ib \tag{28}$$

的形式,其中 $b \neq 0$, a, b 为实数(回忆方程 16). 在这种情况下,我们希望从(12)中得到的 A 和 B 为复数. 对应于 λ_1,有 $A_1 \equiv \alpha_1 + i\alpha_2$ 和 $B_1 \equiv \beta_1 + i\beta_2$. 同理,对应 λ_2,通常有 A_2 和 B_2 为复数. 注意到 $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$(横线代表复共轭). 因此可以认为 $A_2 = \bar{A}_1$ 和 $B_2 = \bar{B}_1$. 由于系数 a_{11}, a_{12}, a_{21} 和 a_{22} 假定是实的,采用(12)的复共轭,可得

$$(a_{11} - \lambda)\bar{A}_1 + a_{12}\bar{B}_1 = 0, a_{21}\bar{A}_1 + (a_{22} - \lambda)\bar{B}_1 = 0$$

因此我们可以把对应于 λ_1 和 λ_2 的解写成

$$x = A_1 e^{(a+ib)t}, y = B_1 e^{(a+ib)t} \tag{29a}$$

$$x = \bar{A}_1 e^{(a-ib)t}, y = \bar{B}_1 e^{(a-ib)t} \tag{29b}$$

根据复数的初等代数,对任意实数 θ,我们有

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{30}$$

390 式(30)叫做 **Euler** 公式.[5]

因此可将(29a)改写成

$$x = A_1 e^{at}(\cos bt + i\sin bt),\ y = B_1 e^{at}(\cos bt + i\sin bt) \tag{31}$$

回忆 $A_1 = \alpha_1 + i\alpha_2$ 和 $B_1 = \beta_1 + i\beta_2$，可将(31)改写成

$$x = e^{at}[(\alpha_1 \cos bt - \alpha_2 \sin bt) + i(\alpha_1 \sin bt + \alpha_2 \cos bt)] \tag{32a}$$

$$y = e^{at}[(\beta_1 \cos bt - \beta_2 \sin bt) + i(\beta_1 \sin bt + \beta_2 \cos bt)] \tag{32b}$$

定义向量 u 和 v 为：

$$u \equiv \begin{bmatrix} \alpha_1 \cos bt - \alpha_2 \sin bt \\ \beta_1 \cos bt - \beta_2 \sin bt \end{bmatrix}$$

$$v \equiv \begin{bmatrix} \alpha_1 \sin bt + \alpha_2 \cos bt \\ \beta_1 \sin bt + \beta_2 \cos bt \end{bmatrix} \tag{33}$$

则(32a)和(32b)可改写成

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = e^{at}(u + iv) \tag{34}$$

这将提供(8)的一个解，容易看出

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = e^{at}u \text{ 和} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = e^{at}v \tag{35}$$

是(8)的实数解.进一步，可证明这两个解是线性无关的.因此，可得通解

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = e^{at}(c_1 u + c_2 v) \tag{36}$$

由于已经找到了通解，故无需考虑(29b).

【例 7.2】 在系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{37}$$

的情况下，[6]我们有(参看方程 12)

$$(1-\lambda)A - B = 0,\ 5A - (3+\lambda)B = 0 \tag{38}$$

这里特征方程为

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 5 & -3-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \tag{39}$$

有根 $\lambda_1 = -1 + i$ 和 $\lambda_2 = -1 - i$.则(38)关于 λ_1 和 λ_2 的非平凡解分别为

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 - i \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 + i \end{bmatrix} \tag{40}$$

这样，$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \beta_1 = 2, \beta_2 = -1$.考虑一个解

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2-i \end{bmatrix} e^{(-1+i)t} \tag{41}$$

然后，使用 Euler 公式，将它改写为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2-i \end{bmatrix} e^{-t}(\cos t + i\sin t)$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-t}\cos t \\ -2e^{-t}\cos t + e^{-t}\sin t \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} e^{-t}\sin t \\ -e^{-t}\cos t + 2e^{-t}\sin t \end{bmatrix} \tag{42}$$

这与(31)和(32)相对应. 因此

$$u = \begin{bmatrix} \cos t \\ 2\cos t + \sin t \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} \sin t \\ 2\sin t - \cos t \end{bmatrix} \tag{43}$$

这样，$e^{-t}u$ 和 $e^{-t}v$ 构成了一个(37)的实值解集，因此(37)的通解可以写成

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = e^{-t}(c_1 u + c_2 v) \tag{44}$$

为证实 $e^{-t}u$ 和 $e^{-t}v$ 是线性无关的，计算行列式 W(即 Wronskian 行列式)

392

$$\begin{aligned} W &\equiv \det[e^{-t}u, e^{-t}v] \\ &= 2e^{-2t}(2\sin t\cos t - \cos^2 t - 2\sin t\cos t - \sin^2 t) \\ &= -2e^{-2t} \end{aligned} \tag{45}$$

由于对所有的 t，$W \neq 0$，可推知 $e^{-t}u$ 和 $e^{-t}v$ 是线性无关的.

相等实根

当 λ_1 和 λ_2 有相同的值 λ 时，(17)和(18)不是线性无关的. 因此，为了构建通解，需要找到一个解，它与如下解线性无关

$$x = Ae^{\lambda t}, y = Be^{\lambda t} \tag{46}$$

为找到这样的第二个解，我们寻找一个如下形式的解：

$$x = (A_1 + A_2 t)e^{\lambda t}, y = (B_1 + B_2 t)e^{\lambda t} \tag{47}$$

容易检验(47)满足(8)[因此它是(8)的一个解]，且(46)和(47)是线性无关的. 通解可以写成

$$\begin{aligned} x &= c_1 Ae^{\lambda t} + c_2(A_1 + A_2 t)e^{\lambda t} \\ y &= c_1 Be^{\lambda t} + c_2(B_1 + B_2 t)e^{\lambda t} \end{aligned} \tag{48}$$

也就是说，

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} Ae^{\lambda t} \\ Be^{\lambda t} \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} (A_1 + A_2 t)e^{\lambda t} \\ (B_1 + B_2 t)e^{\lambda t} \end{bmatrix} \tag{48'}$$

将(47)代入(8)中，可得常数 A_1, A_2, B_1 和 B_2. 这表明 A_2 和 B_2 是通过 $A_2 =$

A 和 $B_2=B$ 的方式挑选出来的.

393 **【例 7.3】** 在系统[7]

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -4\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} \tag{49}$$

的情况下,对应于(12),我们有

$$(3-\lambda)A-4B=0,A-(1+\lambda)B=0 \tag{50}$$

这里特征方程写成

$$\lambda^2-2\lambda+1=0,\text{或}(\lambda-1)^2=0 \tag{51}$$

它有相等的实根,1 和 1.由于 $\lambda=1$,(50)变成

$$2A-4B=0,A-2B=0 \tag{52}$$

它有一个非平凡解 $A=2,B=1$.所以

$$x=2e^t,y=e^t \tag{53}$$

是(49)的一个非平凡解.形如(47)的第二个线性无关解可以写成

$$x=(A_1+A_2t)e^t,y=(B_1+B_2t)e^t \tag{54}$$

将它代入(49)中,可得

$$(A_1+A_2t+A)e^t=3(A_1+A_2t)e^t-4(B_1+B_2t)e^t,$$

$$(B_1+B_2t+B)e^t=(A+A_2t)e^t-(B_1+B_2t)e^t,$$

化为

$$(2A_2-4B_2)t+(2A_1-A_2-4B_1)=0,$$

$$(A_2-2B_2)t+(A_1-2B_1-B_2)=0.$$

由于它们是对所有 t 值成立的恒等式,故一定有

$$2A_2-4B_2=0,2A_1-A_2-4B_1=0,$$

$$A_2-2B_2=0,A_1-2B_1-B_2=0.$$

394 左边两个方程有一个非平凡解 $A_2=2$ 和 $B_2=1$.因此,右边两个方程变为

$$2A_1-4B_1=2,A_1-2B_1=1,$$

因而可得 $A_1=1,B_1=0$.故(54)现在可确定为

$$x=(1+2t)e^t,y=te^t \tag{55}$$

因此(49)的通解可写成

$$x=2c_1e^t+c_2(1+2t)e^t,y=c_1e^t+c_2te^t \tag{56}$$

易检验(53)和(55)是线性无关的.

以上有关相等实根情形的讨论暗中排除了 $a_{11}=a_{22}\neq 0$ 且 $a_{21}=a_{12}=0$ 的情形，即它排除了当(8)以

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & 0\\ 0 & a_{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} \tag{57}$$

的形式给出时的情况. 在该情况中，特征方程为

$$\lambda^2-2a_{11}\lambda+a_{11}^2=0,\text{或}(\lambda-a_{11})^2=0 \tag{58}$$

因此 $\lambda=a_{11}$. 将它代入(12)中，可立即推断出(46)中 A 和 B 的选择是任意的. 注意到(57)也可以写成

$$\dot{x}=a_{11}x,\dot{y}=a_{11}y \tag{57′}$$

显然，其通解为

$$x=c_1e^{\lambda t},y=c_2e^{\lambda t},\text{其中 }\lambda=a_{11} \tag{59}$$

而不是(48). 在这种情况下，系统称为**非耦合的**[由于(57′)中两个方程都可独立地求解].

§7.3 平面解的动态行为

395 这一节，我们将研究前一节讨论的平面线性微分方程组解的动态行为. 我们有

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} \tag{8′}$$

显然，$(x,y)=(0,0)$是一均衡点，$\dot{x}=\dot{y}=0$. 假定系数矩阵是非奇异的. 原点(0,0)是惟一的均衡点. 从上一节的论述我们清楚知道，(8′)的解的动态行为主要依赖于系数矩阵的本征值 λ_1 和 λ_2. 事实上，动态行为论述所包含的情况比先前讨论的更多. 有三种主要情况和两种次要的情况.

相同符号的不等实根

回忆这种情况下的通解由

$$x=c_1A_1e^{\lambda_1 t}+c_2A_2e^{\lambda_2 t},y=c_1B_1e^{\lambda_1 t}+c_2B_2e^{\lambda_2 t} \tag{20′}$$

给出，其中 A 和 B 为常数. 我们从假定 λ_1 和 λ_2 都是负的开始. 不失一般性，可以假设 $\lambda_1<\lambda_2<0$. 如果 λ_1 和 λ_2 均为负，从(20′)可知，当 $t\to\infty$时，x 和 y 都趋近于 0(不考虑初始条件). 均衡点(0,0)是渐近全局稳定的. 当 $c_2=0$ 时，根据(20′)，我们有

$$x=c_1A_1e^{\lambda_1 t},y=c_1B_1e^{\lambda_1 t} \tag{60}$$

所以 $y=(B_1/A_1)x$. 解的轨道(x,y)在$(x-y)$平面上沿直线

$$y=(B_1/A_1)x$$

移动，并且当 $t\to\infty$ 时，它趋向(0,0)(见图 7.1).[8] 如果 $c_1>0$，轨道在该线的一边，如果 $c_1<0$，轨道在该线的另一边. 如果 $c_1=0$，从(20′)得到

396

$$x=c_2A_2e^{\lambda_2 t},\ y=c_2B_2e^{\lambda_2 t} \tag{61}$$

所以 $y=(B_2/A_2)x$ 解的轨道(x,y)在平面上沿直线

$$y=(B_2/A_2)x$$

移动，当 $t\to\infty$ 时，趋向(0,0). 如果 $c_1\neq 0$ 且 $c_2\neq 0$，则解的轨道是“曲线路径”. 根据(20′)，可得

$$\frac{y}{x}=\frac{c_1B_1e^{\lambda_1 t}+c_2B_2e^{\lambda_2 t}}{c_1A_1e^{\lambda_1 t}+c_2A_2e^{\lambda_2 t}}=\frac{(c_1B_1/c_2)e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}+B_2}{(c_1A_1/c_2)e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}+A_2} \tag{62}$$

由于假定 $\lambda_1<\lambda_2$，显然当 $t\to\infty$ 时，y/x 趋近于 B_2/A_2. 因此，所有的轨道趋向原点(除了一对沿一条斜率为 B_1/A_1 的直线趋向原点的轨道外，它们都与直线$[y=(B_2/A_2)x]$相切. 这类平衡点称为**非正常结点**或简称为**结点**(见图 7.1).“正常结点”将在后面讨论.

当 λ_1 和 λ_2 均为正值时，情形类似，不同之处在于轨道上运动的方向是背离均衡点(0,0)的. 也就是说，除了解(对所有 t，$x=0$，$y=0$)以外，所有的解均离开原点，故(0,0)是不稳定的. 当 $\lambda_1>\lambda_2>0$ 时，除了箭头的指向完全相反

397 外，图 7.1 给出的轨迹的图形保持不变.

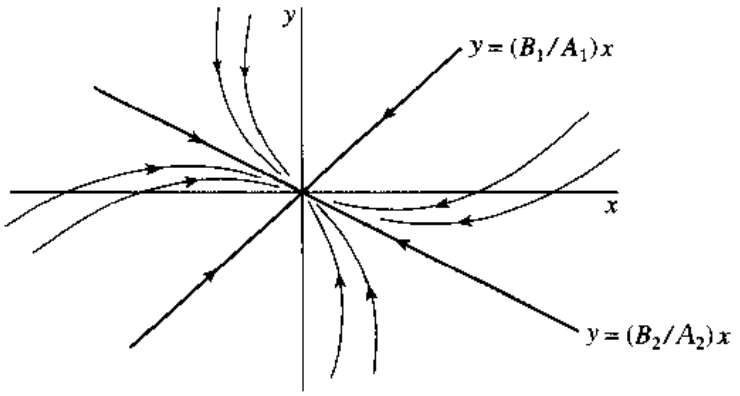


图 7.1　非正常结点，$\lambda_1\neq\lambda_2$

异号实根

不失一般性，我们假定 $\lambda_1<0<\lambda_2$. 异号实根情况下的通解又以(20′)的形式出现，特解如同(60)和(61)的形式. 对应(60)和(61)，有两对沿直线运动的轨道. 由于(60)中 $\lambda_1<0$，沿$[y=(B_1/A_1)x]$一线，当 $t\to\infty$ 时，x 和 y 趋向原点. 另一方面，沿直线$[y=(B_2/A_2)x]$，x 和 y 离开原点. 与图 7.1 中描绘的情况相对，表明沿该直线运动方向的箭头反向. 见图 7.2.

当 $c_1\neq 0$ 和 $c_2\neq 0$，通解(20′)代表曲线路径. 由于 $\lambda_1<0$ 和 $\lambda_2>0$，当 $t\to$

∞时,(20′)中 x 的表达式的第一项收敛于零,然而第二项依据 $c_2A_2>0$ 或 $c_2A_2<0$ 而从0发散至∞或 $-\infty$. 因此当 $t\to\infty$ 时,依据 $c_2A_2>0$ 或 $c_2A_2<0$, x 趋向∞或 $-\infty$. 同理,当 $t\to\infty$ 时,y 从原点发散的状况依 $c_2B_2>0$ 或 $c_2B_2<0$ 而定. 当 $c_1\neq 0$ 和 $c_2\neq 0$ 时,轨道均不趋向平衡点(0,0). 更进一步,根据(62)和 $\lambda_1<0<\lambda_2$,可推断出:当 $t\to\infty$ 时,该情况的每条轨迹都是直线 $y=(B_2/A_2)x$ 的渐近线. 由于(62)也可以写成

$$\frac{y}{x}=\frac{B_1+(c_2B_2/c_1)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}}{A_1+(c_2A_2/c_1)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}} \tag{62′}$$

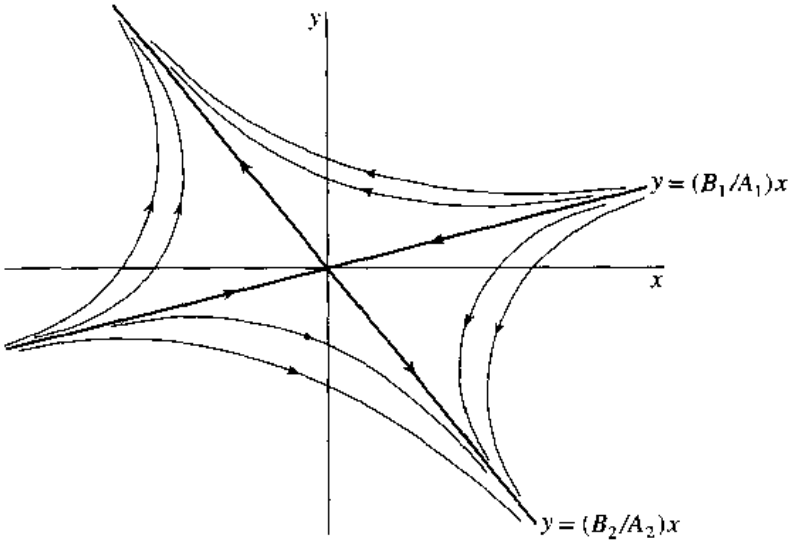


图 7.2　鞍点,$\lambda_1\lambda_2<0$

可推出当 $t\to-\infty$ 时,每条轨迹都是直线 $y=(B_1/A_1)x$ 的渐近线. 这种情况下的均衡点称为**鞍点**. 图 7.2 表明了关于鞍点的轨迹的定性行为. 注意除了直线 $y=(B_1/A_1)x$ 上的轨迹收敛于原点外,随 $t\to\infty$,其余轨迹不收敛于原点而是从原点向外发散. 除非初始点恰好位于直线 $y=(B_1/A_1)x$ 上,否则动态轨迹永远不会趋向均衡点. 直线 $y=(B_1/A_1)x$ 有时称为**稳定分枝**.

复根(但不是纯虚数)

在这种情况下,我们可以将 λ_1 和 λ_2 写成 $a+ib$ 的形式. 假设 $a\neq 0$. 根据(36)和(33),该情况的通解可由

$$x=e^{at}[c_1(\alpha_1\cos bt-\alpha_2\sin bt)+c_2(\alpha_1\sin bt+\alpha_2\cos bt)] \tag{63a}$$

398

$$y=e^{at}[c_1(\beta_1\cos bt-\beta_2\sin bt)+c_2(\beta_1\sin bt+\beta_2\cos bt)] \tag{63b}$$

给出. 我们首先检验 $a<0$ 的情况. 根据(63),可立即推断出当 $t\to\infty$ 时 $x\to 0$ 及 $y\to 0$. 均衡点是渐近全局稳定的. 我们现在证明轨迹螺旋式地围绕着均衡

399 点运动.

为完成这一点我们引入极坐标 r 和 θ,r 和 θ 定义为

$$x=r\cos\theta \text{ 和 } y=r\sin\theta \tag{64}$$

由于 $\theta=\tan^{-1}(y/x)$，我们有

$$\dot{\theta}=(x\dot{y}-y\dot{x})/(x^2+y^2) \tag{65}$$

我们可以回忆 $d\tan^{-1}u/du=1/(1+u^2)$. 注意到 $x^2+y^2=r^2$，我们可以假设 $x^2+y^2\neq 0$. 将(8)代入(65)，得

$$\dot{\theta}=[a_{21}x^2+(a_{22}-a_{21})xy-a_{12}y^2]/(x^2+y^2) \tag{66}$$

由于当前状态下本征值是复数，根据(16)，我们有

$$\begin{aligned}&(a_{11}+a_{22})^2-4(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})\\&\quad=(a_{11}-a_{22})^2+4a_{21}a_{12}<0\end{aligned} \tag{67}$$

据此，可推断出 a_{12} 和 a_{21} 的符号相反. 我们首先考虑 $a_{21}>0$（因此 $a_{12}<0$）的情况. 当 $y=0$ 时，根据(66)有 $\dot{\theta}=a_{21}>0$. 事实上，$\dot{\theta}$ 永远不能为零. 为证明这一点，假设 $\dot{\theta}=0$，则根据(66)可推断出

$$a_{21}x^2+(a_{22}-a_{11})xy-a_{12}y^2=0$$

或

$$\text{对某 } z\equiv x/y,\ a_{21}z^2+(a_{22}-a_{11})z-a_{12}=0$$

推出

$$z=\frac{-(a_{22}-a_{11})^2\pm\sqrt{(a_{22}-a_{11})^2+4a_{21}a_{12}}}{2a_{21}}$$

那么由(67)知 z 为一复数. 但因 x 和 y 是实数，这是不可能的. 因此 $\dot{\theta}$ 不可能为零. 因而对 $y=0$，$\dot{\theta}=a_{21}>0$ 以及对 $y\neq 0$，$\dot{\theta}\neq 0$. 当 $a_{21}>0$ 时，对 $y=0$，$\dot{\theta}$ 总是正的. 类似地，当 $a_{21}<0$ 时，对 $y=0$，$\dot{\theta}$ 总是负的. 根据(64)，当 $t\to\infty$ 时，x 和 y 经常永远不停地改变符号，所有轨迹一定螺旋式趋向原点（依据 $a_{21}<0$ 或 $a_{21}>0$，顺时针或反时针运动）. 这种情况下的平衡点称为**螺线极点**，这在图 7.3 中所示. 如果 $a>0$，那么从(63)我们立即可推断出当 $t\to\infty$ 时，轨迹一定

400

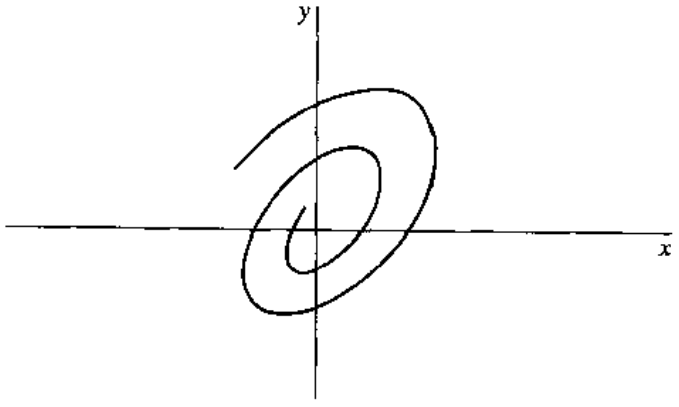


图 7.3　螺线极点，$\lambda_1=a+ib$，$\lambda_2=a-ib$

从原点向外发散(或当 $t\to-\infty$时,趋向原点).因此均衡点是不稳定的.$a>0$ 情况的图解除了运动方向相反之外与图 7.3 类似.

【例 7.4】 考虑系统

$$\dot{x}=-x+2y,\dot{y}=-2x-y \tag{68}$$

该系统系数矩阵的本征值为

$$\lambda=-1\pm2i$$

式(63)中常数 a 和 b 分别取值 -1 和 2.由于 $a=-1$,当 $t\to\infty$时,每个轨道向原点(0,0)移动.由于(68)中 $a_{21}=-2<0$,螺旋轨道顺时针移向原点.为获得一个图示,我们首先改写(68)为

401

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x-y}{-x+2y} \tag{69}$$

并引入由(64)定义的极坐标 r 和 θ,其中我们有

$$r^2=x^2+y^2\text{ 及 }\theta=\tan^{-1}(y/x) \tag{70}$$

根据(70),可得

$$r\frac{dr}{dx}=x+y\frac{dy}{dx},\quad r^2\frac{d\theta}{dx}=x\frac{dy}{dx}-y$$

因此我们有

$$\frac{dr}{d\theta}=r\frac{x+y(dy/dx)}{x(dy/dx)-y} \tag{71}$$

将(69)代入其中并回忆 $r^2=x^2+y^2$,可得

$$dr/d\theta=r/2 \tag{72}$$

402 因此,(69)改写为这种极简单的形式.根据(72),我们有

$$r=ce^{\theta/2} \tag{73}$$

这是轨道的极坐标方程,代表一族螺旋线.一条这样的螺旋线示于图 7.4 中.注意,根据(68),对 $y=0,\dot{y}=-2x$.沿着 x 轴,$\dot{y}\lesseqgtr0$ 取决于 $x\gtreqless0$.这证实了移动的顺时针方向.

除了前三种主要情况外,还有两种其他情况.

纯虚根

在这种情况下 $\lambda=a\pm ib$,其中 $a=0$ 及 $b\neq0$.除了现在去掉了指数因子外,通解又由(63)给出.当 $t\to\infty$时轨道既不趋向均衡点也不趋向无穷大,它们不再是螺旋线.运动有时间周期性并且轨道是闭曲线.围绕闭曲线运动的方向是顺时针还是逆时针方向取决于 $a_{21}<0$ 或 $a_{21}>0$.

这些闭曲线事实上是椭圆.这可通过解微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{21}x_2+a_{22}y}{a_{11}x_1+a_{12}y} \tag{74}$$

得到证明.均衡点(0,0)称为**中心**.在图 7.5 中说明 $a_{21}>0$ 情况下的轨道.

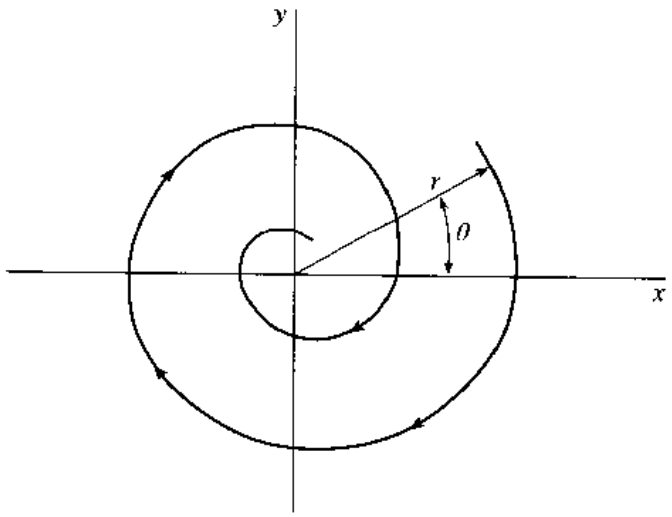


图 7.4　一个螺线极点

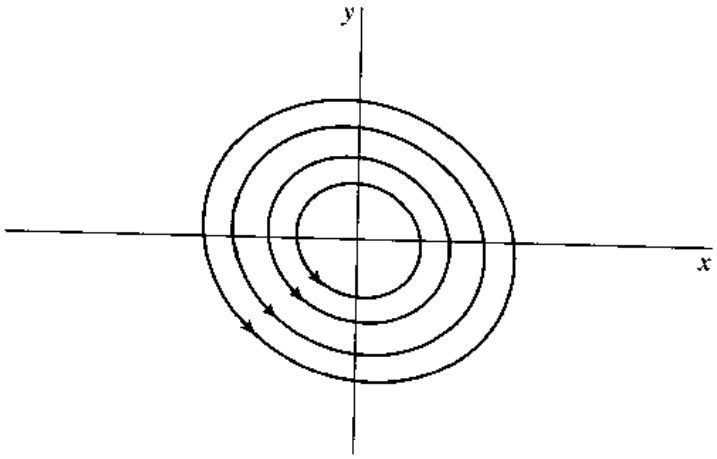


图 7.5　中心，$\lambda_1 = ib, \lambda_2 = -ib$

【例 7.5】　考虑系统

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x \tag{75}$$

易得到本征值为 $\lambda = \pm i$. 将(75)改写为 $dy/dx = -x/y$. 解该微分方程，可得

$$x^2 + y^2 = c^2 \tag{76}$$

轨道是圆. 由于 $a_{21} = 1 > 0$，它们逆时针移动. 这也可以从(75)中直接得到证实.

408　**等根**

除(57)外，这种情况下的通解以

$$x = c_1Ae^{\lambda t} + c_2(A_1 + At)e^{\lambda t}, y = c_1Be^{\lambda t} + c_2(B_1 + Bt)e^{\lambda t}$$

的形式给出.其中,所有的 A 和 B 是确定的常数,并且所有的 c 为任意常数.因此,当 $t\to\infty$时,所有轨道趋向原点还是趋向无穷大,取决于 $\lambda<0$ 还是 $\lambda>0$.我们假定 $\lambda<0$.

当 $c_2=0$ 时,根据(48′),可得解

$$x = c_1Ae^{\lambda t}, y = c_1Be^{\lambda t}, \text{因而 } y = (B/A)x \tag{77}$$

因此,这种情况下存在两条半条线路径,当 $t\to\infty$时,每条路径均位于直线 $y=(B/A)x$ 上并向原点移动.对于 $c_2\neq0$,(48′)代表弯曲的路径,根据(48′),可得

$$\frac{y}{x} = \frac{(c_1/c_2)B + B_1 + Bt}{(c_1/c_2)A + A_1 + At} \tag{78}$$

404 根据 L'Hospital 法则,由于 $t\to\infty$时,$y/x\to B/A$,故这些轨道趋向于原点,并与直线 $y=(B/A)x$ 相切.为描绘轨道,另外观察当 $t\to-\infty$时 $y/x\to B/A$.这些轨道示于图 7.6 中.均衡点(0,0)又称为**非正常结点**或简称为**结点**.当$\lambda>0$时,除了轨迹的方向反向及均衡点不稳定之外,状况保持不变.

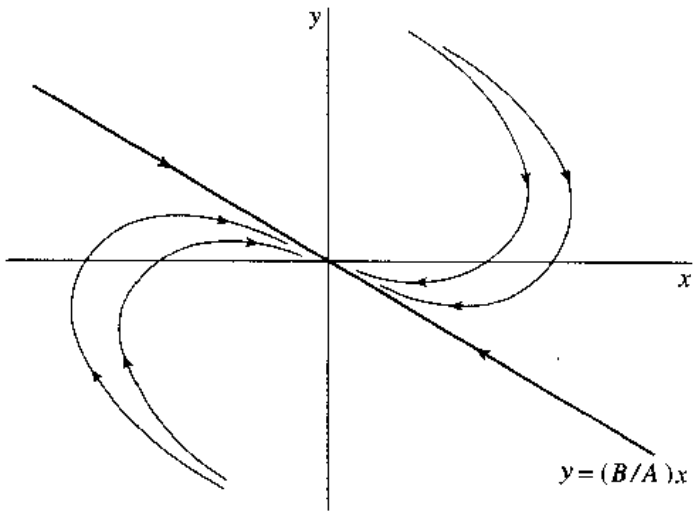


图 7.6 非平常结点,$\lambda_1=\lambda_2$

最后,我们检验相等实根的一个特殊情况.考虑以(57)给出的系统,或

$$\dot{x} = a_{11}x, \dot{y} = a_{11}y \tag{57′}$$

在这种情况下,$\lambda=a_{11}$,如以前提及的,通解由

$$x = c_1e^{\lambda t}, y = c_2e^{\lambda t}, \text{其中 } \lambda = a_{11} \tag{59}$$

给出.当 $t\to\infty$时,轨道趋向于均衡点(原点)还是趋向无穷大,取决于 $\lambda(=a_{11})<0$ 还是 $\lambda>0$.我们容易观察到

$$y/x = c_2/c_1 \tag{79}$$

405 因此对于 $c_1 \neq 0$ 和 $c_2 \neq 0$，轨道是直线，$y = (c_2/c_1)x$. 对于 $c_1 \neq 0, c_2 = 0$，它们位于 x 轴上，当 $c_1 = 0$ 且 $c_2 \neq 0$ 时位于 y 轴上. 这些轨道的图解见图 7.7，其中假定 $\lambda < 0$. 当 $\lambda > 0$ 时，除了箭头反向外，状态保持不变. 均衡点(即原点)称为**正常结点**或**星形结点**.

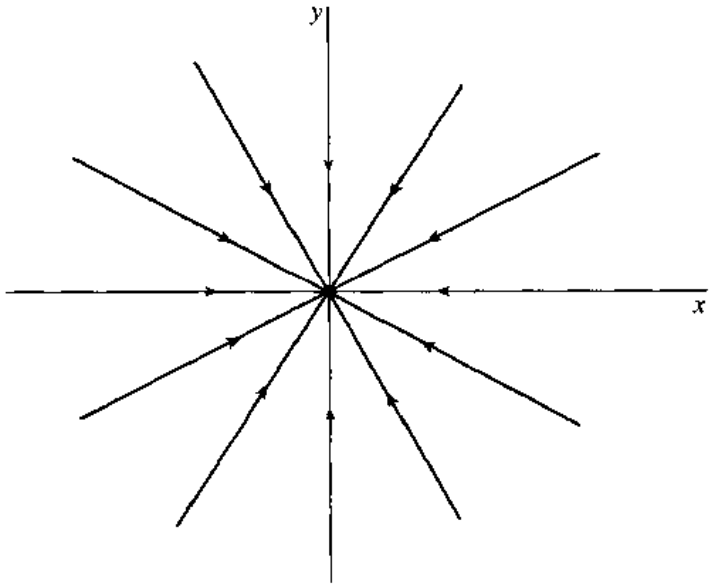


图 7.7　正常结点，$\lambda_1 = \lambda_2$

在此已穷尽了所有有趣的情况. 先前论述中一些主要的结果总结在定理 7.3 中.

【定理 7.3】

(i) 线性系统(8)的均衡点(0,0)是渐近(全局)稳定的，即当 $t \to \infty$ 时，$x \to 0$ 及 $y \to 0$，当且仅当两个本征值有负实部.

406 (ii) 当且仅当本征值为复数，但不是纯虚数，可得螺线轨道. 当本征值为纯虚数时，轨道为环绕原点的闭曲线.

(iii) 当且仅当本征值是实数值且符号相反时，均衡点是一个鞍点.

(iv) 当且仅当本征值是实数值且符号相同时(包括相等实根的情况)，均衡点是一个结点.

既然轨道类型决定性地取决于本征值，有必要回顾它们的表达式

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2}\left[(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})}\right] \tag{16}$$

据此易观察出

$$\lambda_1 + \lambda_2 = (a_{11} + a_{22}), \lambda_1\lambda_2 = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \tag{80}$$

回忆 H 表示线性系统(8)的系数矩阵,可将(80)改写为

$$\lambda_1+\lambda_2=H\text{的迹},\lambda_1\lambda_2=\text{行列式}|H| \tag{80'}$$

事实上,这种关系通常对一个 $n\times n$ 矩阵成立.另外注意不论本征值是实的还是复的,这种关系均成立.通过(80′)和定理 7.3,容易得出如下结论:

【定理 7.4】 对于线性系统(8)的均衡点(0,0),可推断出如下结果:

(i) 均衡点是渐近全局稳定的,当且仅当 H 的迹<0 且行列式$|H|>0$,其中 H 为(8)的系数矩阵.

(ii) 当且仅当行列式 $H<0$ 时,均衡点是鞍点.

注:上述定理的命题(i)与前一章的定理 6.5 相同.现在的论述为其提供了证明.命题(ii),尽管有时非常有用,但在著作中不为人所熟知.[9]

407

注:近来,流行的某些经济学家中的观点认为,鞍点的非稳定性是稳定的.正如 Sargent 和 Wallace(1973)的一篇著名的文章中的情况,将注意力集中在鞍状轨迹的稳定支上将支持这一观点.本文的作者不同意这种观点.

所有关于轨道形式的重要信息都包含在系数矩阵的迹和行列式.因而令

$$p\equiv H\text{的迹},q\equiv\text{行列式}|H|$$

或者

$$p\equiv a_{11}+a_{22},q\equiv a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

回忆特征方程可借助 p 和 q 改写为

$$\lambda^2-p\lambda+q=0 \tag{15}$$

从而本征值可表为

$$\lambda_1,\lambda_2=\frac{1}{2}[p\pm\sqrt{p^2-4q}] \tag{16'}$$

由 $p^2-4q=0$ 确定的(p,q)轨迹在$(p-q)$平面上定义了一条抛物线(见图 7.8).在抛物线以上的区域,$p^2-4q<0$,根是复数.在这个区域,除非 $p=0$,均衡点是一个螺线极点,而如果 $p=0$(同时 $q>0$)时,均衡点是中心.另一方面,在抛物线以下的区域,根是实数.特别地,如果 $q<0$,均衡点是鞍点.如果在抛物线以下区域 $q>0$,均衡点为一结点.在抛物线上任意一点处,又可获得一个结点(可以是一个正常结点).最后,当且仅当 $p<0$ 及 $q>0$,均衡点是渐近稳定的.注意到由于系数矩阵 H 假定为非奇异的,这就排除了 $q=0$ 的可能性.本段中提出的论点在图 7.8 中有总结和图解.

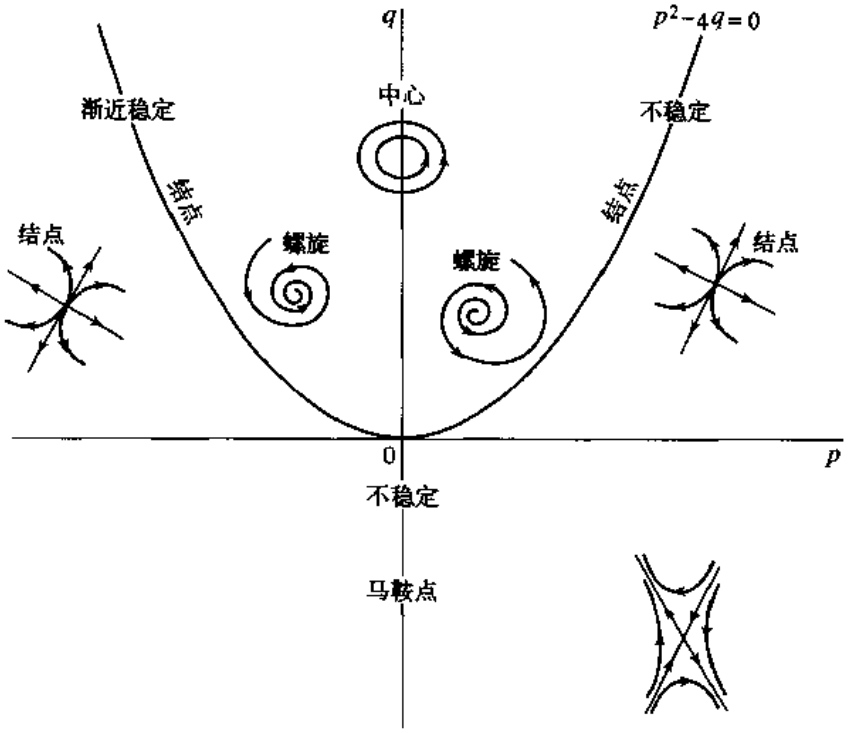


图 7.8　轨道的模式

§7.4　非线性系统

7.4.1　平面轨道的局部行为

考虑一个非线性系统

408

$$\dot{x}=f_1(x,y),\dot{y}=f_2(x,y) \tag{81}$$

其中假定 f_1 和 f_2 连续可微. 更进一步,假定原点是(81)的一个均衡点,即

$$f_1(0,0)=0 \text{ 及 } f_2(0,0)=0 \tag{82}$$

注意系统(81)中的均衡点可能不惟一. 因此我们假定存在一个关于原点的邻域(或一个圆),其中没有其他均衡点. 这个原点称为孤立均衡点.[10]

409　现在关于原点以泰勒级数展开 $f_1(x,y)$ 和 $f_2(x,y)$. 可得

$$\dot{x}=a_{11}x+a_{12}y+f_1^0(x,y),\dot{y}=a_{21}x+a_{22}y+f_2^0(x,y) \tag{83}$$

其中 $a_{i1}\equiv\partial f_i(0,0)/\partial x$ 和 $a_{i2}\equiv\partial f_i/\partial y, i=1,2$,函数 $f_1^0(x,y)$ 和 $f_2^0(x,y)$ 代表二阶或更高阶的项. 根据函数 f_1 和 f_2 的可微性,可得

$$f_1^0(x,y)=o(z),f_2^0(x,y)=o(z),\text{其中 } z\equiv(x,y) \tag{84}$$

这里 $o(z)$是“Landau 的 o”,即

当 $\|z\|\to 0$ 时,$o(z)/\|z\|\to 0$

注意,这表明 $f_1^0(0,0)=0$ 及 $f_2^0(0,0)=0$,因此(0,0)的确是(83)的一个均衡点.假设

$$a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}\neq 0 \tag{85}$$

满足条件(84)和(85)的非线性系统(81)有时称为均衡点(0,0)邻域中的**殆线性系统**(Almost Linear System).(84)表明函数 f_1 和 f_2 可以很好地分别由线性函数 $a_{11}x+a_{12}y$ 和 $a_{21}x+a_{22}y$ 近似.

现在可以很自然地猜想在均衡点附近(81)的轨迹的定性行为与相关线性系统的轨迹的定性行为相似,该线性系统为

$$\dot{x}=a_{11}x+a_{12}y,\dot{y}=a_{21}x+a_{22}y \tag{86}$$

其中 a_{ij}取自(83).方程(86)的形式与(8)相同.从非线性系统(81)中获取线性系统(86)的过程称为**线性化**.在定理 7.5 中,可看出该猜想在本质上是正确的.[11]

410 **【定理 7.5】(Poincaré)** 如果(86)的均衡点(0,0)属于 7.3 节中描述的三种主要类别之一(即情况(a)同号不等实根,(b)异号实根,(c)有实部的复根),则殆线性系统(81)的均衡点(0,0)在(0,0)的邻域中属于同一种类型.

从本质上说,该定理说明对于零附近的 x 和 y,非线性项 $f_1^0(x,y)$和 $f_2^0(x,y)$很小,不影响由相关线性系统决定的均衡点的稳定性及其类型,但两种情况除外:(a)纯虚数根,(b)根是实值且相等(重根).尽管该定理经常被经济学家认为是理所当然的,但它不是一个平凡的、易证的定理.更进一步,就像定理所阐述的那样,它不一定适合其余两种情况(相等实根和纯虚根).

(0,0)作为(81)的一个均衡点不像看起来那么严格.如果$(x^*,y^*)\neq(0,0)$是(81)的一个均衡点,则定义 u 和 v 为 $u\equiv x-x^*$ 及 $v=y-y^*$,将(83)改写为

$$\dot{u}=a_{11}u+a_{12}v+f_1^*(u,v),\dot{v}=a_{21}u+a_{22}v+f_2^*(u,v) \tag{87}$$

其中 $f_1^*(u,v)\equiv f_1^0(u+x^*,v+y^*)$和 $f_2^*(u,v)\equiv f_2^0(u+x^*,v+y^*)$.显然,(0,0)为(87)的一个均衡点且在(85)下是孤立的.除了符号 x,y 被 u 和 v 取代之外,(87)的线性化产生几乎与(86)相同的线性系统.当(87)存在不止一个平衡点时,我们可以根据相应的线性系统来研究每个平衡点邻域上轨迹的定性行为,这里线性系统是对该均衡点处线性化原系统(81)得到的.

给出定理 7.5,则定理 7.6 的结果可立即得出.

【定理 7.6】 令 $n=2$，这里(86)是关于(81)的线性系统，原点(0,0)是一个均衡点.则(86)的稳定性条件，即

$$a_{11}+a_{22}<0, \text{和 } a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}>0$$

也是(0,0)对原系统(81)是局部稳定的必要条件，前提是(86)的均衡点(0,0)属于第 7.3 节中描述的三大类型[即情况(a)同号不等实根，(b)异号实根，(c)
411 有实部的复根].

因此，如果已知没有得到"两种剩余情况"(相等实根，如零和纯虚根)，则这个稳定性条件(也出现在第 6 章中)也是原系统稳定性的必要条件.这使我们能够通过线性近似系统来使用相应的原理，尽管不容易决定解是否属于两种剩余情况.但最明显的方法就是简单地假定解不属于这两种情况，这在经济学家中间并不鲜见.

7.4.2 非线性系统的稳定性：Liapunov 直接法

现在我们开始讨论 n 维状态下非线性系统的稳定性.这种方法称为**Liapunov 第二方法**或**直接法**，其基础为 Liapunov(1907).由于不需要微分方程解的信息，这种方法称为"直接法".此外，Liapunov(直接)方法提供了一个更全局类型的信息，例如均衡点的渐近稳定性.可以通过构造辅助函数以便于使用它，这依赖于对原非线性系统的线性化.

由于 Liapunov 方法不限于二维情况，我们考虑 n 元一阶非线性微分方程组

$$\dot{x}=f(x)^{[12]} \tag{88}$$

系统(88)是

$$\dot{x}_i=f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n), i=1,2,\cdots,n$$

的简约式.令原点是(81)的一个均衡点，因此

412
$$f(0)=0 \tag{89}$$

Liapunov 直接法的核心是建立一个实值函数 $V(x)$，其中 x 由(88)控制，现在我们提出主要的定理.

【定理 7.7】(**Liapunov 直接法**) 假设存在一个关于系统(88)的实数值、连续可微函数 $V(x)$，使得：

(i) 对所有 $x\neq 0, V(x)>0, V(0)=0$.

(ii) 对所有满足(88)的 $x, dV[x(t)]/dt<0$.

(iii) 当 $\|x\|\to\infty$ 时，$V(x)\to\infty$.

则 $x^*=0$ 是渐近全局稳定的，即 $t\to\infty$ 时，$x(t)\to 0$，而不关初始条件如何.

该定理的动机是这样的：[13]

考虑一个物理系统，其运动法则由(88)给出. 把 $V(x)$ 解释为与状态 x 相关的能量或潜能量. 如果除了一个单一平衡点 x^* 外，能量的变化率对所有可能的状态 x 均为负，则能量将持续减少直到达到最少值 $V(x^*)$，这种情况下任何一个偏离 x^* 的扰动状态 x 都将返回 x^*.

函数 $V(x)$ 称为 **Liapunov 函数**. 具有定理 7.7 条件(i)的性质的实值连续函数称为**正定的**. 作为定理 7.7 的一个解释，考虑 $\dot{x}=-x^3, x\in R$. 定义该系统的 Liapunov 函数为 $V(x)\equiv x^2$. 对于 $x\in R$，条件(i)和(iii)自然满足. 为证明条件(ii)也满足，只要简单地看到对所有 $x\neq 0, dV/dt=2x\dot{x}=-2x^4<0$.

418 因此，均衡点是渐近全局稳定的. 在这个例子中，找到 Liapunov 函数并不很难. 然而，在一个更复杂的问题中，找到一个适合的 Liapunov 函数非常困难.

在实际运用 Liapunov 方法中，定理 7.8 中来自初等代数的结论有时非常有用.

【定理 7.8】 令函数 $V(x,y)$ 给定为

$$V(x,y)=ax^2+bxy+cy^2 \tag{90}$$

则我们有 $V(0,0)=0$，及

(i) 当且仅当 $a>0$ 和 $4ac-b^2>0$ 时，对所有 $(x,y)\neq 0, V(x,y)>0$.

(ii) 当且仅当 $a<0$ 和 $4ac-b^2>0$ 时，对所有 $(x,y)\neq 0, V(x,y)<0$.

该定理的证明非常直接. 该定理的应用由如下取自 Boyce 和 DiPrima (1986,507 页)的例子来说明.

【例 7.6】 令动态系统给定为

$$\dot{x}=-x-xy, \dot{y}=-y-x^2y \tag{91}$$

证明原点(0,0)是渐近稳定的. 我们试用形如(90)的 Liapunov 函数. 让我们试试 $b=0$. 则为对所有 $(x,y)\neq(0,0)$，使 $V(x,y)>0$，根据定理 7.8 必须有 $a>0$ 和 $c>0$. 当 $\|(x,y)\|\to\infty$ 时也有 $V(x)\to\infty$. 进一步，由于 $b=0$，我们有 $V_x\equiv\partial V/\partial x=2ax$ 和 $V_y\equiv\partial V/\partial y=2cy$. 因此，对所有 $(x,y)\neq(0,0)$，

$$\begin{aligned}\dot{V}(x,y)&=V_x\dot{x}+V_y\dot{y}\\&=2ax(-x-xy)+2cy(-y-yx^2)\\&=-[2a(x^2+x^2y^2)+2c(y^2+x^2y^2)]<0\end{aligned}$$

从而 $V(x,y)$ 满足定理 7.7 的所有条件，所以(0,0)是渐近全局稳定的.

得到定理 7.7 的一个"局部"解释有时是便利的. 为研究渐近稳定性，我们常常要求确定稳定性的区域，即运动能被阻止的对均衡点的可容许的偏离. 定理 7.9 提供了这样一个区域.

414 **【定理 7.9】** 假定存在一个关于系统(88)的连续可微的函数 $V(x)$ 和一

个包含原点的非空有界定义域 D，在 D 中 $V(x)<k$，且具有如下性质：

(i) 对所有的 $x\neq 0$，$V(x)>0$，且 $V(0)=0$.

(ii) 对所有满足(88)的 $x(t)\neq 0$，$dV[(x(t)]/dt<0$.

则始于 D 中一点的每个(88)的解当 $t\to\infty$ 时均趋向于原点.

7.4.3 局部渐近稳定性

最后，研究关于非线性系统均衡点的局部渐近稳定性是有价值的. 再次考虑(88)的线性化. 在原点(均衡点)处取 $f(x)$ 的泰勒展开式，我们有

$$\dot{x}=Ax+o(x)，\text{其中 } A\equiv[a_{ij}] \tag{92}$$

$a_{ij}\equiv\partial f_i/\partial x_j$ 在原点处取值. 假定 A 是非奇异的，原点是一个孤立均衡点. 因此，(92)的线性化产生

$$\dot{x}=Ax \tag{93}$$

线性系统(93)的稳定性条件是众所周知的. 二维情况先前已经讨论过. 关于 n 维情况的讨论可见任何一本关于微分方程的教科书. 使用关于线性系统的这样一个稳定性条件和定理 7.8，可得到如下定理 7.10 中大家熟知的结果.

【定理 7.10】(Liapunov) 如果 $x^*=0$ 对线性系统(93)是稳定的，则对原非线性系统(88)也是局部渐近稳定的. 满足初始条件 (x^0,t^0) 的解 $x(t;x^0,t^0)$，当 $t\to\infty$ 时趋近于 $x^*=0$，只要 x^0 位于原点的某一邻域上.

尽管该定理需要一个非平凡的证明，许多经济学家还是在某种程度上认为它是理所当然. 然而，一旦我们建立了 Liapunov 直接方法(定理 7.7)，该定理的证明立刻可得. Kalman 和 Bertram(1960，383－384 页)提供了这样的证明.

▶ 练习题

415

练习以下一组题有助于我们理解本章的内容：

(1) 在下面的问题中，区分均衡点(0，0)(如：结点，鞍点，螺线极点，等等)，并确定它们是渐近稳定的还是不稳定的.

(a) $\dot{x}=3x-2y$，$\dot{y}=2x-3y$

(b) $\dot{x}=2x-y$，$\dot{y}=x-y$

(c) $\dot{x}=y$，$\dot{y}=-2x$

(d) $\dot{x}=x-4y$，$\dot{y}=4x-7y$

(e) $\dot{x}=x-3y$，$\dot{y}=4x-5y$

(f) $\dot{x}=3x-2y$，$\dot{y}=4x-y$

在没有明显获得本征值的情况下回答(a),(b)和(c).

(2)考虑常系数线性微分方程组

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

其中系数矩阵假定为非奇异的.

(a) 令 λ_1 和 λ_2 为本征值.令 $p \equiv a_{11} + a_{22}$ 及 $q \equiv a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

(i) 根据 p 和 q,求关于 λ_1 和 λ_2 的表达式.

(ii) 假定 λ_1 和 λ_2 是实数值且相异,写出该系统通解的表达式,其中(A_1,B_1)和(A_2,B_2)分别是关于 λ_1 和 λ_2 的本征向量.

(b) 显然,原点(0,0)是以上系统的均衡点.下面情况中的均衡点称为什么?

(i) λ_1 和 λ_2 是不等实数值,符号相反.

(ii) λ_1 和 λ_2 是不等实数值,符号相同.

(iii) λ_1 和 λ_2 是复数值(但不是纯虚数).

(iv) λ_1 和 λ_2 是纯虚数.

(c) 指出平衡点成为鞍点的充分必要条件.

(3) 考虑平面上的下述系统

$$\dot{x} = x + y, \dot{y} = 4x - 2y$$

(a) 求本征值的表达式.这种情况下均衡点(0,0)是什么,结点,星形结点,螺线极点,还是一个中心?它是渐近全局稳定的吗?

(b) 使用相图技术,图示解的轨道.别忘了求两条对轨道来说是渐近的"关键直线".

(c) 系统的通解为

$$x = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t}, y = -4c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t}$$

当初始条件为对 $t=0, x=1, y=1$ 成立时,c_1 和 c_2 的值是多少?

(4) 考虑平面上的下述系统

$$\dot{x} = -x + 2y, \dot{y} = -2x - y$$

和

$$\dot{x} = 3x - 4y, \dot{y} = x - y$$

并回答与问题(3)的(a)、(b)、(c)相同的问题.

▶ 注 释

[1]根据矩阵代数,如果仅当 $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ 时,$c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + \cdots +$

$c_n x^{(n)}=0$ 成立，n 个向量 $x^{(1)},x^{(2)},\cdots,x^{(n)}$ 是**线性无关**的. 相反，如果存在常数 c_i 使得对某 i，$c_i\neq 0$，则这些 n 维向量是线性相关的. 当且仅当 $x^{(1)}$，$x^{(2)},\cdots,x^{(n)}$ 为线性无关时，矩阵 $X\equiv[x^{(1)},x^{(2)},\cdots,x^{(n)}]$ 是非奇异的，或等价地，当且仅当矩阵行列式不为零时它是非奇异的. 因此，这两种性质也能用作为非奇异矩阵的定义性质.

[2]当矩阵 $X(t)$ 非奇异时，它被称为一个**基本矩**阵.

[3]回忆上一章中的例 6.3.

[4]如果某些个(非零)本征向量的本征值等于零，则系数矩阵 H 一定是奇异的(现在的论述排除了这一点).

[5]在复数理论中，一个复数 z 的指数函数和三角函数根据如下无穷级数来定义：

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

注意，z 为一实数时，这些关系也成立. 在这些等式中，令 $z=i\theta$，可得本文中使用的 Euler 公式.

[6]该例摘自 Boyce 和 DiPrima(1977,313～315 页).

[7]该例及其随后阐述摘自 Simmons(1972,280～282 页).

[8]这样一个平面叫做**位相平面**. 系统(8)或其相应的非线性系统的满足一定初始条件的一个解定义了位于相平面上的一条曲线. 如果这样一个解 (x,y) 不是常量，它就指一条**路径**或**轨道**.

[9](ii)的证明如下. 如果 $q\equiv$行列式$|H|<0$，本征值都必须为实数值. 由于 $q=\lambda_1\lambda_2$，λ_1 与 λ_2 的符号相反，因此(0,0)为一鞍点. 相反地，如果(0,0)是鞍点，λ_1 和 λ_2 为异号实数值，因此 $q<0$.

[10]在线性微分方程组的情况下，系数矩阵是非奇异的假定确保了均衡点的惟一性，这也表明均衡点是孤立的.

[11]关于该定理的简述，见 Simmons(1972,325～327 页)，Boyce 和 DiPrima(1986,475～482 页). 另见 Hurewicz(1958,86～98 页)和 Cesari(1959,156～163 页). Cesari(1959,159 页)称该定理为“Poincaré 的主要结论”. 此外，Simmons(1972)包含了对微分方程理论作出过重大贡献的数学家们的生动传记. 关于 Poincare，见 Simmons(1972,346～349 页)，其中 Simmons 写道：“在 20 世纪初，Jules Henri Poincaré(1854—1912)是举世公认的他那个时代最伟大的数学家.”(346 页).

[12]正如先前提及的，这种系统称为自控(Auto nomous)系统. 如果系统确定为

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{88'}$$

它称为非自控系统. 如果对所有 t, $f(x^*, t) = 0$, 则 x^* 称为非自控系统的**均衡点**. Liapunov 直接法也适用于建立非自控系统均衡的稳定性.

[13]这个动机来自 Kalman 和 Bertram(1960), 它清楚地阐述了稳定性理论和 Liapunov 直接法. 许多关于微分方程的教科书也有对 Liapunov 直接法的精彩阐述. 例如, 见 Lefschetz(1977, 112 ~ 122 页), Simmons(1972, 316 ~ 322 页); Boyce 和 DiPrima(1986, 499 ~ 509 页)和 Pontryagin(1962, 26 节). 另见 Takayama(1985, 347 ~ 358 页)和 Henry(1987).

▶ 参考文献

有很多关于普通微分方程组和线性与非线性系统的优秀教科书及文献, 这里只列举其中的一些。

417 Arnold, V. I. 1978. *Ordinary Differential Equations*. Trans. By R. A. Silverman. Cambridge, Mass.: MIT Press.

Boyce, W. E., and R. C. DiPrima. 1986. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. 4th ed. New York: Wiley. (1st ed. 1965, 2d ed. 1969, 3d ed. 1977.)

——. 1986. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. 4th ed. New York: Wiley.

Brock, W. A., and A. G. Malliaris. 1989. *Differential Equations, Stability, and Chaos in Dynamic Economics*. Amsterdam: North-Holland.

Cesari, L. 1959. *Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations*. Vol. 1b of *Ergebnisse der Mathematik and Ihrer Grenzgebiete*. Berlin: Springer Verlag.

Davies, T. V., and E. M. James. 1966. *Nonlinear Differential Equations*. Reading, Mass.: Addison-Wesley.

Hahn, W. 1967. *Stability of Motion*. New York: Springer Verlag.

Henry, C. 1987. "Lyapunov Function." In *The New Palgrave*, ed. J. Eatwell, M. Milgate, and P. Newman, Vol. 3, 256 - 59. London: Macmillan.

Hirsch, M. W., and S. Smale. 1974. *Differential Equations, Dynamic Systems, and Linear Algebra*. New York: Academic Press.

Hurewicz, W. 1958. *Lectures on Ordinary Differential Equations*. Cambridge, Mass.: MIT Press.

Kalman, R. E., and J. E. Bertram. 1960. "Control System Analysis and Design via the 'Second Method' of Liapunov, I: Continuous Time System." *Journal of Basic Engineering* 82(June): 371 - 93.

Kaplan, w. 1958. *Ordinary Differential Equations*. Reading, Mass.: Addison-Wesley.

La Salle, J. P., and S. Lefshetz. 1961. *Stability by Liapunov's Direct Method with Applications*. New York: Academic Press.

Lefschetz, S. 1977. *Differential Equations: Geometric Theory*. New York: Dover Publications. (Based on the 2d ed. 1963.)

Liapunov, A. M. 1907. "Problème général de la stabilité du movement." *Annales de la Faculté de Science de L'Université de Toulouse* 9: 203 – 44. Reprinted in *Annals of Mathematical Study*, no. 17 (1949). Princeton, N. J.: Princeton University Press.

Petrovski, I. G. 1966. *Ordinary Differential Equations*. Trans. R. A. Siverman. Englewood Cliffs, N. J: Prentice-Hall.

Pontryagin, L. 1962. *Ordinary Differential Equations*. Trans. from the 1961 Russian original. Reading, Mass.: Addison-Wesley.

Simmons, G. F. 1972. *Differential Equations*. New York: McGraw-Hill.

Sargent, T., and N. Wallace. 1973. "The Stability of Models of Money and Growith with Perfect Foresight." *Econometrica* 41 (November): 1043 – 48. (Not a reference on differential equations per se.)

418 Takayama, A. 1985. *Mathematical Economics*. 2d ed. New York: Cambridge University Press. (Not a reference on differential equations per se.)

Yoshizawa, T. 1967. *Introduction to Differential Equations* (in Japanese). Tokyo: Asakura-Shoten.

第 8 章　宏观均衡和新古典增长模型

419　本章我们更多地介绍微分方程理论在某些宏观经济问题中的运用.我们使用的基本工具是相图技术,平面线性微分方程理论和 Poincaré 定理.

§8.1　静态宏观均衡及其稳定性[1]

应用于宏观经济学中一个简单的实例可以在第六章中对宏观均衡稳定性的论述中找到(特别是与命题 6.4 相关的部分).我们将 $IS-LM$ 宏观调节过程描述为

$$\dot{Y}=a[E(Y-T,r)+G-Y]\equiv\phi(Y,r) \tag{1a}$$

$$\dot{r}=b[L(Y,r)-M/p]\equiv\psi(Y,r) \tag{1b}$$

其中,Y=产出,r=利率,E=消费加上投资支出,G=政府支出,T=税收减去转移支付,L=货币需求,M=货币供给,p=价格水平.这里,G,M,p 和 T 假定是固定的.参数 a 和 b 分别代表商品市场和货币市场的调节速度.宏观均衡可定义为满足

$$\varphi(Y^*,r^*)=0\text{ 和 }\psi(Y^*,r^*)=0\text{ 的}(Y^*,r^*) \tag{2}$$

420 这不过是 IS 和 LM 曲线的交点.

为研究(1)的轨迹,我们加上如下假定:

对所有的 Y 和 r,$0<E_Y<1, E_r<0, L_Y>0, L_r<0$ (3)

其中,$E_Y \equiv \partial E/\partial(Y-T)$,$E_r \equiv \partial E/\partial r$ 等等.然后,我们可计算出对所有的 Y 和 r,有

$$\phi_Y = a(E_r - 1) < 0, \varphi_r = aE_r < 0 \tag{4a}$$

$$\psi_Y = bL_Y > 0, \psi_r = bL_r < 0 \tag{4b}$$

其中,$\phi_Y \equiv \partial\varphi/\partial Y$,$\phi_r \equiv \partial Y/\partial r$ 等等.如果投资和消费是完全无弹性的,我们有 $E_r=0$,因此 $\phi_r=0$.在**流动性陷井**下,有 $L_r \to -\infty$,因此 $\psi_r \to -\infty$.因此,对于这种极端状态,我们有

$$\phi_r = 0 \text{ 和/或 } \psi_r \to -\infty, \text{同时 } \phi_Y < 0, \psi_Y > 0 \tag{4'}$$

则 $\phi=0$ 曲线和 $\psi=0$ 曲线的斜率分别为

$$\left.\frac{dr}{dY}\right|_{\phi=0} = -\frac{\phi_Y}{\phi_r} < 0, \quad \left.\frac{dr}{dY}\right|_{\psi=0} = -\frac{\psi_Y}{\psi_r} > 0 \tag{5}$$

这样,在假设(3)下,($\phi=0$)曲线向下倾斜,($\psi=0$)曲线向上倾斜,图 8.1 中有图解.这两条曲线分别对应于熟悉的 *IS* 和 *LM* 曲线.另外根据(4)可得出这样的结论:($\phi=0$)线的左边(或右边)$\dot{Y}>0$(或 $\dot{Y}<0$),($\psi=0$)曲线的右边(或左边)$\dot{r}>0$(或 $\dot{r}<0$)[2].

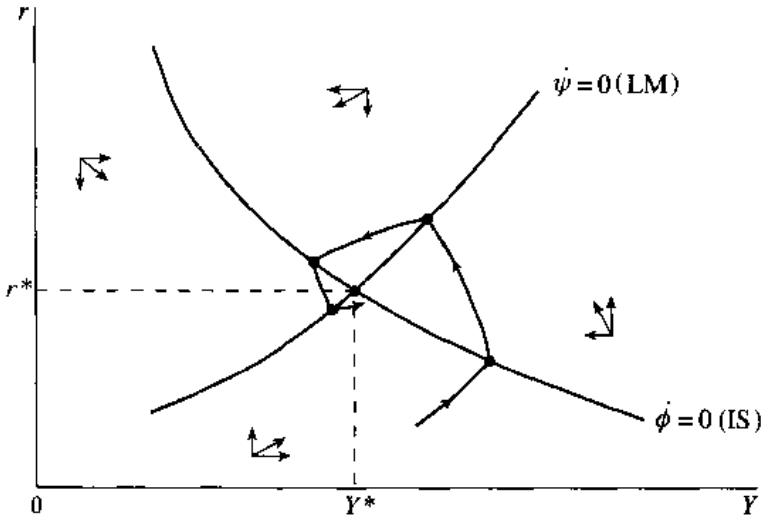


图 8.1 静态宏观均衡的调节路径:螺线极点情况

考虑(1)的线性近似系统

$$\dot{Y} = \phi_Y^*(Y - Y^*) + \phi_r^*(r - r^*) \tag{6a}$$

$$\dot{r} = \phi_Y^*(Y - Y^*) + \phi_r^*(r - r^*) \tag{6b}$$

其中星号(*)表示偏导数在(Y^*, r^*)处赋值.

421 正如前一章的讨论,轨迹的形状主要取决于相应的线线性近似系统的本征值.然后我们将(6)的特征方程写成

$$\lambda^2 - \alpha\lambda + \beta = 0$$

其中

$$\alpha \equiv \phi_Y^* + \psi_r^*, \text{且 } \beta \equiv \phi_Y^*\psi_r^* - \psi_Y^*\phi_r^* \tag{7}$$

可得到本征值为

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2}[\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}]$$

我们可看到

$$\begin{aligned}\alpha^2 - 4\beta &= (\phi_Y^* + \psi_r^*)^2 - 4(\phi_Y^*\psi_r^* - \psi_Y^*\phi_r^*) \\ &= (\phi_Y^* - \psi_r^*)^2 + 4\psi_Y^*\phi_r^* \\ &= [a(1 - E_Y^*) - bL_r^*]^2 + 4abL_Y^*E_r^*\end{aligned}$$

422

由于$a<0$,λ_1和λ_2不能为纯虚数.因此排除$\alpha^2 - 4\beta = 0$的刀刃情况(有重实根的情况),在(Y^*, r^*)的一个邻域中(1)的轨迹的行为可以被其线性近似系统所近似(参看定理7.5,Poincare定理)[3].当且仅当

$$[a(1 - E_Y^*) - bL_r^*]^2 + 4abL_Y^*E_r^* < 0 \tag{8a}$$

时,它是一个**螺线极点**;当且仅当

$$[a(1 - E_Y^*) - bL_r^*]^2 + 4abE_r^*L_Y^* > 0 \tag{8b}$$

时,它是一个结点.其中,在(8a)的情况下,本征值是复数值但不是纯虚值;在(8b)情况下,它们是同号相异的实数值.假设(8a)成立,可在图8.1中给出关于(1)的轨迹(Y, r),其中(Y^*, r^*)是螺线极点.

凯恩斯主义倾向于保持一个较低的E_r值(其中$E_r = 0$代表利息完全无弹性的消费和投资)和/或者一个较高的L_r值(其中$L_r \to -\infty$代表流动性陷阱).在这种情况下,(8b)的不等式能够成立,均衡点将是一个结点.当$E_r = 0$时,IS曲线是垂直的,而当$L_r \to -\infty$时,LM曲线是水平的.图8.2描绘了这两种情况下的调节轨迹,根据Olech定理其中均衡点是渐近全局稳定的.

另一方面,货币主义者倾向于分配一个低值给L_r(其中$L_r = 0$代表古典数量理论)而分配一个高值给E_r.在这种情况下,(8a)更可能得到满足,这时均衡点变成螺线极点,调节轨迹表现为一种循环运动.图8.1已标明其图解.总之,满足(1)的调节轨迹的行为主要依赖于(3)中确定的参数的值.根据

423 (8a),也可推断出调节轨迹的行为取决于a和b的相对大小——调节的速度大小.

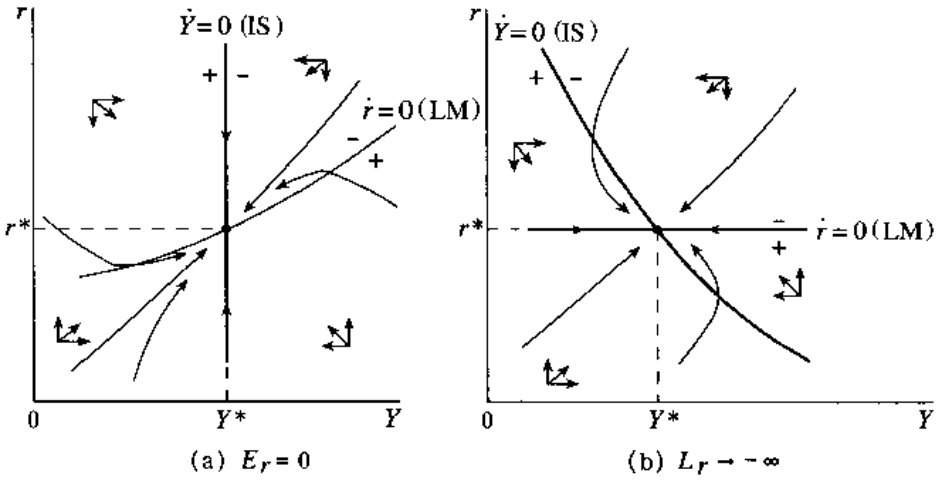


图 8.2　凯恩斯调节路径:极端情况

我们将这些结论总结如下:

【命题 8.1】 货币主义者倾向于认为宏观均衡点(Y^*,r^*)为螺线极点,而凯恩斯主义者倾向于认为它是一个结点,这些情况下的轨迹在图 8.1 与图 8.2 中有图解.

§8.2　货币与增长——第一部分[4]

自从 Tobin 开创性的著作(1965)将货币纳入 Solow－Swan 增长模型中,"货币和增长"模型已经得到深入的讨论.这里我们阐述这些论述的要点.这将提供微分方程理论一个有用的应用.

8.2.1　模型

我们考虑生产一种消费——投资商品(Y)的总量经济,使用两种要素,劳动力(N)和资本(K),在规模收益不变和报酬递减的技术下,我们将该经济的
424　生产函数写成

$$Y=F(N,K)\text{或 } y=f(k) \tag{9}$$

其中,$y\equiv Y/N$,$k=K/N$,我们加上如下通常的假设:

$$\text{对所有的 } k>0,f'(k)>0 \text{ 和 } f''(k)<0; \tag{10a}$$

$$f'(0)=\infty,f'(\infty)=0 \text{ 及 } f(0)=0 \tag{10b}$$

我们确定对名义现金余额的需求函数为[5]

$$L(pY, r, W^n) = l(pY, r)W^n \tag{11}$$

货币均衡关系可写成

$$M = l(pY, r)W^n \tag{12}$$

其中，M = 名义现金余额的供给，p = 价格水平，r = 实物资产的名义收益率，W^n = 公众(家庭和公司)的净价值(或"财富")的名义值.我们有理由假定

$$l_1 \equiv \partial l/\partial(pY) > 0, l_2 \equiv \partial l/\partial r < 0, 0 < l < 1 \tag{13}$$

令 z 为预期的价格变化率并假定它与实际的价格变化率相等，即 $z = \dot{p}/p \equiv \pi$，其中点代表时间导数.该假定称**缺乏远见的完美预测**(这种期望是自我实现的，在非随机框架下，它们实际上与理性预期等价).这样，我们有

$$r = f'(k) + \pi \tag{14}$$

此时假定了资源的充分利用.实物资产的名义收益率(r)等于实物资产的边际生产力$f'(k)$加上由于价格变化而导致的持有实物资产的资本所得或资本损失(π).假定实物资产和货币(这里假定为财政部库券)为经济中仅有
425 的二种资产，则我们可得

$$W^n \equiv pK + M \tag{15}$$

根据 Tobin(1965)和许多关于该论题的著作，我们忽略了实物资产和本期产出两个值的估价之间可能的偏差.将(14)和(15)代入(12)中，注意到函数 L 在没有货币错觉的情况下关于 pY 和W^n是一阶齐次的，可得

$$m = l[f(k), f'(k) + \pi](m + k) \tag{16}$$

其中 $m \equiv M/(pN)$，人均实际现金余额.我们可将(16)改写成

$$m = \lambda(k, \pi)k，其中\ \lambda \equiv l/(1 - l) \tag{17}$$

另外根据 $l_1 > 0$ 和 $l_2 < 0$，可得[6]

$$\lambda_k \equiv \partial\lambda/\partial k > 0 和\ \lambda_\pi \equiv \partial\lambda/\partial\pi < 0 \tag{18}$$

凭直觉，$\lambda_\pi < 0$ 意味着通胀率的下降将使持有货币比实物资产更有吸引力，从而提高了货币需求.注意($-\pi$)代表对 Irving Fisher 所说的货币的实际收益率.

令 C 和 I 分别为实际消费和实际投资.为简单起见，排除政府在商品和劳务上的支出，这样商品市场中的均衡可写成

$$Y = C + I \tag{19}$$

遵循关于货币增长著作中的方法，我们假定投资是完全"被动的"，即"储蓄"($= Y - C$)自动带来一个相等数量的投资.换句话说，投资 I 自动地调节以使

426 货币市场保持均衡[7].遵循许多有关该题目的著作中的方法,我们假定 C 为(实际)"可支配收入" Y^D 的一个固定部分,即

$$C=(1-s)Y^D, 0<s<1 \tag{20}$$

为得到"可支配收入" Y^D 的表达式,我们首先观察

$$Y^D\equiv C+\dot{W} \tag{21}$$

其中 $W\equiv W^n/p$,点代表时间导数.由于 $W\equiv W^n/p$ 及 $W^n\equiv pK+M$,我们有 $\dot{W}=\dot{K}+(\theta-\pi)M/p$,其中 $\theta\equiv\dot{M}/M$.注意,若不计贬值可得 $\dot{K}=I$,再使用(21),便有

$$Y^D\equiv C+I+(\theta-\pi)M/p \tag{22}$$

货币供给(θ)的变化率是由政策制定机构控制的外生变量.将(19)代入(22),可得到所需的关于 Y^D 的表达式

$$Y^D=Y+(\theta-\pi)M/p \tag{23}$$

427 这意味着可支配收入等于要素收入 Y 加上政府向公众转移的实际现金余额($\theta M/p=\dot{M}/p$)减去由于通货膨胀给持有现金余额所带来的资本损失($-\pi M/p$),这里($-\pi$)代表货币的实际收益率.

结合(19),(20)和(23)可得

$$I=sY-(1-s)(\theta-\pi)M/p. \tag{24}$$

实物资产的基本累积等式为 $I=\dot{K}$.假定人口以不变的比率 n 增长,其中 $\dot{N}/N=n$,则可将实资产的累积等式改写为

$$\dot{k}=I/N-nk \tag{25}$$

结合(24)和(25),可得

$$\dot{k}=sf(k)-(1-s)(\theta-\pi)m-nk \tag{26}$$

其中 $m\equiv M/(pN)$.把(17)代入(26),除以 k,可得

$$\dot{k}/k=\phi(k,\pi)\equiv h(k)-(1-s)(\theta-\pi)\lambda(k,\pi)-n \tag{27}$$

其中 $h(k)\equiv sf(k)/k$.

其次,根据 $m\equiv M/(pN)$,我们得到

$$\dot{m}/m=\theta-\pi-n \tag{28}$$

此外,在(17)式两端先取对数,再微分,我们有

$$\dot{m}/m=(\lambda_k\dot{k}+\lambda_\pi\dot{\pi})/\lambda+\dot{k}/k \tag{29}$$

因此,把它与(27)和(28)结合,可得

$$\dot{\pi} = \psi(k,\pi) \equiv a(k,\pi)[(\theta - \pi - n) - b(k,\pi)\phi(k,\pi)] \tag{30}$$

其中 $a(k,\pi) \equiv \lambda/\lambda_\pi < 0$ 和 $b(k,\pi) \equiv 1 + \lambda_k k/\lambda > 1$.

8.2.2 定 态

方程(27)和(30)组成了微分方程组,它决定了(k,π)的时间路径.在(27)
428 和(30)中设 $\dot{k} = \dot{\pi} = 0$,可定义(k,π)的定态值[8]

$$\phi(k^*,\pi^*) = 0 \text{ 和 } \psi(k^*,\pi^*) = 0 \tag{31}$$

在定态,我们有

$$\pi^* = \theta - n \tag{32}$$

因此,根据(28)有 $\dot{m} = 0$.在定态,资本—劳动力比率,人均实际现金余额和价格变化率均变成固定的.一旦根据(31)得到了 k^* 和 π^*,m 的定态值可以很容易地得到.由(17)知

$$m^* = \lambda(k^*,\pi^*)k^* \tag{33}$$

这样,我们可以得到如下结果:

【引理】 在 k 和 π 均稳态的定态下,m 也是稳态的[9].价格变化的定态值(π^*)等于货币供给的增长率(θ)减去人口增长率(n).

接下来,将(32)代入(27),在定态中可得

$$h(k) = [(1-s)\lambda(k,\pi^*) + 1]n \tag{34}$$

其中 $\pi^* = \theta - n$.回忆 $\lambda_k > 0$ 及注意 $h'(k) = -s(f - kf')/k^2 < 0$[10],我们在图 8.3 中给出了 k 的定态值.根据图 8.3,k 的定态值如果存在,则显然是惟一的.在本文中,注意到 $h(0) = \infty$ 和 $h(\infty) = 0$,以及对所有的 $k > 0$,$h'(k) < 0$.只要 $\lambda(k,\pi^*)$对充分低的 k 值有定义,就可以确保 k^* 的存在.

根据(32),容易观察到 θ 的增长增加了 π 的定态值.由于 $\lambda_\pi < 0$,π 的定态值的增长将图形 8.3 中的曲线$[(1-s)\lambda + 1]n$ 垂直下降.由于 $h' < 0$,$\lambda_k > 0$,
429 $\lambda_\pi < 0$,定态下对(34)微分并且回忆 $d\pi = d\theta$,可得

$$dk/d\theta = (1-s)n\lambda_\pi/[h' - (1-s)n\lambda_k] > 0 \tag{35}$$

这样我们导出了命题 8.2 中的结论.[11]

【命题 8.2】(Tobin,1965) 货币供给增长率的提高不但会使价格变化率的定态值(π^*)提高,而且还会提高资本—产出比率的定态值(k^*).

该命题可解释如下.货币供给增长率的提高降低了货币的实际收益率$(-\pi)$,这进一步通过使实物资产比持有货币更具吸引力而导致资产由货币

转向实物资产.这表明货币变量的变化引起实际变量例如 k 的变化,这使一些习惯按照货币中性的新古典教条思考的经济学家感到惊奇.另一方面,上面的命题应该与通常的中性学说相区别,后者涉及的是名义现金余额水平(而不是变化率)的变化对实际变量的影响.因而命题 8.2 经常被称作是宣称货币不是**超中性的**(而非只是中性的).

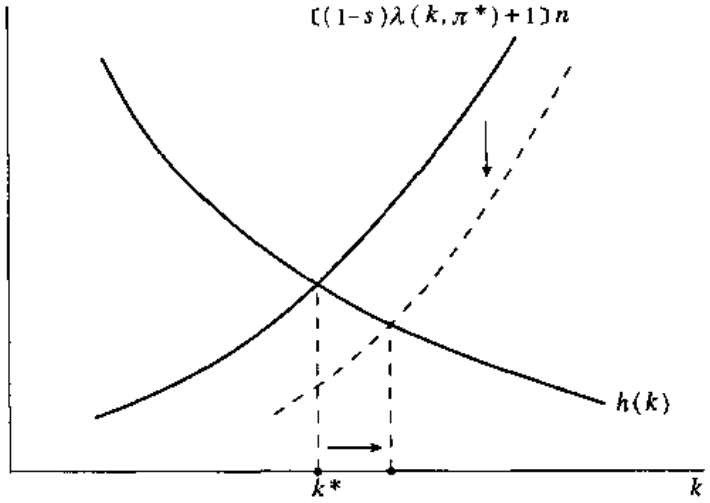


图 8.3　k 的定态值

8.2.3　稳定性与不稳定性

除非定态是稳定的,否则前面关于定态的比较静态学运用是毫无意义的.特别地,我们需要研究随着时间无限地延伸,在方程(27)和(30)的动态系统定义下(k,π)的时间轨迹是否收敛于定态.我们研究该问题和(k,π)的动态行为.关于后者,在(k,π)平面上建立一个相图.我们假定 θ 的值固定在一个特定水平上.

为研究模型的动态行为,根据(27)和(30)我们算得函数 ϕ 和 ψ 的偏导数为

$$\phi_k \equiv \partial\phi/\partial k = h' - (1-s)n\lambda_k < 0 \tag{36a}$$

$$\phi_\pi \equiv \partial\phi/\partial\pi = (1-s)(\lambda - n\lambda_\pi) > 0 \tag{36b}$$

$$\psi_k \equiv \partial\psi/\partial k = -ab\phi_k < 0 \tag{37a}$$

$$\psi_\pi \equiv \partial\psi/\partial\pi = -a(1+b\phi_\pi) > 0 \tag{37b}$$

以上这些偏导数在 $\dot{k}=\dot{\pi}=0$ 的定态取值.在得到(36)的过程中,我们利用了当 $\dot{k}=\dot{\pi}=0$ 时,$\theta-\pi=n$ 这一事实.

根据(36)和(37)有

$$J \equiv \phi_k \psi_\pi - \psi_k \phi_\pi$$

$$= -a\phi_k(1 + b\phi_\pi) + ab\phi_k\varphi_\pi = -a\phi_k < 0 \tag{38}$$

Jacobian 行列式在定态的值因而为负. 据此可推断出定态为一个鞍点,因此它是不稳定的.

为确定(k,π)轨迹的动态行为,我们现在使用相图技术. 定义$(\dot{k}=0)$曲线为(k,π)的轨迹,沿此轨迹 $\phi(k,\pi)=0$. 则它在定态处的斜率为

$$\left.\frac{d\pi}{dk}\right|_{\dot{k}=0} = -\frac{\phi_k}{\phi_\pi} > 0 \tag{39}$$

431 类似地,定义$(\dot{\pi}=0)$曲线为(k,π)的轨迹,沿此轨迹 $\psi(k,\pi)=0$. 则可发现它在定态处的斜率为

$$\left.\frac{d\pi}{dk}\right|_{\dot{\pi}=0} = -\frac{\psi_k}{\psi_\pi} > 0 \tag{40}$$

另外,使用(38),在定态处我们有

$$-\frac{\phi_k}{\phi_\pi} > -\frac{\psi_k}{\psi_\pi}, \text{或} \left.\frac{d\pi}{dk}\right|_{\dot{k}=0} > \left.\frac{d\pi}{dk}\right|_{\dot{\pi}=0} \tag{41}$$

在定态处,$(\dot{k}=0)$曲线比$(\dot{\pi}=0)$曲线陡峭. 把它与(36)及(37)相结合,可建立相同图 8.4. 这显示了(k,π)的时间路径. 在图 8.4 中,我们阐明了轨道的鞍状行为. 除非适当选择初始状态,否则动态轨迹将从定态处发散开来. Nagatani (1970)获得了类似的结论. Sidrauski(1967,第 807 页)也认识到这一点.

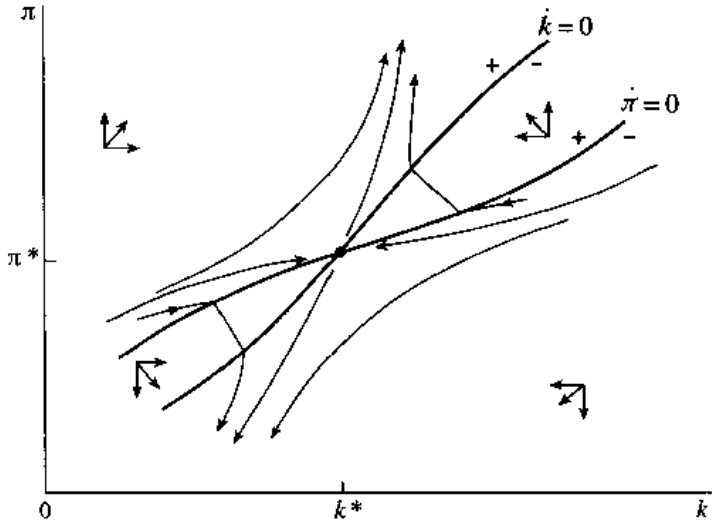


图 8.4 (k,π)的动态行为

432 **【命题 8.3】** 由(27)和(30)的动态系统定义的定态是一个鞍点,因此它是不稳定的.[12](k,π)的轨迹见图 8.4.

这个不稳定的结果严重贬低了关于定态的一些比较静态学的研究价值，例如命题 8.2. 人们已经提出了去除这个不稳定性质的方法. 其中一个重要的方法是在预期中引入滞后调节(Sidrauski 1967). 现在我们来检验这种方法. 该方法的核心是引入**适应性预期机制**

$$\dot{z}=\varepsilon(\pi-z) \tag{42}$$

其中 ε 是正的常数，代表预期的调节速度，z 代表预期价格变化率. 在上面的系统中把 π 换作 z，得到

$$m=\lambda(k,z)k \tag{43}$$

$$\dot{k}/k=\phi(k,z)\equiv h(k)-(1-s)(\theta-z)\lambda(k,z)-n \tag{44}$$

$$\dot{z}=a(k,z)[(\theta-\pi-n)-b(k,z)\phi(k,z)] \tag{45}$$

其中(43)、(44)和(45)分别对应于(17)、(27)和(30). 假定由于(43)左边 p 的适当波动，可以维持货币均衡关系(43)，$m\equiv M/(pN)$. 这也表明(28)事实上也成立.

根据(42)，可得 $\pi=z+\dot{z}/\varepsilon$. 代入(45)中，我们得到

$$\dot{z}=\alpha\psi(k,z)\equiv\tilde{\psi}(k,z), \tag{46}$$

433 其中 $\alpha\equiv 1/(1+a/\varepsilon)[=a(k,z)]$，$a<0$，与前一样 $\psi(k,z)\equiv a[(\theta-z-n)-b(k,z)\phi(k,z)]$. 在预期机制下，方程(44)和(46)建立了基础的动态系统. 假设预期足够地滞后(即 ε 足够地接近零)，因此 $\alpha<0$. 利用(36)，可立即观察到

$$\phi_k<0,\phi_z>0$$

及对所有的 k 和 z，都有

$$\tilde{\psi}_k=\alpha\psi_k>0\tilde{\psi}_z=\alpha\psi_z<0 \tag{47}$$

其中这些偏导数在 $\dot{k}=\dot{z}=0$ 处取值. 因而，在定态处我们有
对所有的 k 和 z，有

$$\phi_k+\tilde{\psi}_z<0 \tag{48a}$$

$$\tilde{J}\equiv\phi_k\tilde{\psi}_z-\tilde{\psi}_k\phi_z=\alpha(\phi_k\psi_z-\psi_k\phi_z)>0 \tag{48b}$$

因此定态现在是渐近全局稳定的. (k,z) 的动态轨迹在图 8.5 中有图解，其中我们利用了(47)和 $J>0$. 根据 $J>0$，可得在定态处

$$-\frac{\phi_k}{\phi_z}>-\frac{\psi_k}{\psi_z},\text{或}\left.\frac{dz}{dk}\right|_{k=0}>\left.\frac{dz}{dk}\right|_{\dot{z}=0} \tag{49}$$

容易证明关于线性近似系统特征方程的本征值是负的相异实数值. 因而，(k^*,z^*) 是一个稳定结点，我们得到命题 8.4 中的结论.

【命题 8.4】(Sidrauski 1967) 如果预期是足够滞后的，则定态是一个结点且是渐近全局稳定的. 特别地，这恢复了命题 8.2 的有效性. 动态系统(44)

和(46)的轨道在图 8.5 中有图解.

适应性预期机制的困难在于实际通胀率(π)和预期通胀率(z)之间的差异.无视这些差异,人们常犯这样的错误,即坚持遵循总是提供错误的预测值的预期形成法则.(42)中的系数 ε 并非是根据与公众的理性行为相一致的方式而得到的,即 ε 看起来完全是预先指定的.[13]

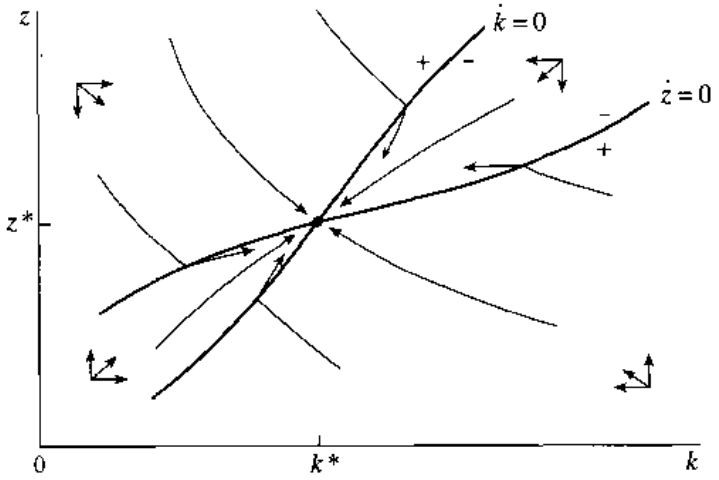


图 8.5　滞后预期下的稳定性

8.2.4　不稳定性的来源

我们现在回到在缺乏远见的完美预测 $\pi=z$ 下得到的原来的不稳定性结果并调查不稳定的来源.为此,我们首先回忆货币均衡关系(17)可写成(参见
434　注释[9]).

$$\pi=\pi(k,m),\text{其中 } \pi_k>0,\pi_m<0 \tag{17'}$$

通过它和(28),可定义函数 μ 为

$$\dot{m}/m=\mu(k,m;\theta)\equiv\theta-\pi(k,m)-n^{[14]} \tag{50}$$

435　使用(50),并定义 $\mu_k\equiv\partial\mu/\partial k$ 和 $\mu_m\equiv\partial\mu/\partial m$,我们得到

$$\mu_k=-\pi_k<0 \text{ 和 } \mu_m=-\pi_m>0 \tag{51}$$

这里 $\mu_m>0$ 意味着货币累积方程(50)对每个固定的 k 是不稳定的.这在图 8.6 中有图解,其中 $\hat{m}=\hat{m}(k)$定义为

$$\pi(k,\hat{m})=\theta-n \tag{52}$$

除非 m 的初始值等于 $\hat{m}$,否则 m 将从 $\hat{m}$ 处发散开来.当 m 等于 $\hat{m}$ 时,π 等于 $\theta-n(=\pi^*)$.当 m 远离 $\hat{m}$ 时,π 也远离 π^*.

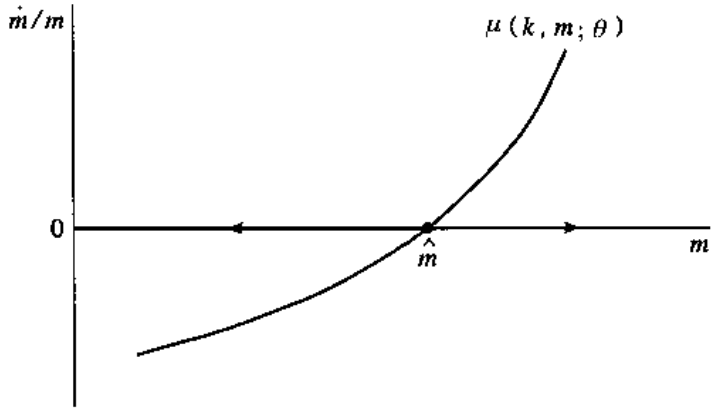


图 8.6　固定 k 时 m 的不稳定性

我们现在更细致地检验 $\hat{m}$ 不稳定性的原因，因为这是 8.2.3 节中在缺乏远见的预测下得到的不稳定性结果的来源. 从(51)中，可立即看出当且仅当 $\pi_m<0$ 时，m 的不稳定性成立. 回忆 $\pi_m=1/(\lambda_\pi k)$，当且仅当 $\lambda_\pi<0$ 时，$\pi_m<0$，进一步地当且仅当 $l_2<0$ 时，$\lambda_\pi<0$ 成立(见注释 6). 具体地，$\pi_m<0$ 指出这
436 样一个事实，货币需求是实物资产名义收益率的减函数，因此是 π 的减函数，即 $\lambda_\pi<0$. 8.2.3 节得到的不稳定性结果的原因是这样的一个事实：人均实际现金余额的增加一定伴随着“通胀率”π 的下降(而不是增加)，以在货币市场中保持均衡，因而导致 $\pi_m<0$. Tobin(1965)称 $\pi_m<0$ 为 **Wicksell 效应**. 在著名的 **Wicksell** 累积过程中人们分析了一种类似的失稳过程.

前面的讨论指明了这样的事实，(在理性预期下)不稳定结果来源于货币的均衡条件. 给定 k 和 m 的值，方程(17)本身就足以决定 π 的短期均衡值，且 $\lambda_\pi<0$. 正如注释 7 所指明的，在通常的两种资产经济中一旦实现了货币均衡，就可自动确保商品市场的均衡. 现在假设除了货币和实物资产外，我们在经济中引入第三种资产，生息证券，则货币均衡不能自动确保商品市场的均衡. 这样，均衡通胀率(π)同时由两种均衡条件决定，一种是关于货币市场的，另一种是关于商品市场的. 在下一节中，我们将系统地分析这种三资产模型并说明我们能够得到稳定性的结果.

§8.3　货币与增长——第二部分[15]

8.3.1　引言

8.2 节的分析基于一个包括两种资产——财政部库券和实物资产的经济，它有三条重要性质：

(a) 预期的价格变化率总是可以实现的(完美的缺乏远见的预测,或理性预测).

437 (b) 个人节约其可支配收入的固定部分 s,或等价地,消费其可支配收入的一个固定部分$(1-s)$.

(c) 货币需求总是等于其供给.

Tobin 推测其模型的定态通常是稳定的.然而,正如前一节阐明的,由于有如下附加规定这种推测是错误的.

(d) 货币供给以固定的比率 θ 增长.

正如 8.2 节中讨论的,在(a)~(d)下的定态上是一个鞍点,因此是不稳定的.

这种不稳定性结果削弱了定态的任何比较静态学研究的价值.随后人们提出了针对这种不稳定性的各种补救措施.Sidrauski 在其论文(1967)中证明,如果(a)由一种适应性预期机制(其中预期调节是"滞后的")所取代,则稳定性是可能的.在保留假定(a)~(c)的同时,Burmeister 和 Dobell(1970,185 页)证明,如果放宽(d)并允许货币存量以一种特定的,不固定的比率增长,则有可能得到稳定性.Hadjimichalakis(1971a,1971b)和 Hadjimichalakis 及 Okuguchi(1979)认为通过对(a)和/或者(c)的适当放宽,可以去除不稳定性.此外,稳定性在各种所谓的 Keynes - Wicksell 货币增长模型中是可能的,该模型放宽了假定(a)且在下述意义下与前述的模型不同,即不同于计划投资,它允许计划储蓄(例如,Rose 1966 和 Stein 1966).

对(a)的放宽已经受到了严肃的批评,因为它几乎是永远容纳不理性的行为,特别是在预期的形成中.另一个由 Sargent 和 Wallace(1973)提出的通行的方法是提倡初始"跳跃"或加上特定的终极条件以使经济保持在鞍状轨迹的稳定枝上.然而,由于该方法排除"偏移路径"的先天特性,因此存在严重的缺陷(回忆注释[12]).

本节的目的是证明即使在保留假定(a)的情况下,货币增长模型的稳定性仍然是可能的.特别地,我们证明如果第三种资产,即债券,被引入到通常的二资产经济中,则在假定(a)~(d)下稳定性是可能的.[16]特别地,我们考虑一下包括三种资产的经济,(财政部)货币,实物资产和生息证券(或债券).货币的

438 供给假定完全由政府控制.另外,我们假定所有的债券均为私人债券.Drabicki 和 Takayama(1984a)中对三种资产经济进行了进一步的分析,其中三种资产经济明显地考虑了银行部门,货币供应的内生性,政府债券以及政府预算赤字或盈余.

正如 8.2 节中指出的,在货币和实物资产的二种资产模型中,价格变化率只由货币市场以这样一种方式决定,即扩张性货币政策必然导致通货紧缩.Wicksell 效应的这样一个后果是人均实际现金余额的不稳定累积方程.这进一步促使并导致了整个系统的不稳定性.当债券作为第三种资产被引入时(三种资产均不能完全相互代替),另外一个内生变量(名义利率)进入了该系统且其均衡值和均衡价格变化率同时由货币和商品市场决定.在这种情况下,我们

可以证明扩张性货币政策造成通货膨胀(至少在定态下).这能导致一个人均实际现金余额的稳定累积方程和一个总体稳定系统.与文献中得到的任何充分条件相比,我们对于稳定性的充分条件是非常弱的.

8.3.2 模型和瞬时均衡

我们再次假定在(9)和(10)所描述的收益递减和规模收益不变的技术条件下,劳动力 N 和资金 K 被充分利用,产出 Y 是齐次性的.除实物资产外,现在假定经济还包括两种其他资产:货币和债券.所有的货币均假定为政府发行的货币,又假定所有的债券都是私人债券(即政府不发行债券).[17]令 M 和 p
439 分别代表名义货币存量和价格水平.在缺少政府债券的情况下,公众的实际财富(W)给定为[18]

$$W \equiv K + M/p \tag{53}$$

这在形式上与(15)一样.令 i 和 $\pi(\equiv \dot{p}/p)$ 各自代表(债券)名义利率和通货膨胀率或价格变化率,货币均衡条件可以确定为[19]

$$\begin{aligned} &M = L[i, f'(k) + \pi, pY, pW] \\ &L_1 < 0, L_2 < 0, L_3 > 0, 1 > L_4 > 0 \end{aligned} \tag{54}$$

其中假定完美的缺乏远见的预测.这里 i 的引入表明资产选择不仅包括货币和实物资产,还涉及到债券.在通常的 L 的齐次性假设下,根据(53)和(54),可得

$$m = L[i, f'(k) + \pi, f(k), k + m] \tag{54'}$$

其中 $m = M/(pN)$(人均实际现金余额).

假定货币供给以固定比率 θ 增长,即[20]

$$\dot{M}/M = \theta \tag{55}$$

商品市场的均衡可确定为

$$Y = C + I \tag{19}$$

其中 C 和 I 分别代表实际消费和投资.假定实际消费是实际可支配收入 Y^D 的一个固定部分,即 $C = (1 - s)Y^D$,其中 $0 < s < 1$.在完美的缺乏远见的预测下,Y^D 可表示为[21]

$$Y^D = Y + (\theta - \pi)M/p \tag{23'}$$

440 这在形式上与(23)相同.不同于 8.2 节,我们没有假定投资是"被动的",即其数量自动调节以保持商品市场中的平衡,而是假定投资需求以如下形式给出[22]

$$I/N = z[i, f'(k) + \pi, y], z_1 < 0, z_2 > 0, 0 < z_3 < s \tag{56}$$

将(19)、(23′)和(56)与 $C = (1-s)Y^D$ 相结合，可得

$$sf(k) = (1-s)(\theta - \pi)m + z[i, f'(k) + \pi, f(k)] \tag{57}$$

这里我们回顾 $y = f(k)$. 方程(57)代表储蓄——投资均衡. 市场出清条件(54′)和(57)决定(给定参数 θ 和 s 值时)π 和 i 的瞬时均衡值为

$$\pi = \pi(k, m), i = i(k, m) \tag{58}$$

我们将决定函数 π 和 i 的偏导数的符号这一任务推迟到附录中考虑. 这里只是简单地叙述基本结论，假定瞬时均衡的稳定性，我们有

$$\pi_k < 0, i_k > 0; \text{如果 } \theta - \pi \geqq 0, \pi_m > 0, i_m < 0 \tag{59}$$

也就是说，资本－劳动比 k(因此人均产出 y)的增加将减少 π 的瞬时均衡值并使 i 的值相应增大. 此外，如果 $\theta - \pi \geqslant 0$，人均实际现金余额的增加也会提高通胀率 π 并降低名义利率 i. (59)中的结论 $\pi_k < 0$ 和 $\pi_m > 0$ 尽管看来很明显，但与(17′)得出的结论完全相反.

8.3.3 长期分析

令 n 为人口增长率(即 $n \equiv \dot{N}/N$)，假定它为正的常数. 那么我们有 $\dot{K} = I$ 或 $\dot{k} = z - nk$，这里为便于阐述而再次假定没有贬值. 利用(57)和(58)可得

$$\dot{k} = sf(k) - (1-s)[\theta - \pi(k, m)]m - nk \equiv \dot{k}(k, m) \tag{60}$$

441

微分 $m \equiv M/(pN)$ 并利用(58)，得到

$$\dot{m} = [\theta - \pi(k, m) - n]m \equiv \dot{m}(k, m) \tag{50′}$$

这在形式上与(50)相同. 注意给定参数 θ，s 和 n 的固定值，条件(60)和(50′)建立了 k 和 m 的微分方程组. 该系统的定态通过令 $\dot{k} = 0$ 和 $\dot{m} = 0$ 来定义. 在定态下，又可得

$$\pi^* = \theta - n \tag{32′}$$

定态的通胀率 $\pi^* \equiv \pi(k^*, m^*)$ 等于货币扩张率减去人口增长率.

现在我们来研究当前系统(60)和(50′)的动态行为. 根据(60)和(50′)，并利用(59)和(32′)，可得

$$\partial \dot{k}/\partial k = sf' - n + (1-s)m\pi_k \tag{61a}$$

$$\partial \dot{k}/\partial m = -(1-s)(n - m\pi_m) \tag{61b}$$

$$\partial \dot{m}/\partial k = -m\pi_k > 0 \tag{62a}$$

$$\partial \dot{m}/\partial m = -m\pi_m < 0 \tag{62b}$$

其中偏导数在定态处取值.

根据(50′)和(62),可得($\dot{m}=0$)曲线在定态处的斜率为

$$\left.\frac{dm}{dk}\right|_{\dot{m}=0} = -\frac{\pi_k}{\pi_m} > 0 \tag{63}$$

因此,($\dot{m}=0$)曲线在定态处向上倾斜.($\dot{k}=0$)曲线在定态处的斜率可以从(60)和(61)求出,它等于

$$\left.\frac{dm}{dk}\right|_{\dot{k}=0} = \frac{-[sf' - n + (1-s)m\pi_k]}{(1-s)(\pi_m m - n)} \tag{64}$$

正如本节附录中证明的,在定态处我们有

$$\pi_m m - n > 0. \tag{65}$$

通过 $sf'(k)-n$ 定义 k,我们有

$$\text{当且仅当 } k \gtreqless \bar{k} \text{ 时}, sf'(k) \lesseqgtr n \tag{66}$$

从(63)到(66),我们可得出结论,只要

$$k \gtreqless \bar{k}, \left.\frac{dm}{dk}\right|_{\dot{k}=0} > \left.\frac{dm}{dk}\right|_{\dot{m}=0} > 0 \tag{67}$$

另外,对 $k \lesseqgtr \bar{k}$,可能有

$$\left.\frac{dk}{dm}\right|_{\dot{m}=0} > \left.\frac{dm}{dk}\right|_{\dot{k}=0}, \left.\frac{dm}{dk}\right|_{\dot{k}=0} \gtrless 0 \tag{68}$$

因此,在(60)和(50′)的当前系统中存在不止一个定态.令(k^*, m^*)为满足 $k^* \gtreqless \bar{k}$ 的其中一个.根据(67),($\dot{k}=0$)曲线向上倾斜且如图 8.7 所示在(k^*,

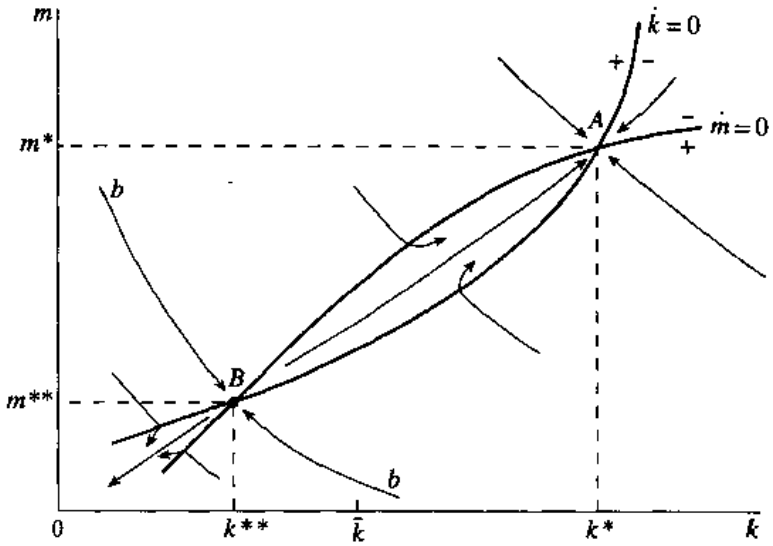


图 8.7 含证券的(k,m)的动态轨迹

m^*)的邻域中($\dot{k}=0$)曲线比 $\dot{m}=0$ 曲线陡.令(k^{**}, m^{**})为另一个定态.如果 k^{**} 比 $\bar{k}$ 足够小,我们得到(68)而不是(67).在这种情况中,在该定态的邻域中($\dot{k}=0$)曲线比($\dot{m}=0$)曲线更平坦.另外根据(61)和(62),可推出,$\dot{m}<0$(或 $\dot{m}>0$)在($\dot{k}=0$)曲线的左边(或右边),$\dot{k}>0$(或 $\dot{k}<0$)在($\dot{m}=0$)曲线的右边(或左边).

为获得一个定态的稳定性质,我们如下计算(60)和(50′)的线性近似系统的迹和雅可比行列式

$$\partial\dot{k}/\partial k+\partial\dot{m}/\partial m=sf'-n+(1-s)m\pi_k-m\pi_m \tag{69a}$$

$$(\partial\dot{k}/\partial k)(\partial\dot{m}/\partial m)-(\partial\dot{k}/\partial m)(\partial\dot{m}/\partial k)$$
$$=-m[(sf'-n)\pi_m+(1-s)n\pi_k] \tag{69b}$$

根据(61)和(62),导数在一个特定的定态处取值.令(k^*, m^*)为定态,$k^*\geqq\bar{k}$.则根据(69)可立即得出

$$\partial\dot{k}/\partial k+\partial\dot{m}/\partial m<0 \tag{70a}$$

443

$$(\partial\dot{k}/\partial k)(\partial\dot{m}/\partial m)-(\partial\dot{k}/\partial m)(\partial\dot{m}/\partial k)>0 \tag{70b}$$

其中(70)中的偏导数在(k^*, m^*)处取值.据此可推断出(k^*, m^*)是渐近局部稳定的.

另一方面,令(k^{**}, m^{**})为另一个定态,并有

$$m[(sf'-n)\pi_m+(1-s)n\pi_k]>0 \tag{71}$$

则(69b)的左边是负的,(k^{**}, m^{**})是一个鞍点,因此是不稳定的.同样在这种情况中,我们有(68),在(k^{**}, m^{**})的邻域中($\dot{k}=0$)曲线比($\dot{m}=0$)曲线平坦.

使用前面的论述,可在图 8.7 中图示(k, m)的动态轨迹.此图存在两个定态,$A=(k^*, m^*)$和 $B=(k^{**}, m^{**})$.点 A 是渐近局部稳定的而点 B 是一个鞍点.在图 8.7 中,如图(k, m)的初始值位于轨迹 bb 的右侧,则经济总是收

444 敛于惟一的定态点.这里 bb 代表鞍状轨迹的稳定枝,它指向点 B.

如果假定在定态中总有

$$sf'-n<0 \tag{72}$$

则定态是惟一且是渐近全局稳定的.条件(72)与出现在 Solow 和 Swan 的新古典增长模型中的稳定性条件相同,新古典增长模型没有考虑货币和证券.回忆第六章中的条件(53),我们称这种条件为"Solow-Swan 条件".Hadjimichalakis 和 Okuguchi(1979)的货币与增长模型也出现了条件(72).虽然此条件充分地保证了我们模型中的稳定性,却不足以保证 Hadjimichalakis 和 Okuguchi(1979)经济中的稳定性,因为该模型排除了证券.Hadjimichalakis(1971b,399 页)指出条件(72)"不是一个苛刻的假设.由于 s 一般是一个小的分数,即使定态 k 大大低于黄金律的 k,该条件也可以满足".

【命题 8.5】(Drabicki 和 Takayama 1984b) 如果引入生息证券,包含货币

的新古典增长模型在缺乏远见的完美预期下可以有一个稳定的定态.一般说来,可以存在不止一个定态,如果 k 和 m 的初始值超越了特定的值,则定态是渐近稳定的.此外,如果 Solow 和 Swan 的条件(72)得以满足,则定态是惟一且是渐近全局稳定的.

8.3.4 稳定性的来源

前面的稳定性结论为通常的(鞍点)不稳定性结论提供了一个鲜明的对比.为研究我们结论的来源,首先注意到我们的动态系统(60)和(50′)在形式上与两种资产模型使用的系统相同.

这种稳定性结果来自于这样的事实,根据(62b)[或者(61a)加上(72)和 $\pi_k<0$],方程(50′)[或者(60)]对于 k(或者 m)的一个固定值是稳定的,而在通常的二种资产模型中对应于(50′)的方程是不稳定的.注意在我们的结论中,$\pi_k<0$ 和 $\pi_m>0$(在定态处)在得到(61a)和(61b)的符号条件的过程中起关
445 键性的作用.因而我们的结论使定态稳定,而文献的一般结论认为 $\pi_k>0$ 和 $\pi_m<0$(在定态处),这提供了不稳定性的来源.正如前面提及的,$\pi_m<0$ 的来源,即 $l_2<0$,被 Tobin(1965)称为"Wicksell 效应"并已被强调为不稳定性的来源.

总之,我们的稳定性结果的来源可归结为 π_k 和 π_m 的符号条件的差异.这种差异进一步来自这样的事实:在我们的限定下,π 和 i 的短期均衡值由货币和商品市场的均衡条件同时决定.与此相反,在关于此论题的一般文献中,π 的瞬时均衡值仅由货币市场来决定.

8.3.5 8.3 节附录

在本附录中,我们将导出(59)中叙述的结论.为此,我们根据短期均衡条件(54′)和(57)计算

$$\pi_k = |L_1[(s-z_3)f' - z_2 f''] + z_1(L_2 f'' + L_3 f' + L_4)|/J \tag{73a}$$

$$\pi_m = -[z_1(1-L_4) + (1-s)(\theta-\pi)L_1]/J \tag{73b}$$

$$i_k = -\{[z_2-(1-s)m](L_2 f'' + L_3 f' + L_4) + L_2[(s-z_3)f' - z_2 f'']\}/J \tag{73c}$$

$$i_m = |[z_2-(1-s)m](1-L_4) + (1-s)(\theta-\pi)L_2|/J \tag{73d}$$

$$J \equiv [z_2-(1-s)m]L_1 - z_1 L_2 \tag{73e}$$

为据此得到(59),我们求助于对应原理.我们利用瞬时均衡的稳定性条件,其中我们假设一个调节过程:对商品的超额需求使 π 增大,对货币的超额需求

使 i 增大.即

$$d\pi/dt = \alpha\{(1-s)[f(k)+(\theta-\pi)m]+z[i,f'(k)+\pi,f(k)]-f(k)\}$$

$$\equiv\varphi(\pi,i) \tag{74a}$$

$$di/dt = \beta\{L[i,f'(k)+\pi,f(k),k+m]-m\}$$

$$\equiv\psi(\pi,i) \tag{74b}$$

这里 t 代表时间,α 和 β 为正的常数,k 和 m 是给定的.(74)的线性近似系统稳定性的充分必要条件是

$$\varphi_\pi+\psi_i<0 \text{ 和 } \varphi_\pi\psi_i-\varphi_i\psi_\pi>0 \tag{75}$$

这里(75)中出现的偏导数在特定的瞬时均衡点处取值.根据定理 7.10,可通过(75)来得到特定参数的符号且求助于对应原理.根据(74),可得

$$\varphi_\pi=\alpha[z_2-(1-s)m],\varphi_i=\alpha z_1<0 \tag{76a}$$

$$\psi_\pi=\beta L_2<0,\psi_i=\beta L_1<0 \tag{76b}$$

因此(75)可以改写成

$$\varphi_\pi+\psi_i=\alpha[z_2-(1-s)m]+\beta L_1<0 \tag{77a}$$

$$\varphi_\pi\psi_i-\varphi_i\psi_\pi=\alpha\beta\{[z_2-(1-s)m]L_1-z_1L_2\}=\alpha\beta J>0 \tag{77b}$$

由于我们假定 $z_1<0,z_2>0,L_1<0,L_2<0$(77b)或 $J>0$(即"雅可比条件")要求 $z_2-(1-s)m<0$(它指出 π 的增大会削减对商品的总需求).这保证了(77a)或"迹条件"的成立.另外注意,(77b)要求 m 对原点的偏离是充分有界的.当且仅当

$$m>(z_2-z_1L_2/L_1)/(1-s)>0 \tag{78}$$

时,$J>0$.因此,在"瞬时均衡稳定的假设",即(77)下,(59)中的结论自(73)易得.注意,由于(77)的陈述没有引用(73)的均衡条件,于是由 Olech 定理(定理 6.7)知,(77)和对所有 π 和 i,$\varphi_i\psi_\pi\neq0$ 确保了短期均衡的渐近全局稳定性.

另外注意利用(73b)和(73e),我们可以证明,对 $\dot{m}=0$(即 $\theta-\pi=n$)

$$\pi_m m-n=\{z_1[nL_2-(1-L_4)m]-nz_2L_1\}/J>0$$

$\pi_m m-n>0$ 用于标明(关于 $\dot{k}=0$ 时)dm/dk 的符号.

▶ 注 释

[1]本节(和第 6 章中)描述的宏观模型并不一定反映作者的观点.这些模型,众所周知有某些优点(和缺陷),它们只是用来解释微分方程理论中的特定

方法如何应用于经济学问题.见 Takayama(1986).

[2]注意,如果(4)成立,则对所有的(Y,r),$\phi_Y+\psi_r<0$,$\phi_Y\psi_r-\psi_Y\phi_r>0$,$\varphi_Y\psi_r\neq0$.使用这点,我们在第6章中说明了$(Y^*,r^*)$的全局稳定性(参看命题6.2).在图8.1中,$(Y^*,r^*)$被画成一个螺线极点.不一定是这种情况,而原因很快就会很明显.

[3]注意,由于$\beta>0$,均衡点(Y^*,r^*)不能是鞍点.

[4]该节基于 Takayama(1979).

[5]注意,(11)中的$(\partial L/\partial W^n)(W^n/L)=1$,即,在(11)中假定对名义余额需求的财富弹性为1.该假定经常在"货币和增长"的著作被采用,包括 Tobin(1965).在下一节中它将被放弃.

[6]我们可算出$\lambda_k=(l_1f'+l_2f'')/(1-l)^2>0$,$\lambda_{\pi}^{l}=l_2/(1-l)^2<0$.

[7]用T表示净(实际)税收(税收减去转移支付),则公共预算条件写成

$$C+I+T+\dot{L}/p\equiv Y \qquad (*)$$

设G为政府在商品和劳务上的(实际)支出.则政府预算条件可写成

$$p(G-T)\equiv\dot{M} \qquad (**)$$

这是由于假定在经济中不存在政府公债.假定G不存在,则$(**)$可写成

$$-T\equiv\dot{M}/p \qquad (**')$$

在这种经济中,假定没有税收,政府的开支只由对公众的转移支付(即藉印刷纸币来筹资)构成.将公众和政府预算条件相加,即将$(*)$和$(**')$相加,可得

$$Y\equiv C+I+(L-M)/p \qquad (***)$$

因此,如果随时间变化总能保持货币均衡(即:如采对所有的时间t,$L=M$),则$Y=C+I$.相反地,如果对所有的t,$Y=C+I$,可得对所有t,$L=M$.两个均衡关系$Y=C+I$和$L=M$不是相互独立的.在文献中,均衡关系通常被规定为$L=M$,则自动有$Y=C+I$,即在这种情况下把$Y=C+I$确定为与$L=M$独立的均衡条件是错误的.给定$L=M$,$Y=C+I$自动成立是如下陈述的真实内容,"投资是完全被动的,即储蓄$(Y-C)$自动给出一个相等的投资数量".这是$L=M$的逻辑推论,而不是一个独立的假设,这与文献中通常的说法相反.

[8](31)中的符号ϕ和ψ不应与前一节中所用的ϕ和ψ混淆.

[9]式(17)可等价地写为

$$\pi=\pi(k,m),\pi_k>0\text{ 且 }\pi_m<0 \qquad (17')$$

这里$\pi_k\equiv\partial\pi/\partial k=-(\lambda+\lambda_k k)/(\lambda_\pi k)>0$,$\pi_m\equiv1/(\lambda_\pi k)<0$.

[10]我们可以回忆$f-kf'=\partial F/\partial N$,即$f-kf'$代表劳动力的边际物质生产力.据此可得$h'<0$.

[11]James Tobin 是 1981 年诺贝尔经济学奖得主.

[12]正如前面章节提到的,某些经济学家坚信在类似图 8.4 的情况中,经济总是在鞍状轨迹的稳定枝上运行,因此定态(k^*,π^*)总是稳定的.自从处理与现在讨论类似的货币模型的 Sargent - Wallace(1973)论文出现以来,这种观点流行起来.很明显,他们认为其观点正确的理由是稳定枝为惟一的"理性预期"轨迹.然而,作为方程(27)和(30)解的每条轨迹都应是理性预期轨迹(也见于 Shiller 1978 和 Gertler 1979).确切地说,在特定约束下的模型中的定态不是稳定的并不表明每一种模型均不稳定.实际上,下一节我们将证明当在当前模型中引入证券时,鞍点的不稳定性完全消失了.此外,他们对"稳定性"概念的使用与传统的微分方程理论不同.不同于某些经济学家,作者认为无需就特定约束下的经济模型对其重新定义.

[13]可以证明适应性预期公式(42)相当于断定预期的通胀率是有一定权重的过去(实际)通胀率的加权和.没有理由假设这些权重是外生的而与经济中特定的基础条件无关.假设人们期望某公司的股票价格是有固定的权重结构的过去价格的加权,这显然是愚蠢的.适应性预期假设也有类似的严重缺陷.

[14]注意到将(17′)代入(26)中可得到方程

$$\dot{k}=sf(k)-(1-s)[\theta-\pi(k,m)]m-nk$$

这样,动态系统可由它和(50)来描述,它们也定义了(k,m)的轨道.这可作为动态系统(27)和(30)的另一个描述,(27)和(30)定义了(k,π)的轨道.我们采用何种系统对我们的结论并不重要.

[15]本节基于 Drabicki 和 Takayama(1984b),面它基于以下假定:货币的供给是外生的.关于包括银行部门和货币供给内生性的分析,见 Drabicki 和 Takayama(1984a).关于那里提出的"货币供给"公式的经验上的合理性,见 Sims 和 Takayama(1985).该论文也包括对货币需求的研究.由于多重共线性,大多数经验性的研究还没有成功地将收入和财富都包括进来作为货币需求函数的自变量.Sims 和 Takayama(1985)成功地解决了这一难点.

[16]显然,相当多的对货币和增长的研究包括了债券市场,但它们违背了这里列出的一些假定(参看 Stein 和 Nagatani 1969; Fisher 1972 和 Johnson 1976).对这里考虑的二种资产经济的清楚阐述见 Burmeister 和 Debell (1970,第 6-1节到第 6-9 节)和 Hadjimichalakis (1971a,"系统 A").

[17]关于该假设一个著名的例子,见 Patinkin (1965).政府债券及银行部门在 Takayama 和 Drabicki (1976),Drabicki 和 Takayama (1984a)中被系统地引入.

[18]关于(53)的推导,见 Modigliani (1963,80～81 页).另见 Takayama 和 Drabicki (1976),Drabicki 和 Takayama(1984a),Sims 和 Takayama(1985).这些文章也包括了银行部门.

[19]这里第 j 个下标代表对第 j 个自变量的偏导数,$j=1,2,3,4$.

[20]如同在 8.2 节中,假定政府既无支出也不征税,只是简单地以固定比

率 θ 印刷货币(它转移给公众).这是货币和增长文献中一种标准的简化假定.

[21]这是 8.2 节中无债券情况下得到的表达式.这里我们通过重复一个类似的论述得到相同的表达式.

[22]$0<z_3<s$ 指通常的假定:(作为收入的函数)储蓄曲线比投资曲线更陡.我们可以在不影响我们的结论的情况下,选择其他的投资需求函数(而不是(56)).

参考文献

447

Burmeister, E., and R. A. Dobell. 1970. "Money and Economic Growth." In *Mathematical Theories of Economic Growth*, *New York*: *Macmillan*.

Drabicki, J. Z., and A. Takayama. 1978. "Money, Growth, and the Stability of the Steady State under Myopic Perfect Foresight." *Economics Letters* 1(1): 51 - 54.

——. 1984a. "Money, National Debt, and Economic Growth." *Journal of Economic Theory* 33(August): 356 - 67.

——. 1984b. "The Stability of a Neoclassical Monetary Growth Model." *Economic Studies Quarterly* 35(December): 262 - 68.

Fischer, S. 1972. "Keynes - Wicksell and Neoclassical Models of Money and Growth." *American Economic Review* 62(*December*): 880 - 90.

Foley, D. K., and M. Sidrauski. 1971. *Monetary and Fiscal Policy in a Growing Economy*. *New York*: *Macmillan*.

Gertler, M. 1979. "Money, Prices, and Inflation in Macroeconomic Models with Rational Inflationary Expectations." *Jurnal of Economic Theory* 21 (October): 222 - 34

Hadjimichalakis, M. G. 1971a. "Equilibrium and Disequilibrium Growth with Money: The Tobin Models," *Review of Economic Studies* 38(October): 457 - 79.

——. 1971b. "Money, Expectations, and Dynamics: An Alternative View." *International Economic Review* 12(October): 381 - 402.

Hadjimichalakis, M. G., and K. Okuguchi. 1979. "The Stability of a Generalized Tobin Model." *Review of Economic Studies* 46(January): 175 - 78.

Johnson, L. 1976. "Portfolio Adjustment and Monetary Growth." Review of Economic Studies 43(October): 475 - 81.

Johnson, H. G. 1978. "Money in a Neo-Classical One-Sector Growth Model." In his *Selected Essays in Monetary Economics*. London: Allen and Unwin.

Modigliani, OF. 1963. "The Monetary Mechanism and Its Interaction with Real Phenomena." *Review of Economics and Statistics* 45(February): 79 - 107.

Nagatini, K. 1970. "A Note on Professor Tobin's 'Money and Economic

Growth'." *Econometrica* 38(January):171 – 75.

——. 1978. "Money and Growth: An Introduction to the Theory of Dynamic Aggregate Behavior." Chap. 12. in *Monetary Theory*. Amsterdam: North-Holland.

Patinkin, D. 1965. *Money, Interest, and Prices*. 2d ed. New York: Harper and Row.

Rose, H. 1966. "Unemployment in a Theory of Growth." *International Economic Review* 7(September):260 – 82.

448 Sargent, T. J., and N. Wallace. 1973. "The Stability of Money and Growth with Perfect Foresight." *Econometrica* 41(November):1043 – 48.

Shiller, R. J. 1978. "Rational Expectations and the Dynamic Structure of Macroeconomic Models." *Journal of Monetary Economics* 4:1 – 44.

Sidrauski, M. 1967. "Inflation and Economic Growth." *Journal of Political Economy* 75(December):796 – 810.

Sims, G. E., and A. Takayama. 1985. "On the Demand for and the Supply of Money: An Empirical Study." *Keio Economic Studies* 12:1 – 26.

Stein, J. L. 1966. "Money and Capacity Growth." *Journal of Political Economy* 74(October):451 – 65.

Stein, J. L., and K. Nagatani. 1969. "Stabilization Policies in a Growing Economy." *Review of Economic Studies* 36(April):165 – 83.

Takayama, A. 1979. "Money and Growth: An Expository Note." *Lecture notes*, Texas A & M University, March.

——. 1986. "The General Theory after Fifty Years: The Neoclassical Approach(A Partial View)." *Discussion Paper Series*, no. 86 – 30. Carbondale: Southern Illinois University.

——. and J. Z. Drabicki. 1976. "On the Endogenous Supply of Money." *Keizai Kenkyu* (*Economic Review*)27(October):336 – 48.

Tobin, J. 1965. "Money and Economic Growth." *Econometrica* 33(October): 671 – 84. Reprinted with revisions in Tobin, J. 1971. *Essays in Economics: Macroeconomics*. Amsterdam: North-Holland, 133-45.

第5篇

最优控制论及其应用

第 9 章　最优控制论基础及应用

451

最优控制论是最重要的分析工具之一.虽然它在动态问题中的应用是早已熟知的,但其应用不局限在此领域.它是变分法的现代形式.变分法为物理学提供了寻求统一原理的基本数学方法,并在 20 世纪 30 年代达到了顶峰,特别是在芝加哥大学.尤其是基于 Pontryagin 等人(1962)、Hestenes(1965)和其他人的工作,最优控制论的产生使学术界,特别是科学界和工程学界为之振奋.经济科学也不例外,人们已在这个领域做了许多研究.在余下的三章中,我们将介绍这一工具的主要内容及其在经济学中的应用.

§9.1　Pontryagin 的最大化原理

设想发射一个受控导弹去截击一架飞机的问题.导弹在时刻 t 的位置由三维坐标下一个向量函数 $x(t)$ 来表示.问题是获得"最优"的弹道 $x(t)$,使得某个目标最大或最小.例如,这个目标可能是使导弹到达飞机的时间最短.$x(t)$ 可以被一组变量所"控制".例如,控制导弹弹道 $x(t)$ 的变量可能是 t 时刻的燃料耗量,及在时刻 t 大地"平面"与推进方向的夹角.

这些变量通常由 r 维的向量函数 $u(t)$ 代表.函数 $x(t)$ 通常是 n 维向量函数.问题是选择函数 $u(t)$ 来得到弹道函数 $x(t)$ 以使某目标最大或最小.这

452 类问题被称为**最优控制问题**，处理这类问题的理论被称为**最优控制论**. 最优控制的例子很多，人们可以在日常生活中发现这类例子. 有些非常复杂，有些则很简单(就是说很容易找到答案). 例如，一个简单的问题是如何通过控制每一瞬时自来水龙头的水量，使得装满一个浴盆的时间最短.[1]在经济学中同样也有许多最优控制问题.

现在这种描述形式的最优控制论是著名俄罗斯数学家 L. S. Pontryagin 和他的助手的重要结论. 这一理论继承了变分法的古典理论. 受到这个著作的启发，一些重要的应用得到了发展. 一些包含了这些成果的优秀教科书也问世了(见 Hesteness(1966); Berkovitz(1974); Young(1980); Macki 和 Strauss(1982); Cesari(1983)). 关于这种技术在经济学问题中的应用的文献也层出不穷，如 Kendrick(1981)中引用的文献; 另见 Takayama(1974, 1985); Arrow 和 Kurz (1970); Pitchford 和 Turnovsky(1977); Kamien and Schwartz(1981, 1991); Sethi 和 Thompson(1981); Tu(1984); Seierstad 和 Sydsaeter(1987), Brock 和 Malliaris (1989).[2]

Pontryagin 等(1962)的基本结果是 **Pontryagin 最大化原理**. 这一原理考虑的是最优化的必要条件. 这个条件和受约束的最大或最小的古典理论中的 Lagrangian 最大化很类似. 在这一章，我们根据 Pontryagin 最大化原理来阐述最优控制论的原理，并以经济学中的应用来加以说明.

考虑一个 n 元一阶微分方程组

$$\dot{x}_i(t)=f_i(x(t),u(t),t),i=1,2,\cdots,n \tag{1}$$

这里

$$x(t)=[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)]$$

$$u(t)=[u_1(t),u_2(t),\cdots,u_r(t)]$$

$f_i, x_i(t), u_k(t)$都是实值函数. (1)式的边界条件可指定为

453

$$x_i(t^0)=x_i^0,i=1,2,\cdots,n \tag{2}$$

如果我们指定 $u_k(t)$的路径，比如说 $u(t)=\bar{u}(t)$，那么假定解惟一存在，我们便可完全确定轨迹 $x(t;x^0,t^0)$，它是满足(2)式的方程(1)的解的路径. 第 6 章中讨论的 Cauchy－Peano 定理(定理 6.1)提供了保证解的(局部)存在性和惟一性的充分条件. 轨道 $x(t;x^0,t^0)$明显依赖于 $u(t)$的确定.

在最优控制论里，$u(t)$不是事先指定的，而需从某个函数集合 U 中选择 $u(t)$，使得某个目标最大(或最小). 例如，我们可以把目标定为

$$S=\sum_{i=1}^{n}c_ix_i(T) \tag{3}$$

的形式(这里 T 是固定的常数). 然后考虑选择 $u(t)\in U$，使得 S 取到最大值的问题，约束条件为

$$\dot{x}_i(t)=f_i[x(t),u(t),t]$$

和　　$x_i(t^0)=x_i^0, i=1,2,\cdots,n$　　(4)

这里，$u(t)$定义在某区间 $t^0\leqq t\leqq T$ 内．一旦我们找到了这样一个 $u^*(t)$，我们就能得到作为微分方程组(1)的解的相应函数 $x^*(t)$，而且满足边界条件．

一般地，变量 $x_i(t), i=1,2,\cdots,n$，假定是 t 的连续函数，称为**状态变量**，变量 $u_k(t), k=1,2,\cdots,r$，称为**控制变量**．[3]当 $u(t)\in U$，$u(t)$称为**可接受控制函数**，U 称为**可接受控制集**．U 中 $u(t)$的值域，记为 $\overline{U}$，$\overline{U}$ 称为**控制域**．我们假设 U 限制为这样的集合：其中的 $u(t)$是"**分段连续**"的．分段连续意味
454 着除了有限的间断点外函数是处处连续的，而间断点又限制为**第一类**间断点，即该点的左极限与右极限是有限的，虽然它们不相等．允许控制域 $\overline{U}$ 是闭集．换句话说，$\overline{U}$ 可以包括这样一种限制，即对所有 t，

$$0\leqq u(t)\leqq 1$$

在这种情况中，有可能在某个时刻 t，$u(t)=0$ 或 1．

假定 f_i 在每个 x_i, u_k 和 t 是连续的并且关于 x_i 和 t 有连续偏导．$x(t)$的值域记为 X[4]．边界点(x^0,t^0)必须满足 $x^0\in X$ 和 $x(t^0)=x^0$．$x(t)$要求是连续的且分段连续可导．虽然 t 在实际应用中经常指时间 t，但不限于仅指时间．不过我们还是不正式地称 t 为"时间"，这只是遵从一种通常的惯例．

下面我们介绍本章的基本定理．该定理处理的是(4)中陈述的问题，其中 T 是固定的，但 $x(T)$**不是事先**固定的．

【定理 9.1】 在问题(4)的指定下，为了使 $u^*(t)$是问题的解，且对应于状态变量 $x^*(t)$，那么必要条件是存在一个连续的向量函数 $p(t)\equiv[p_1(t),\cdots,p_n(t)]$，对于每个 t 各分量不同时为零，[5]使得

(i) $p(t)$与 $x^*(t)$和 $u^*(t)$是 **Hamilton 函数系统**

455
$$\dot{x}_i^*=\frac{\partial H^*}{\partial p_i}, \dot{p}_i=-\frac{\partial H^*}{\partial x_i}, i=1,2,\cdots,n \tag{5}$$

的解．[6]这里 H 称为 **Hamilton 函数**[7]，定义为

$$H[x(t),u(t),t,p(t)]\equiv\sum_{i=1}^{n}p_i(t)f_i[x(t),u(t),t]p \tag{6}$$

(ii) Hamilton 函数关于 $u(t)$被最大化，即

$$\text{对所有的 } u(t)\in U,\ H[x^*(t),u^*(t),t,p(t)]\geqq H[x^*(t),u(t),t,p(t)] \tag{7}$$

(iii) 条件

$$p_i(T)=c_i, i=1,2,\cdots,n \tag{8}$$

成立(称为**横截条件**)．[8]

(iv) $x_i(t^0)=x_i^0, i=1,2,\cdots,n$．

456 注:条件(ii)要求 H 最大化,这是这个定理的首要内容(相关定理我们将在下面讨论).由此,Pontryagin 等人(1962)把这些定理称为**最大化原理**,从而它们也被称为 **Pontryagin 最大化原理**.定理 9.1 给出了 $u^*(t)$为最优的必要条件.可以证明如果 f_i 对于 x 和 u 是凹的,那么这些条件(对于全局最优)也是充分的.一个警觉的读者或许已经发现这个问题与第二章中讨论的普通非线性规划问题有相似之处.p_i 对应于 Lagrangian 乘数,H 对应 Lagrangian 函数.Lagrangian 函数的最大化现在转化成 Hamilton 函数的最大化.我们可以称 $p_i(t)$为(**Pontryagin**)**乘数**.他们也称为**辅助变量**(Pontryagin 等,1962)或**共态变量**.

注意,(5)式可以改写成

$$\dot{x}_i^* = f_i[x^*(t), u^*(t), t], \dot{p}_i = -\sum_{j=1}^{n} p_j(\partial f_j^*/\partial x_i), i = 1,2,\cdots,n$$

这里$\partial f_j^*/\partial x_i$ 表示在$[x^*(t), u^*(t), t]$赋值的$\partial f_j/\partial x_i$.方程组(5)为我们提供了关于 $2n$ 个变量的 $2n$ 个一阶微分方程,这些变量为$x_i(t), p_i(t), i = 1, 2,\cdots, n$.有 $2n$ 个边界条件,$x_i(t^0) = x_i^0, i = 1,2,\cdots,n$;$p_i(T) = c_i, i = 1, 2,\cdots,n$,它们对应于 $2n$ 个方程.横截条件(等式 8)的作用是提供附加的边界条件.除非 $u(t)$给定,否则 $2n$ 个方程无法求解.条件(ii)的作用是确定 $u(t)$的选择.一旦我们找到了路径$[x^*(t), u^*(t)]$作为 $2n$ 个微分方程的解且满足 $2n$ 个边界条件,我们便可得到 $x^*(T)$.注意,虽然 T 在当前问题中是固定的,$x(T)$却并不是事先固定的.与此对应,我们得到 n 个附加条件,$p_i(T) = c_i, i = 1,2,\cdots,n$.我们称$[x^*(t), u^*(t)]$为**最优对**或**解对**.函数 $u^*(t)$是**最优控制**,函数 $x^*(t)$称为**最优轨道**.

(3)式中描述的目标函数比它看起来更为普遍,因为它包括了下面的积分目标形式:

$$I \equiv \int_{t^0}^{T} f_0[x(t), u(t), t]dt \tag{9}$$

为说明这个,定义 $x_0(t)$满足 $\dot{x}_0 \equiv f_0[x(t), u(t), t]$与 $x_0(t^0) = 0$.于是,$I = x_0(T)$显然是(3)的一个特例,因此求 I 的最大值,约束条件是 $\dot{x}_0 = f_0[x(t), u(t), t]$,(1)和(2),可以转化成这样的问题:求 $x_0(T)$的最大值,约束条件是
457 (1),(2)和 $x_0(t^0) = 0$.这样,我们可以立即应用定理 9.1.为此,将 Hamilton 函数定义为

$$\tilde{H}[x(t), u(t), t, p_0, p(t)]$$

$$\equiv p_0 f_0[x(t), u(t), t] + \sum_{i=1}^{n} p_i f_i[x(t), u(t), t]$$

于是(5)、(7)、(8)式可以写成:

$$\dot{x}_i^* = \frac{\partial \tilde{H}^*}{\partial p_i}, \dot{p}_i = -\frac{\partial \tilde{H}^*}{\partial x_i}, i = 0,1,2,\cdots,n \tag{5'}$$

$$\tilde{H}[x^*(t),u^*(t),t,p_0,p(t)]\geqq\tilde{H}x^*(t),u(t),t,p_0,p(t)]$$

对所有的 $u(t)\in U$ (7′)

$$p_0(T)=1,p_i(T)=0,i=1,2,\cdots,n \tag{8′}$$

既然 $p_0(T)=1$,故由(5′)式得 $\dot{p}_0=0$,所以对所有 t 我们均有 $p_0(t)=1$,于是令

$$\begin{aligned}\tilde{H}&=f_0[x(t),u(t),t]+\sum_{i=1}^{n}p_if_i[x(t),u(t),t]\\&\equiv H[x(t),u(t),t,p(t)]\end{aligned}$$

我们可以从(5′)、(7′)和(8′)中略去 $i=0$ 的情况,于是可将它们重写成

$$\dot{x}_i^*=\frac{\partial H^*}{\partial p_i},\dot{p}_i=-\frac{\partial H^*}{\partial x_i},i=1,2,\cdots,n \tag{5″}$$

$$H[x^*(t),u^*(t),t,p(t)]\geqq H[x^*(t),u(t),t,p(t)]$$

对所有的 $\forall\, u(t)\in U$ (7″)

$$p_i(T)=0,i=1,2,\cdots,n \tag{8″}$$

这样,对于选择 $u(t)\in U$,使得(9)式中满足约束(1)和(2)的积分 I 最大化的问题来说,(5″),(7″)和(8″)构成了$[x^*(t),u^*(t)]$为最优解的必要条件.

458 在以上讨论中,我们看到积分形式的目标可以变成求和形式 S,反过来,我们也能把表示成 S 的形式变成积分形式.为说明这点,注意

$$S\equiv\sum_{i=1}^{n}c_ix_i(T)=\int_{t^0}^{T}\sum_{i=1}^{n}c_i\dot{x}_i(t)dt+\sum_{i=1}^{n}c_ix_i(t^0)$$

于是最大化在(1)和(2)约束下的 S,等价于在约束(1)和(2)下最大化积分

$$J\equiv\int_{t^0}^{T}f_0[x(t),u(t),t]dt,\text{其中 }f_0\equiv\sum_{i=1}^{n}c_if_i$$

既然 $u_k(t)$可以是任何分段连续函数,$u_k^*(t)$可以如此选择,使得

$$u_k^*(t)=0,\forall\, t^0\leqq t\leqq\bar{t}$$

$$u_k^*(t)=1,\forall\,\bar{t}\leqq t\leqq T$$

这种控制有时称为 **bang－bang 控制**,[9]并经常在实际运用中得到.

另一方面,如果 u^* 在控制域 $\overline{U}$ 的内部(或者如果 $\overline{U}$ 是开集),并且,如果每个 f_i 对于 u 是连续可微的(而且 H 对 u 是连续可微的),那么由条件(ii)或(7)可推出

$$\partial H^*/\partial u_k=0,\ k=1,2,\cdots,n \tag{7‴}$$

反过来,如果 H 对 u_k 是凹函数,那么由(7‴)式可推出条件(7).

一个经济应用:投资的区域分配

为了说明定理 9.1,我们考虑投资的区域分配问题.这个问题由 Takayama

(1967 和 1985)讨论,最初源自 Rahman(1963 和 1966)和 Intriligator(1964).考虑一个包含两区域(1 和 2)的经济,每个区域都生产 1 种相同的产出,Y("国
459 民产出").假定每个区域的产出是 $Y_i(i=1,2)$,资本产出率均是固定的,于是我们有

$$Y_i = b_i K_i, \quad i=1,2$$

这里 K_i 是区域 i 的资本存量.根据 Rahman(1963),我们考虑计划机构如何在两个区域分配投资资金,使得在某个给定的未来终止时间 T 的整个经济的收入最大,

$$Y(T) = Y_1(T) + Y_2(Y)[=b_1K_1(T) + b_2K_2(T)]$$

由于分配到两个区域的投资资金(Z)来自整个经济的储蓄,我们有

$$Z = s_1 Y_1 + s_2 Y_2$$

这里 s_i 是每个区域的边际储蓄倾向,s_i 不随时间变化,$0<s_i<1$,$i=1,2$.定义 $g_i \equiv b_i s_i$,我们重写此式为

$$Z = g_1 K_1 + g_2 K_2$$

设 $\beta=\beta(t)$是分配给区域 1 的投资资金的比例.显然,$(1-\beta)$是分配给区域 2 的投资资金.忽略资本存量的贬值,我们有等式

$$\dot{K}_1(t) = \beta[g_1 K_1(t) + g_2 K_2(t)] \tag{10a}$$

和

$$\dot{K}_2(t) = (1-\beta)[g_1 K_1(t) + g_2 K_2(t)] \tag{10b}$$

因此 Rahman(1963)规定的问题是选择 $\beta(t)$,以使

$$\text{Maximize} \quad b_1K_1(T) + b_2K_2(T)$$

约束条件为(10),$K_1(0)=K_1^0$ 及 $K_2(0)=K_2^0$
这是定理 9.1 所讨论的一类最优控制问题.状态变量是 $K_1(t)$和 $K_2(t)$,控制变量是 $\beta(t)$.

460 为解决这个问题,我们定义目前问题的 Hamilton 函数为

$$\begin{aligned} H &\equiv p_1\beta(g_1K_1 + g_2K_2) + (1-\beta)p_2(g_1K_1 + g_2K_2) \\ &= [\beta(p_1 - p_2) + p_2](g_1K_1 + g_2K_2) \end{aligned}$$

忽略表示最优的(*)以避免杂乱,Hamilton 系统包括(10)和

$$\dot{p}_i = -\partial H/\partial K_i = -[\beta(p_1 - p_2) + p_2]g_i, \; i=1,2 \tag{11}$$

横截条件给定为

$$p_i(T) = b_i, \; i=1,2$$

方程(10)和(11)中有四个微分方程,对应于四个变量 $K_i(t)$ 和 $p_i(t)$, $i=1,2$, 有四个边界条件, $K_i(0)=K_i^0$ 和 $p_i(T)=b_i$, $i=1,2$. 根据最大化原理,我们选择控制变量 $\beta(t)$ 使 H 最大. 由于 $H=[\beta(p_1-P_2)+p_2](g_1K_1+g_2K_2)$, 我们立即得到投资资金的分配规则

$$\beta(t)=1, \text{如果 } p_1(t)>p_2(t);$$

$$\beta(t)=0, \text{如果 } p_1(t)<p_2(t)$$

由(11)式可得 $\dot{p}_1/\dot{p}_2=g_1/g_2$, 再利用 $p_i(T)=b_i$, $i=1,2$, 便得

$$p_1(t)-p_2(t)=\frac{g_1-g_2}{g_2}p_2(t)+\frac{b_1b_2}{g_2}(s_2-s_1)$$

这样,如果 $g_1>g_2$ 且 $s_2>s_1$(也包括 $g_1=g_2$ 且 $s_2>s_1$, 或 $g_1>g_2$ 且 $s_2=s_1$), 对所有 t, 便有 $p_1(t)>p_2(t)$. 从而,对所有 t, $\beta(t)=1$. 特别地,如果两个区域的储蓄率是相同的,我们应该把所有的投资资金投入到资本产出率 b 更高的区域. 同样,如果资本产出率是相同的($b_1=b_2$), 我们就应该把所有原投资基金投入到储蓄率高的区域. 这是直观上可以得到的结果. 对于 $g_1>g_2$ 和 $s_1>s_2$ 的情况,分析更为复杂. 我们在这里不作深入讨论. 关于全面的解答,有兴趣的读者参阅 Takayama(1985,627~638 页).

这个问题中有几个难点. 例如,如果对所有 t, $\beta(t)=1$, 区域 2 的人在整个计划期内完全被忽略了,虽然从计划者的角度看,这样一个解是他所期望的,但对区域 2 的人来说并非如此. 另外,把生产技术描述成 $Y_i=b_iK_i$($i=1$,
461 2)也过于简化. 至少应该把劳动力因素包含进去,这样生产技术可以表示成生产函数 $Y_i=F_i(N_i,K_i)$, 其中 N_i 表示区域 i 的劳动力. 当我们把 F_i 写成这样的新古典形式的时候,我们将得不到这样的"隅角"解:对所有 t, $\beta(t)=1$.

另一方面,这个问题在某些方面是说明性的. 有一点要强调一下,虽然此问题较简单,从而使我们可以很好地理解这个解的性质,但也不是想像的那么容易. 事实上,有些经济学家在解这个问题上就犯了错误. 这个问题不易解的原因之一是其中包含了两个状态变量而不是一个. 当最优控制问题只包含一个状态变量时,只有一个共态变量(即 Pontryagin 乘数),因此我们得到了一个二维微分方程系统,对它的分析我们已经很熟悉(参考第 7 章). 但当有两个状态变量时,如上述投资的区域分配问题,情况就不同了. Takayama(1967;1985,627~638 页)得到的方法可用来分析两个状态变量的问题. 关于该问题的一般讨论,可参阅 Pitchford(1977).

§9.2 各种情况

在定理 9.1 考虑的情况中,时间水平(T)是固定的,而结束点 $x(T)$ 不是预先固定的(它是由问题的解确定的). 然而,在许多情况中并非这样. 例如,如果问题的目的是最小化达到某个目标所需要的时间(T), 那么 T 就不是事先

指定的，而是作为问题的解而得到.这类问题称为**时间最优问题**.一般地，我们可以根据下面两种情况的组合来构造各种情况，第一，状态向量$x(T)$的坐标是否是预先确定的，第二，“**最终时间**”T是否是固定的.

现在我们使用一些例子来说明这点.在确定给浴盆装满的最短时间的例子中，最终状态$x(T)=100\%$是预先面定的，但是最终时间T并未指定，需要由问题的解来确定.在发射导弹截击飞机的例子中，目标是时间最短，最终时间T和最终状态变量$x(T)$都不是预先指定的，它们都需由最终的解来决定的.

下面我们从一般的角度来考虑这类问题.首先，我们考察状态变量的末端值$x_i(T), i=1,2,\cdots,n$是预先面定的情况.其次我们考察终端时间T不是
402 预先固定的情况.

(α)右端结束点$x(T)$被预先指定

这时，横截条件(8)简单地换成

$$x_i(T)=x_i^T, i=1,2,\cdots,n \tag{12}$$

由于失去(8)，我们失去n个条件.但我们根据(12)得到了n个条件.[10]

(β)终端时间开放

这种情况是“终端时间”T不是预先固定的.由子T是开放，方程组的自由度增加了一个，因此就需要再增加一个方程，这个方程可以写成如下形式：

$$H[x^*(T),u^*(T),T,p_o,p(T)]$$

$$\equiv\sum_{i=0}^{n}p_i(T)f_i[x^*(T),u^*(T),T]=0 \tag{13}$$

我们称微分方程组$\dot{x}_i=f[x(t),u(t),t]$为**自控的**，如果f不是显式地依赖t，即如果它可以写成

$$\dot{x}=f[x(t),u(t)]$$

否则，就称它为**非自控的**.对于自控系统，(13)式可以改写成

463
$$H[x^*(t),u^*(t),p_0,p(t)]$$

$$\equiv\sum_{i=0}^{n}p_i(t)f_i[x_i^*(t),u^*(t)]=0,\text{对所有的 } t \tag{14}$$

现在我们准备得到定理9.1的各种变式.这些都记录在Pontryagin等(1962)的第1章中.注意，若将(5)、(7)、(8)变成(5″)、(7′)和(8″)，再联系9.2节开始所做的评论，本质上讲，它们是定理9.1的特例.

(A)固定时间与固定结束点的问题

我们考虑下面这个问题，其中T与$x_i(T)$均是固定的：

$$\underset{u(t)}{\text{Maximize}}\int_0^T f_0[x(t),u(t),t]dt$$

约束条件

$$\dot{x}_i=f_i[x(t),u(t),t], i=1,2,\cdots,n$$

$$x_i(t^0)=x_i^0, x_i(T)=x_i^T, i=1,2,\cdots,n$$

【定理 9.2】(Pontryagin 1962,67～68 页) 在这个问题中,为使$[x^*(t), u^*(t)]$是最优解,必须存在连续函数 $p_0, p_1(t),\cdots,p_n(t)$,它们对每个 t 不同时为零,使得

(i) $x^*(t), u^*(t)$和 $p(t)$是 Hamilton 函数系统

$$\dot{x}_i^*=\frac{\partial H^*}{\partial p_i}, \dot{p}_i=-\frac{\partial H^*}{\partial x_i}, i=1,2,\cdots,n$$

的解,其中

$$H[x(t),u(t),t,p_0,p(t)]$$

$$\equiv p_0 f_0[x(t),u(t),t]+\sum_{i=1}^{n} p_i(t) f_i[x(t),u(t),t]$$

(ii) 对所有 $u(t)\in U$,

$$H[x^*(t),u^*(t),t,p_0,p(t)]\geqq H[x^*(t),u(t),t,p_0,p(t)]$$

(iii) 对所有的 t, $p_0=$常数$\geqq 0$.

464

(iv) $x(t^0)=x_i^0, x_i(T)=x_i^T, i=1,2,\cdots,n$.

上述提及的"不同时为零"意味着向量$[p_0(t), p_1(t),\cdots,p_n(t)]$是一个非零向量.注意,如果我们可证明 $p_0\neq 0$,则由条件(iii)知 $p_0>0$,于是,我们可通过标准化取 $p_0=1$.在经济学的实际应用中,这是经常遇到的情况.在许多经济学文献中,p_0 经常从一开始就取 1.

(B)末端时间开放,结束点固定(非自控的情况)

考虑下面问题:

$$\underset{u(t)}{\text{Maximize}}\int_{t^0}^{T} f_0[x(t),u(t),t]dt$$

约束条件

$$\dot{x}_i=f_i[x(t),u(t),t], i=1,2,\cdots,n$$

$$x_i(t^0)=x_i^0, x_i(T)=x_i^T, i=1,2,\cdots,n$$

这里与情况(A)不同的是,T 不是预先给定的.对这种情况,我们有定理 9.3.

【定理 9.3】(Pontryagin 等人 1962,60～61 页) 在此问题中,为使$[x^*(t), u^*(t)]$是最优解,必须存在连续函数 $p_0, p_1(t),\cdots,p_n(t)$,它们对每个 t 不同时为零,使得

(i) $x^*(t), u^*(t)$和 $p(t)$是 Hamilton 函数系统

$$\dot{x}_i^*=\frac{\partial H^*}{\partial p_i}, \dot{p}_i=-\frac{\partial H^*}{\partial x_i}, i=1,2,\cdots,n$$

的解,其中

$$H[x(t),u(t),t,p_0,p(t)]$$

$$\equiv p_0 f_0[x(t),u(t),t]+\sum_{i=1}^{n}p_i(t)f_i[x(t),u(t),t]$$

(ii) 对所有 $u(t)\in U$,有

$$H[x^*(t),u^*(t),t,p_0,p(t)]\geqq H[x^*(t),u(t),t,p_0,p(t)]$$

(iii) $H[x^*(T),u^*(T),T,p_0,p(T)]=0$

465 (iv)对所有的 t,$p_0=$常数$\geqq 0$

(v) $x_i(t^0)=x_i^*,x_i(T)=x_i^T,i=1,2,\cdots,n$

条件(iii)是新增的必要条件,因为末端时间 T 是开放的.

(C)时间最优问题(非自控的情况)

考虑下列的问题:

$$\underset{u(t)}{\text{Minimize}}\ T$$

约束条件为

$$\dot{x}_i=f_i[x(t),u(t),t],i=1,2,\cdots,n$$

$$x_i(t^0)=x_i^0,x_i(T)=x_i^T,i=1,2,\cdots,n$$

这里 $x_i(t^0)$和 $x_i(T)$都是固定的,但 T 是开放的.

这个问题称为**时间最优问题**,因为它要解决的问题是求从一个固定点 x_i^0 转移到另一个固定点 x_i^T 的最短时间,而且需满足一组给定的微分方程:$\dot{x}_i=f_i[x(t),u(t),t],i=1,2,\cdots,n$.显然这是情况(B)的特例,只要对所有 t 令 $f_0[x(t),u(t),t]\equiv -1$ 即可.因此应用定理 9.3,我们立刻得到定理 9.4.

【定理 9.4】(Pontryagin 等人 1962,65 页) 在这个问题中,为使$[x^*(t),u^*(t)]$是最优解,必须存在连续函数 $p_1(t),\cdots,p_n(t)$,它们对每个 t 不同时为零,使得

(i) $x^*(t),u^*(t)$和 $p(t)$是 Hamilton 函数系统

$$\dot{x}_i^*=\frac{\partial H^*}{\partial p_i},\dot{p}_i=-\frac{\partial H^*}{\partial x_i},i=1,2,\cdots,n$$

的解,其中

$$H[x(t),u(t),t,p(t)]\equiv\sum_{i=1}^{n}p_i(t)f_i[x(t),u(t),t]$$

466 (ii) 对所有 $u(t)\in U$,有

$$H[x^*(t),u^*(t),t,p(t)]\geqq H[x^*(t),u(t),t,p(t)]$$

(iii) $H[x^*(T),u^*(T),T,p(T)]\geqq 0$

(iv) $x_i(t^0)=x_i^0,x_i(T)=x_i^T,i=1,2,\cdots,n$

注:条件(iii)由

$p_0\geqq 0$ 和

$$-p_0+\sum_{i=1}^{n}p_i(T)f_i[x^*(T),u^*(T),T]=0$$

推得.

(D)末端时间开放,固定结束点(自控情况)

考虑下列问题:

$$\text{(a)}\quad \underset{u(t)}{\text{Maximize}}\int_{t^0}^{T}f_0[x(t),u(t),]dt$$

约束条件为

$$\dot{x}_i=f_i[x(t),u(t)],i=1,2,\cdots,n$$

$$x_i(t^0)=x_i^0,x_i(T)=x_i^T,i=1,2,\cdots,n$$

T 在这里又是不固定的.这是定理 9.3 的特例.由于问题条件的自控性质,定理 9.3 的条件(iii)修改为

$$H[x^*(t),u^*(t),p(t)]=0,\text{对所有的 }t,t^0\leqq t\leqq T \tag{15}$$

定理 9.3 的其余部分不变.

对于自控系统的时间最优问题可以描述为

$$\text{(b)}\quad \underset{u(t)}{\text{Minimize}}\ T$$

约束条件为

$$\dot{x}_i=f_i[x(t),u(t)],i=1,2,\cdots,n$$

$$x_i(t^0)=x_i^0,x_i(T)=x_i^T,i=1,2,\cdots,n$$

这是定理 9.4 的特例.由于问题的自控性质,定理 9.4 的条件(iii)可以改写为

$$H[x^*(t),u^*(t),p(t)]=\text{常数}\geqq 0,t^0\leqq t\leqq T \tag{16}$$

由此,我们得到定理 9.5.

【定理 9.5】(Pontryagin 等人 1962,19 页和 20～21 页) $[x^*(t),u^*(t)]$ 是问题(D)(a)的解的必要条件得自于用(15)式代替定理 9.3 的条件(iii),而定理 9.3 的其他条件不变.对于问题(D)(b),$[x^*(t),u^*(t)]$是其解的必要条件除了用(16)式代替定理 9.4 的条件(iii)以外,定理 9.4 的其他条件不变.

(E)固定时间,右结束点变动的问题

我们考虑下列问题:

$$\underset{u(t)}{\text{Maximize}}\int_{t^0}^{T}f_0[x(t),u(t),t]dt$$

约束条件为

$$\dot{x}_i=f_i[x(t),u(t),t],i=1,2,\cdots,n$$

$$x_i(t^0)=x_i^0,i=1,2,\cdots,n$$

这里 T 是固定的,但 $x_i(T),t=1,2,\cdots,n$ 是开放的.由于 $x_i(T)$不是固定的,我们得到横截条件 $p_i(T)=0,i=1,2,\cdots,n$.这个问题已经在关于目标函

数(9)的讨论中谈过.

【定理 9.6】(Pontryagin 等人 1962,69 页) 在这个问题中,必须存在连续函数 $p_1(t),p_2(t),\cdots,p_n(t)$,使得

(i) $x^*(t),u^*(t)$和 $p(t)$满足 H(Hamilton)方程

$$\dot{x}_i^*=\frac{\partial H^*}{\partial p_i},\dot{p}_i=-\frac{\partial H^*}{\partial x_i},i=1,2,\cdots,n$$

其中

$$H[x(t),u(t),t,p(t)]\equiv\sum_{i=1}^{n}p_i(t)f_i[x(t),u(t),t]$$

(ii) 对所有 $u(t)\in U$,有

$$H[x^*(t),u^*(t),t,p(t)]\geqq H[x^*(t),u(t),t,p(t)]$$

(iii) $p_i(T)=0,i=1,2,\cdots,n$

(iv) $x_i(t^0)=x_i^0,i=1,2,\cdots,n$

从**定理** 9.1 到定理 9.6,给出的都是关于$[x^*(t),u^*(t)]$为最优解的必要条件.如果 $f_0(x,u,t)$和 $f_i(x,u,t),i=1,2,\cdots,n$ 对 x 和 u 都是凹的,那么这些条件对于最优解同时也是充分的(见 Mangasarian 1966).另外,如 f_0 关于 x 和 u 是严格凹的,那么 u 的选择是惟一的,从而惟一地确定了最优路径.这样,我们得到了**定理** 9.7.

【定理 9.7】 如果 $f_0(x,u,t)$和 $f_i(x,u,t),i=1,2,\cdots,n$ 对于 x 和 u 都是凹函数,那么定理 9.1 到定理 9.6 中所陈述的必要条件也是各个问题中关于最优解的充分条件.另外,如果 f_0 对 x,u 是严格凹的,那么最优路径是惟一的.

§9.3 两个具体说明

9.3.1 变分法

考虑积分

$$J\equiv\int_a^b f[x(t),\dot{x}(t),t]dt$$

这里 a 和 b 是某常数,$x(t)=[x_1(t),\cdots,x_n(t)]$.古典变分法所要解决的问题是选择 $x(t)$以最大化 J,约束条件是 $x(a)=\alpha$ 和 $x(b)=\beta$.设 $\dot{x}=u$,这个问题可以转化为最优控制问题

$$\underset{u(t)}{\text{Maximize}}\int_a^b f[x(t),u(t),t]dt$$

约束条件为

$$\dot{x}_i = u_i, i = 1,2,\cdots,n, x(a) = \alpha, x(b) = \beta$$

469

在这个问题中，两端点 $x(a)$ 和 $x(b)$ 都是固定的，最终“时间” T（等于 b）也是固定的，但是要注意，没必要把 t 解释成时间.

对这个问题，我们可以应用定理 9.2. 为简化，略去表示最优的（*），此问题最优的一组必要条件可以表述为下述的(18)式到(21)式，其中 Hamilton 函数由(17)式定义.

$$H = p_0 f[x(t), u(t), t] + \sum_{i=1}^{n} p_i(t) u_i(t) \tag{17}$$

$$\dot{x}_i = \partial H / \partial p_i, \text{即 } \dot{x}_i = u_i, i = 1,2,\cdots,n \tag{18}$$

$$\dot{p}_i = -\partial H / \partial x_i, \text{即 } \dot{p}_i = -p_0(\partial f / \partial x_i), i = 1,2,\cdots,n \tag{19}$$

$$\partial H / \partial u_i = 0, \text{即 } p_0 \partial f / \partial u_i + p_i = 0, i = 1,2,\cdots,n \tag{20}$$

$$p_0 = \text{常数} \geqq 0 \tag{21}$$

这里我们假设控制域 $\overline{U}$ 是开集以得到(20). 这是来自古典变分法理论的假设.

首先我们证明 $p_0 > 0$. 为达到这一目的，假设反面情况，$p_0 = 0$. 那么从(20)式我们得到 $p_i = 0, i = 1,2,\cdots,n$，这与 $p_0, p_1, \cdots, p_n$ 不同时为零的假设矛盾. 因此我们必有 $p_0 > 0$.

设 $q_i = p_i / p_0$，我们从(19)和(20)得到

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = -\dot{q}_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial u_i}, \quad i = 1,2,\cdots,n$$

回忆 $\dot{x}_i = u_i, i = 1,2,\cdots,n$，我们得到

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i}, \quad i = 1,2,\cdots,n \tag{22}$$

这是古典变分法中著名的公式，称为 **Euler 方程**.[11]

470 条件(22)与 $x(a) = \alpha$ 及 $x(b) = \beta$ 构成最优的必要条件. 如果 $f(x,u,t)$ 是 x, u 的凹函数，这个条件也是充分条件. 于是我们得到定理 9.8.

【定理 9.8】(Euler 方程) 为使 $x(t)$ 最大化上面定义的积分 J，且约束为 $x(a) = \alpha$ 及 $x(b) = \beta$，则必须满足

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i}, i = 1,2,\cdots,n$$

$x(a) = \alpha$ 及 $x(b) = \beta$. 进一步，如果 $f(x,u,t)$ 是 x 和 u 的凹函数，上面的必要条件对于最优也是充分的.

471

注：这里特别注意控制域 $\overline{U}$ 被假定是开集，它进而允许一个内部解，即 $\partial H / \partial u_i = 0, i = 1,2,\cdots,n$. 在 Pontryagin 最大化原则中，$\overline{U}$ 不要求是开集.

变分法中最简单的问题是寻找联接平面上两个面定点且有最短距离的曲

线.在图 9.1 中给定两个点,连接这两点 A 和 B 之间的曲线用 $x(t)$ 表示,$x(a)=\alpha$ 及 $x(b)=\beta$.显然,这时 t 不代表"时间".

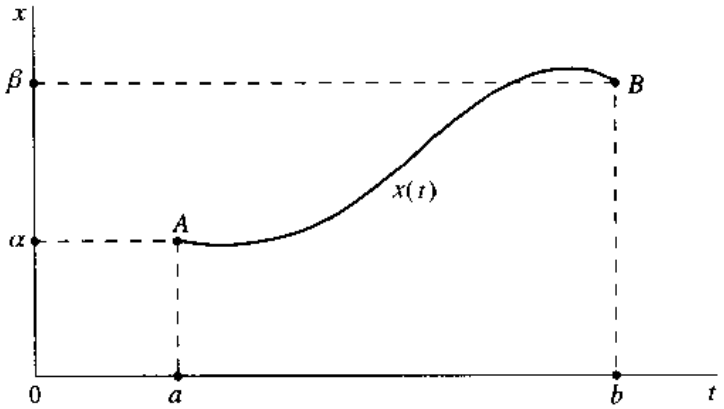


图 9.1 最短距离问题

给定"弧"$x(t)$,$x(t)$的每个无限小部分的距离由

$$ds=\sqrt{(dt)^2+(dx)^2}=\sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt$$

给出.A、B 之间的距离可以计算为

$$J_D\equiv\int_a^b\sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt$$

问题变为寻找一个函数("弧")$x(t)$,使得 J_D 最小,同时满足约束 $x(a)=\alpha$ 及 $x(b)=\beta$.这个问题称为**最短距离问题**.问题的答案显然是连接 A 和 B 的直线.这个答案不需要使用变分法就可以获得.但是,我们能通过这个问题来说明变分法的性质.

472

为了解决最短距离问题,设 $f_D\equiv\sqrt{1+\dot{x}^2}$,那么 Euler 方程可以写为

$$\frac{\partial f_D}{\partial x}=\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial f_D}{\partial\dot{x}}\right]$$

既然 f_D 不包含 x,$\partial f_D/\partial x=0$.于是

$$\frac{\partial f_D}{\partial\dot{x}}=\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}=\text{常数}$$

由此,我们可以得到 $\dot{x}(t)=c_1$(常数),使得 $x(t)=c_1t+c_2$.由于 $x(a)=\alpha$ 及 $x(b)=\beta$,我们有

$$x(t)=\frac{\alpha-\beta}{a-b}t+\frac{a\beta-\alpha b}{a-b}$$

这是表示一条所希望的直线的方程.

9.3.2 Pontryagin 等人说明的一个问题

根据 Pontryagin 等人(1962,22～26 页),我们考虑时间最优问题:

$$\underset{u(t)}{\text{Minimize}}\ T$$

约束条件为

$$\dot{x}=y,\dot{y}=u,-1\leqq u(t)\leqq 1$$

且

$$x(0)=x^0,y(0)=y^0,x(T)=0,y(T)=0 \tag{23}$$

这里$(x,y)\in R^2$.我们写出这个问题的 Hamilton 函数

$$H\equiv -p_0+p_1y+p_2u$$

这里 p_0 是常数,于是 Hamilton 方程写为

$$\dot{x}^*=\partial H^*/\partial p_1,\text{即 }\dot{x}^*=y^* \tag{24a}$$

$$\dot{y}^*=\partial H^*/\partial p_2,\text{即 }\dot{y}^*=u^* \tag{24b}$$

$$\dot{p}_1=-\partial H^*/\partial x,\text{即 }\dot{p}_1=0 \tag{25a}$$

$$\dot{p}_2=-\partial H^*/\partial y,\text{即 }\dot{p}_2=-p_1 \tag{25b}$$

473 从(25)式中,我们可以得到

$$p_1=c_1\text{ 和 }p_2=-c_1t+c_2 \tag{26}$$

这里 c_1 和 c_2 是某个常数.使 H 最大化,有

$$-p_0+p_1y^*+p_2u^*\geqq -p_0+p_1y^*+p_2u,-1\leqq u\leqq 1$$

由此我们得到

$$u^*(t)=1,\text{如果 }p_2(t)>0$$

$$u^*(t)=-1,\text{如果 }p_2(t)<0$$

在余下的分析中,为简化我们省略(*)号.当 $u=1$ 时,从(24b)我们有 $\dot{y}=1$,所以 $y=t+s_2$.又从 $\dot{x}=y$,得到

$$x=\frac{1}{2}t^2+s_2t+s_1=\frac{1}{2}(t+s_2)^2+[s_1-(s_2)^2/2]$$

或

$$x=\frac{1}{2}y^2+s,s\equiv s_1-(s_2)^2/2$$

这里 s_1 和 s_2 是积分常数.当 $u=-1$,从(24b)我们有 $\dot{y}=-1$,所以 $y=-t+s'_2$.再从 $\dot{x}=y$,我们可以得到

$$x=-\frac{1}{2}t^2+s'_2t+s'_1=-\frac{1}{2}(-t+s'_2)^2+[s'_1+(s'_2)^2/2]$$

或
$$x=-\frac{1}{2}y^2+s',\ s'\equiv s'_1+(s'_2)^2/2$$

于是我们有

$$x=\frac{1}{2}y^2+s,\ y=t+s_2,\ 当\ u=1\ 时 \tag{27a}$$

$$x=-\frac{1}{2}y^2+s',\ y=-t+s'_2,\ 当\ u=-1\ 时 \tag{27b}$$

方程 $x=y^2/2+s$ 定义了一族抛物线.

由 $\dot{x}=y$ 知,当 $y>0$,x 随时间而增加;当 $y<0$ 时,x 随时间减少.于是在满足 $u(t)=1$ 的时间区间内,对于某个 s,相位点沿抛物线 $x=y^2/2+s$ 顺时针移动.类似地,对 $u(t)=-1$ 的时间区间内,我们得到对于某个 s',相位点沿抛物线 $x=-y^2/2+s'$ 顺时针运动.

474 最优轨道由图 9.2 给出(这个图借自 Pontryagin 等人 1962,26 页)在图 9.2 中,AO 是抛物线 $x=y^2/2$ 位于下半平面的弧,BO 是抛物线 $x=-y^2/2$ 位于上半平面的弧.如果初始点 (x^0,y^0) 在弧 AOB 的上方,$u=-1$,直到相位点碰到 AO 弧,然后在其余的时间,$u=1$,直至相位点抵达指定的终止点 $[x(T)=0$ 和 $y(T)=0]$,即原点.类似地如果初始点 (x^0,y^0) 在曲线 AOB 的下方,先有 $u=1$ 直到相位点碰到弧 BO,再 $u=-1$,直到它到达原点.

假设初始点 (x^0,y^0) 给定为 $x^0=1$,$y^0=2$,那么开始我们有 $u=-1$.由(27b)式,结合 $x^0=1$ 和 $y^0=2$,我们有 $s'=3$ 和 $s'_2=2$,或

$$x=-y^2/2+3,\ y=-t+2$$

475 相位点在 $u=-1$ 的影响下移动,直到达到弧 AO 或 $x=y^2/2$,这时 u 值转换到 1,直到相位点移动到指定的终点原点.因此我们有

$$u(t)=-1,0\leqq t<t';\ u(t)=1,t'\leqq t\leqq T$$

这里,t' 表示 u 发生切换的时间.[12]从 $y(t')=-\sqrt{3}=-t'+2$ 中得到 t' 的值为 $t'=2+\sqrt{3}$.当 $t'\leqq t\leqq T$ 时,相位点在 $u=1$ 作用下沿弧 AO,$x=y^2/2$ 移动.由于 $u=1$,我们从式(27a)得到 $y=t+s_2$,因此 $y(t')=-\sqrt{3}=t'+s_2=(2+\sqrt{3})+s_2$.由此式我们知,从点 $P=(3/2,-\sqrt{3})$ 沿弧 AO 到原点,$s_2=-2-2\sqrt{3}$,或 $y(t)=t-(2+2\sqrt{3})$.由 $y(T)=0=T-(2+2\sqrt{3})$,$T=2+2\sqrt{3}$,因此 $T-t'=(2+2\sqrt{3})-(2+\sqrt{3})=\sqrt{3}$.也就是,相位点从 P 移动到原点所要求的时间是 $\sqrt{3}$.相位点从起始点 $(x^0,y^0)=(1,2)$ 到 P 点,再由 P 点到原点的总时间是 $t'+(T-t')=(2+\sqrt{3})+\sqrt{3}=2+2\sqrt{3}$.

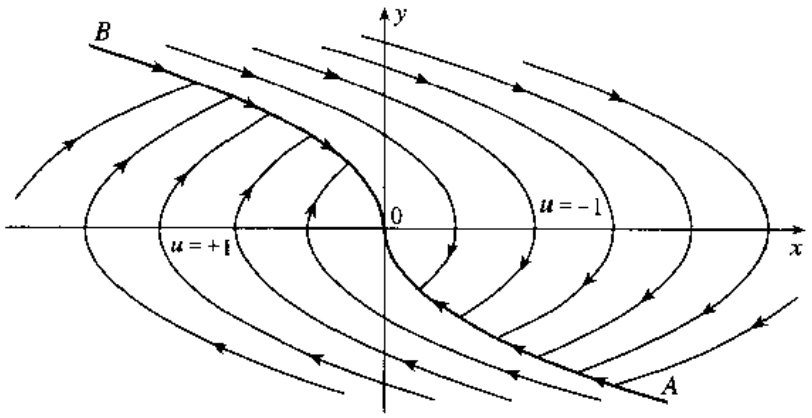


图 9.2 (23)的最优弹道

§9.4 最优增长问题

在这一节中,我们考虑一个最优增长问题.这个问题在20世纪50年代和60年代被广泛地深入讨论过.这个问题由 Koopmans(1965)和 Cass(1965)以或多或少地令人满意的方式给予了解答.下面,我们通过讨论这个问题来阐释最优控制技术.

新古典增长模型给定为

$$Y_t = C_t + I_t \tag{28a}$$

$$Y_t = F(N_t, K_t) \tag{28b}$$

$$\dot{K}_t = I_t \tag{28c}$$

$$\dot{N}_t / N_t = n \tag{28d}$$

476 这里 Y_t=产出,C_t=消费,I_t=投资,F=生产函数,N_t=劳动力,K_t=资本,n=人口增长率(假设为常数),下标 t 表示时间.这里为便于解释,假设不存在资本折旧.[13]

假设 F 是一次齐次的(规模收益不变),所以我们有

$$y_t = f(k_t),\text{这里 } y_t \equiv Y_t / N_t \text{ 且 } k_t \equiv K_t / N_t$$

我们又加上下面通常的假设:[14]

$$\text{对所有 } k \geqq 0,\text{有 } f'(k) > 0, f''(k) < 0 \tag{29a}$$

以及

$$f(0) = 0, f'(0) = \infty, f'(\infty) = 0 \tag{29b}$$

在规模收益不变的假设下，(28)式的四个式子可以化简为

$$\dot{k}_t = f(k_t) - nk_t - c_t \tag{30}$$

这里，$c_t \equiv C_t / N_t$. 如第 6 章所提到的，(30)式是新古典总量增长模型的基本方程. 方程(30)确定了当前模型的**可行条件**. 满足(30)的路径称为**可行路径**. 如果它还进一步满足任意给定的初始值 k_0，称此路径为**可达路径**. 注意(29)式保证存在一个惟一的 $\bar{k}>0$，使得

$$f(\bar{k}) = n\bar{k} \tag{31}$$

如果我们设定需求行为为

$$c_t = (1-s)y_t, 0<s<1$$

(这里 s 是常数)，那么我们从(30)式中可以获得

$$\dot{k}_t = sf(k_t) - nk_t$$

这样我们可以证明每个可达路径都收敛于 k_s，这里 k_s 由

$$sf(k_S) = nk_S, \text{且 } k_S>0$$

477 惟一确定. 于是从(30)式，我们可以证明对于任何给定的初值 $k_0>0$，满足(30)式的 k_t 在 $t\to\infty$ 时，接近于 k_S，这一著名的结论是由 Solow 和 Swan 得到的，我们已在第 6 章中讨论过了.

最优增长问题要问另一个问题. 如果不限定消费行为，我们还要问：每一个时刻应该消费多少，才能使某个目标值最大，同时满足(30)式的可行条件及任意指定的一个初始值 k_0？这个问题由 Ramsey(1928)首先提出并解决. 一段时间的沉寂以后，这个问题又在 20 世纪 50 年代和 60 年代得到深入讨论，产生了由 Cass(1965)和 Koopmans(1965)得到的重要结论，以后又有许多进一步的研究和许多更重要的成果.[15]

Cass(1965)和 Koopmans(1965)和其他人所考虑的目标函数是

$$I \equiv \int_0^{\infty} u(c_t)e^{-\rho t}dt \tag{32}$$

这里，u 是社会中具"代表性"的个人的效用函数，ρ 是时间贴现因子. 假设 ρ 是一个正的常数[16]. 我们假设 u 定义在 $(0,\infty)$ 上，二阶连续可微，并且对于所有的 c_t，有

$$u'(c_t)>0, u''(c_t)<0$$

以及

$$\lim_{c_t\to 0} u'(c_t) = -\infty$$

最后一个假设表示"避免出现极低的人均消费水平的必要性"(Cass, 1965, 234 页).

现在我们的问题就是在(30)式给定约束下，找到一个时间路径 c_t 使(32)式定义的积分 I 取最大值，并且满足 $k_t \geqq 0, c_t \geqq 0$，及任意给定的初值 $k_0 > 0$.

478 到此我们已经把问题公式化了，但是还有一个重要的问题，我们如何能保证 I 是收敛的？如果对于给定 $k_0 > 0$ 的一个可行路径，它的积分是不收敛的(比如说趋于∞)，那么我们的问题就没有意义了. 排除这一困难的最简单方式是假设效用函数由于满足感而有上界，[17] 即

$$\text{对所有 } c_t, u(c_t) < \bar{u}$$

那么，就有

$$I \equiv \int_0^{\infty} u(c_t) e^{-\rho t} dt \leqq \bar{u}/\rho$$

由 $k_0 > 0$，对所有 t，满足可行条件(30)式的消费 c_t 有可能保持正的水平，因此 I 值不会发散到 $-\infty$.

我们现在转而解决我们上面所提出的最大化问题. 注意 k_t 是状态变量而 c_t 是控制变量. 既然，在这个问题中要想确定 $t \to \infty$ 的 k_t 的极限值(记为 k_∞)是困难的，那么 k_∞ 就不是预先固定的. 定理 9.6 要做相应的修改，加上 $T \to \infty$、定义 Hamilton 函数为

$$H \equiv u(c_t) e^{-\rho t} + p_t [f(k_t) - nk_t - c_t]$$

这里 p_t 是 Pontryagin 乘子. 下面就是 (k_t^*, c_t^*) 为最优的必要条件：

(i) (k_t^*, c_t^*) 是 Hamilton 函数系统

$$\dot{k}_t^* = \partial H^* / \partial p_t, \text{即 } \dot{k}_t^* = f(k_t^*) - nk_t^* - c_t^* \tag{33a}$$

$$\dot{p}_t = -\partial H^* / \partial k_t, \text{即 } \dot{p}_t = -p_t [f'(k_t^*) - n] \tag{33b}$$

的解.

(ii) 对于 $c_t \geqq 0$，H 取最大值，即，当对于任意 t，$c_t \geqq 0$ 时，有

$$H(k_t^*, c_t^*, t, p_t) \geqq H(k_t^*, c_t, t, p_t)$$

这又要求对每个 t

$$\partial H^* / \partial c_t \leqq 0 \text{ 且 } (\partial H^* / \partial c_t) c_t^* = 0 \tag{34}$$

(iii) 横截条件

$$\lim_{t \to \infty} p_t k_t^* = 0 \tag{35}$$

成立. 这个横截条件代替了

$$\lim_{t \to \infty} p_t = 0 \tag{35'}$$

虽然(35′)看来像是定理 9.6 中 $p_T = 0$ 在 $T \to \infty$ 时的扩展，但(35′)并不普遍成立的，它应该由(35)式来代替.[18]

条件(33)、(34)和(35)也是 (k_t^*, t^*) 为最优的充分条件，因为 $u(t)$ 和

$[f(k_t)-nk_t-c_t]$是 k_t 和 c_t 的凹函数.

由(34)式知

$$\text{对于所有 } t,\text{都有}\partial H^*/\partial c_t=u'(c_t^*)e^{-\rho t}-p_t\leqq 0$$

因此,如果对某个 t,$c_t^*=0$,则由 $u'(0)=-\infty$,p_t 是无界的.由于乘子必须是有界的,这意味着对所有的 t,$c_t^*>0$(内部解)于是(34)式简化为

$$\partial H^*/\partial c_t=0,\text{即 } u'(c_t^*)e^{-\rho t}=p_t \tag{36}$$

这一等式阐明了当前情况下 Pontryagin 乘子(p_t)的经济学意义,即 p_t 显示了时刻 t 消费的边际(瞬时)效用的现值.在时刻 t 由于牺牲一个单位的消费(将它用于物质资产的积累)所产生的效用损失用 $u'(c_t)$来衡量,而它的现值等于 $u'(c_t)e^{-\rho t}$.于是(36)意味着 p_t 代表积累的机会成本(或"影子价格").另外(36)还说明,对所有的 t,$p_t>0$,因为对所有的 c_t,$u'>0$.

480

关于 c_t 的最大化可表示成

$$\text{对所有的 } c_t\geqq 0\text{(对每个 } t\text{)},\text{有}$$

$$u(c_t^*)e^{-\rho t}+p_t[f(k_t^*)-nk_t^*-c_t^*]\geqq u(c_t)e^{-\rho t}+p_t[f(k_t^*)-nk_t^*-c_t]$$

由此我们立即得到,对所有的 t,当所有的 $c_t\geqq 0$ 时,

$$[u(c_t^*)-u(c_t)]e^{-\rho t}\geqq p_t(c_t^*-c_t)$$

这意味着对每个 t,

$$\text{对所有使得 } p_tc_t\leqq p_tc_t^* \text{ 的 } c_t\geqq 0,u(c_t^*)-u(c_t)\geqq 0 \tag{37}$$

$$\text{对所有使得 } u(c_t)\geqq u(c_t^*)\text{的 } c_t\geqq 0,p_tc_t\geqq p_tc_t^* \tag{38}$$

关系式(37)说在每个时刻,c_t^* 使效用 u 最大,其他不超过最优消费 c_t^* 值的 c_t 的效用将不会超过最优消费 c_t^* 的效用.因此(37)表示在预算条件约束下的效用最大化.(38)式说明对于最优消费 c_t^*,它的消费支出是最小的,任何要使效用变大或等同的消费都要超过这一最小消费.式(38)为在效用约束下的支出最小化.

为简化符号,我们略去用以表示最优路径的星号(*).那么(33a)、(33b)、(35)和(36)可以重写为

$$\dot{k}_t=f(k_t)-nk_t-c_t \tag{33′a}$$

$$\dot{p}_t=-p_t[f'(k_t)-n] \tag{33′b}$$

$$\lim_{t\to\infty}p_tk_t=0 \tag{35″}$$

且

$$u'(c_t)e^{-\rho t}=p_t \tag{36′}$$

定义 q_t 为

$$q_t = p_t e^{\alpha t}$$

因此

$$p_t = q_t e^{-\alpha t} \tag{39}$$

481 由此,(36)可以写为

$$u'(c_t) = q_t \tag{40}$$

于是,q_t 代表了时刻 t 消费的边际效用即期值或即期的积累机会成本.[19]对 c_t 解(40),我们得到

$$c_t = c(q_t), \text{这里 } c' = 1/u'' < 0 \tag{41}$$

使用(33′a)和(41),我们可以定义函数 ϕ 为

$$\dot{k}_t = \phi(k_t, q_t) = f(k_t) - nk_t - c(q_t) \tag{42}$$

另外,通过(39)我们看到

$$\dot{p}_t = \dot{q}_t e^{-\alpha t} - \rho q_t e^{-\alpha t} = (\dot{q}_t - \rho q_t) e^{-\alpha t}$$

或

$$\dot{p}_t / p_t = (\dot{q}_t / q_t) - \rho$$

因此我们可以重写(33′b)为

$$\dot{q}_t = -q_t[f'(k_t) - (n + \rho)] = \psi(k_t, q_t) \tag{43}$$

借助 q_t,横截条件(35″)可重写为

$$\lim_{t \to \infty} q_t e^{-\alpha t} k_t = 0 \tag{44}$$

两个微分方程(42)和(43),连同两个边界条件,即(44)和给定的 k,可以完全确定(k_t, q_t)的轨道.k, q 的稳态值(记作 $\hat{k}$ 和 $\hat{p}$)由

$$\phi(\hat{k}, \hat{q}) = 0, \text{及 } \psi(\hat{k}, \hat{q}) = 0$$

确定.

因为对所有 k,$f'' < 0$,值 $\hat{k} > 0$ 由

$$f'(\hat{k}) = n + \rho \tag{45}$$

482 惟一确定.给定 $\hat{k}$,由(33′a),人均消费的稳态值($\hat{c}$)可以惟一确定为

$$\hat{c} = f(\hat{k}) - n\hat{k}$$

由(40)又可以确定 $\hat{q}$.路径$(\hat{k}, \hat{c})$称为**修正的黄金律路径**.

对于动态系统(42)及(43),我们可以计算出

$$\phi_k(\equiv\partial\dot{k}/\partial k_t)=f'(k_t)-n$$

$$\phi_q(\equiv\partial\dot{k}/\partial q_t)=-c'(q_t) \tag{46a}$$

$$\psi_k(\equiv\partial\dot{q}/\partial k_t)=q_t f''(k_t)$$

$$\psi_q(\equiv\partial\dot{q}/\partial q_t)=-[f'(k_t)-(n+\rho)] \tag{46b}$$

可得在定态$(\hat{k},\hat{q})$处赋值的 Jacobian 行列式为

$$\hat{J}\equiv\hat{\phi}_k\hat{\Psi}_q \quad \Psi_k\hat{\phi}_q=-\Psi_k\hat{\phi}_q=-\hat{q}f''(\hat{k})c'(\hat{q})<0$$

由于$\hat{J}<0$,我们得到稳态是鞍点的结论(见定理 7.4 和 7.6).下面依据我们熟悉的相位图研究$(\dot{k}_t,\dot{q}_t)$的动态路径.首先,不管 q_t 的值,由(43)式,$\dot{q}_t=0$(或$\psi=0$)的 k_t 是常数($=\hat{k}$).其次,由于 $\hat{\psi}_k=-\hat{q}f''(\hat{k})>0$ 我们得到 $\dot{q}_t>0$(或$\dot{q}_t<0$)对应于(k_t,q_t)平面上$(\dot{q}_t=0)$线的右半部(或左半部),这里 k_t 在水平轴上衡量.这显示在图 9.3 中.[20]

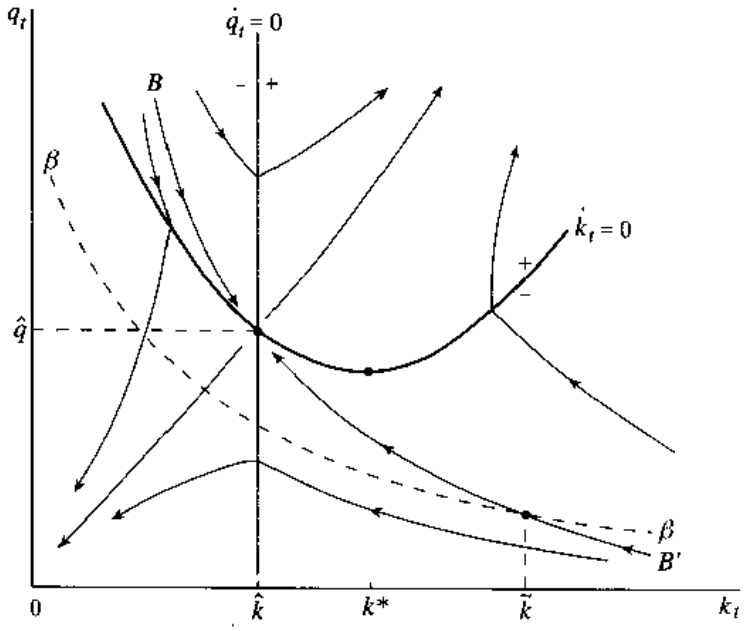


图 9.3 (k_t,q_t)的动态行为

由(42)式,可得到$(\dot{k}_t=0)$曲线的形状

$$\left.\frac{dq_t}{dk_t}\right|_{\dot{k}_t=0}=-\frac{\phi_k}{\phi_q}=\frac{f'-n}{c'} \tag{47}$$

设 k^*定义为

$$f'(k^*)=n \tag{48}$$

由于 $f''<0$.k^*是惟一的且$\hat{k}<k^*$,设 c^*定义为

$$c^*\equiv f(k^*)-nk^* \tag{49}$$

483 路径(k^*, c^*)就是熟悉的黄金律路径.[21]另外,由k^*的定义及$f''<0$,我们有

$$\text{如果 } k_t \lesseqgtr k^*, \text{则 } f'(k_t) \gtreqless n \tag{50}$$

因此,由式(47)(50)及$c'<0$,我们得到

$$\text{如果 } k_t \lesseqgtr k^*, \text{则} \left.\frac{dq_t}{dk_t}\right|_{k=0} \lesseqgtr 0 \tag{51}$$

于是当$k_t<k^*$时,$(\dot{k}_t=0)$线向下倾斜,当$k_t>k^*$时向上倾斜.如图9.3所示.另外由(46a)我们得到,在$(\dot{k}_t=0)$线上方(或下方),$\dot{k}_t>0$(或$\dot{k}_t<0$),如图(9.3).k_t, q_t的鞍状行为也在图9.3中表示.

在满足(42)和(43)的无数个路径中,那些满足横截条件(44)和指定的资
484 本—劳动化比率初始值(k_0)的路径是最优路径.容易看到,(由图9.3中的B和B'指明的)鞍状的稳定分支满足这些条件.如果$k_0<\tilde{k}$,最优路径由B曲线给出,而如果$k_0>\tilde{k}$,则最优路径由B'曲线给出.由U是严格凹的函数推出最优路径的惟一性,这些路径是仅有的最优路径.注意,沿着曲线B和B',我们总有$k_t>0$(和$q_t>0$).在初始的最大化问题中加上的约束$k_t \geqq 0$自动满足.

总结一下,我们可以得到命题9.1,它给出了由Ramsey(1982),Koopmans(1965)与Cass(1965)所得到的结果.[22]

485 **【命题9.1】** 给定任意初始值$k_0>0$,最优可行路径是惟一的而且单调收敛于$(\tilde{k}, \tilde{q})$.最优路径为鞍状路径的稳定分支,如图9.3所示.

根据一个不同的相位图,我们也可以得到命题9.1.为此,我们首先观察,由(40)式

$$\dot{q}_t = u''\dot{c}_t$$

因此有

$$\dot{q}_t/q_t = u''\dot{c}_t/u'$$

然后,使用(43),我们可以得到

$$\dot{c}_t = -(u'/u'')[f'(k_t)-(n+\rho)] \tag{52}$$

这一方程和(33a)共同构成了一个动态系统方程,以确定(k_t, c_t)的时间路径.通过常规的操作,可以构造出这一方程的相位图,如图9.4中所示.[23]

稳态仍是一个鞍点,鞍状路径的稳定分支,B和B'是惟一的最优路径.图9.4可以被考虑成最优路径的另一种图示,这里时间路径(k_t, c_t)代替了(k_t, q_t),注意,通过使用(36)式,横截条件(44)可以被重写为

$$\lim_{t\to\infty} u'(c_t)e^{-\rho t}k_t = 0 \tag{44'}$$

486 显然,由图9.4中的稳定分支BB'所描述的最优路径(k_t, q_t)满足这一条件.另外注意,在这个路径上,$k_t \geqq 0$.

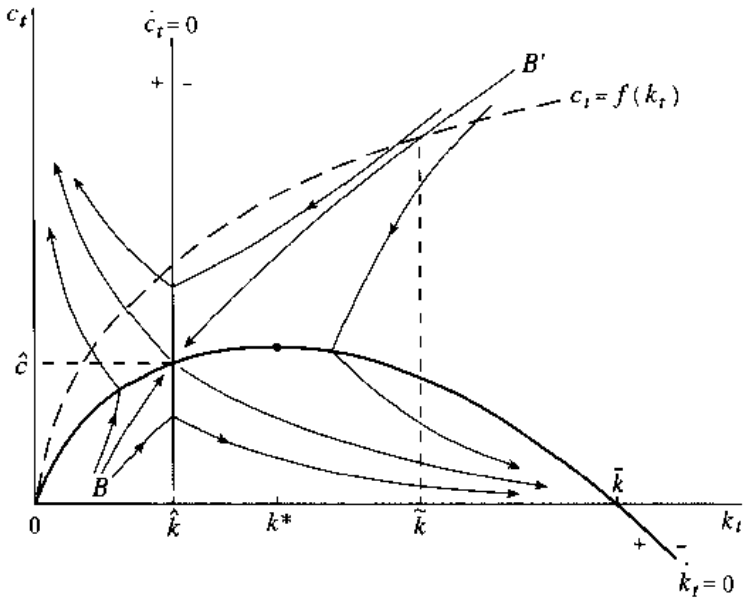


图 9.4　最优增长问题的相位图

注：Ramsey(1928)在讨论最优增长问题时，拒绝使用如(32)中所示的一个正的折现因子 ρ，他认为，把我们后代的效用函数折现而同我们自己的效用函数比较，是"不道德"的. 如果 $\rho=0$，那么(32)式定义的积分可能不收敛. 代替(32)式，Ramsey(1928)考虑了另外一种积分函数

$$I_R\equiv\int_0^{\infty}[u(c_t)-\hat{u}]dt \tag{32'}$$

这里 $\hat{u}$ 是某个参考路径，把 $\hat{u}$ 看成 $\hat{u}\equiv u(\hat{c})$，我们可以考虑这样一个问题，即最大化 I_R，并受可行条件(30)，$c_t\geqq 0$，$k_t\geqq 0$ 及给定的初始点条件 k_0 的约束. 对此问题的分析实质上与前面的一样. 我们可以证明，给定任意初始值 $k_0>0$，最优路径是惟一的，并且单调地收敛于 $\bar{k}$. 最优路径也像图 9.3 或图 9.4 中那样，是鞍状路径中的稳定分支. 沿着这样的最优路径，积分 I_R 收敛. 由于 $\rho=0$，$\hat{k}=k^*$，即，修正的黄金律路径等于黄金律路径.

这里在分析最优增长路径时隐含地假设现在的资本存量(k_t)能够以任何需要的速度被消耗掉("吃掉"). 另一方面，从某种意义上讲更合理的隐含假设是投资一旦转化成了固定的物质形式就不可能再变成消费品. 因此，经济不能"吃掉"过去积累起来的资本.[24]这样，当前的消费(c_t)只能来源于当前的产出 $f(k_t)$. 从数学上讲，这等于加上了条件[25]

$$c_t\leqq f(k_t) \tag{53}$$

在图 9.4 中，我们用虚线表示 $c_t=f(k_t)$ 的 (k_t,c_t) 的轨迹，这条轨迹称为**边界曲线**.

为了满足条件(53)，最优路径不能位于边界曲线之上. 由于沿($\dot{k}=0$)线我们有

$$c_t = f(k_t) - nk_t$$

而且沿边界曲线我们有

$$c_t = f(k_t)$$

很明显，边界曲线位于 $\dot{k}=0$ 曲线之上（如图 9.4 所示）. 设 $\tilde{k}$ 表示由边界曲线与鞍状路径的稳定分支 BB' 的交点所决定的资本—劳动力比. 如果初始的资本—劳动比（k_0）不超过 $\tilde{k}$，那么最优路径与没有(53)式的路径一样. 另一方面，如果 $k_0>\tilde{k}$，k_t 将沿着边界曲线随时间减少，因此 c_t 不超过 $f(k_t)$，在 k_t 到达 $\tilde{k}$ 的时间点后，最优的 k_t 沿着 BB' 曲线趋向 $\tilde{k}$.

488

这个有关边界曲线的记号可以同样引入像图 9.3 这样的 (k_t, q_t) 相位图. 为说明这点利用 $c_t = c(q_t)$ 改写条件(53)为

$$\beta(k_t, q_t) = f(k_t) - c(q_t) \geqq 0 \tag{54}$$

边界曲线现在定义为使 $\beta(k_t, q_t)=0$ 的 (k_t, q_t) 的轨迹，在图 9.3 中由虚线 $\beta\beta'$ 表示. 由于我们有

$$\left.\frac{dq_t}{dk_t}\right|_{\beta=0} = -f'/c' < 0 \tag{55}$$

边界曲线是向下倾斜的. 由于 $f'>0$，满足(55)式的区域是边界曲线的右半部分. 令 $\bar{k}$（图 9.3 中）表示由边界曲线与鞍状路径的稳定分支 BB' 的交点所决定的资本—劳动比的值. 如果初始的资本—劳动比（k_0）不超过 $\bar{k}$，那么最优路径将与没有条件(54)的相同. 另一方面，如果 $k_0>\bar{k}$，那么最优的 k_t 将沿边界曲线减少，在 k_t 达到 $\bar{k}$ 的时间点后，最优的 k_t 沿 BB' 曲线趋向于 $\bar{k}$. 这里的分析与图 9.4 的分析类似.

讨论(53)式和(54)式时会产生一个问题. 即，我们如何知道当 $k_t>\bar{k}$ 时沿着边界曲线的路径就是最优的？虽然这个问题的答案可能是直观的，但是这需要做更正规的分析.[26]

▶ 注　释

[1]本章开头的阐述取自 Takayama(1985,600 页).

[2]由于本书不是用来说明最优控制论的，我们将把注意力集中于对经济学家最有用的材料. 有兴趣进一步探求该问题的读者可参阅此处引用的若干书籍.

[3]注意每个状态变量的导数出现在方程中，而控制函数的导数既不在目标函数中也不在约束方程中. 有时可用这来迅速区分状态变量和控制变量.

[4]假定 X 是 R^n 的一个连通开子集. R^n 中的集合 X 如果不能分成 R^n 的两个不相联且在 X 中为开集的非空子集，则 X 称为**连通**的. 直观地说，如果集合是"一体"的(但可能有"洞")，则它是**连通**的.

[5]短语"不同时为零"意指 $p_1(t),\cdots,p_n(t)$ 不能同时为零，即 $p(t)\equiv[p_1(t),\cdots,p_n(t)]$ 是一个非零向量. 在最优控制论的这个定理和随后定理中，$p(t)$ 如同 $x(t)$，在区间 $[t^0,T]$ 上连续且有分段连续导数. $\dot{p}(t)$ 和 $\dot{x}(t)$ 可能的不连续点均是 $u(t)$ 的不连续点. 在多数的经济应用中，这种 $\dot{p}$ 和 $\dot{x}$ 上的细微点可不碍事地不予考虑.

[6]符号 $\partial H^*/\partial x_i$ 和 $\partial H^*/\partial p_i$ 意指这些偏导数在 $[x^*(t),u^*(t),t,p(t)]$ 处赋值.

[7]下面摘自 Simmons(1972，77 页)的引语或许对读者来说会有一些兴趣."18 世纪数学家的目的在于发现一个可以从中导出牛顿力学的普遍原理……. 这些事实和其他事实向欧拉暗示：自然以最有效和最经济的方式追求其不同目的，一个隐藏的简单性存在于混乱的表面现象之下. 正是这种形而上学的观念导致他建立了变分法来作为探寻这些问题的工具. 差不多一个世纪以后，欧拉的梦想由 Hamilton 实现". 这里 Hamilton 函数抓住了其实质. William Rown *H*amilton(1805—1865)是一位爱尔兰数学家和物理学家. 他"是一个古典的儿童奇才……三岁时，他可以读英语；四岁时，他开始学习希腊语、拉丁语和希伯来语；八岁时，他又学意大利语和法语；十岁时，他学习阿拉伯语等；十三岁时，人们说他每长一岁就掌握一种语言。这种语言上的天赋在十四岁时被终止，他转向数学、天文学和光学。十八岁时，他出版了一篇文章来纠正 Laplace 在 Mécanique Céleste 中的错误；当他还是都伯林 Trinity College 本科生的时候，他被聘为该学院的天文学教授，并自动成为爱尔兰皇家天文学家."(Simmons，1972，387 页).

[8]我们不讨论为什么(8)被称为是**横截条件**的原因. 关于横截条件的优秀讨论，见 Pontryagin 等人(1962，第 1 章，第 2 节). 另见 Benveniste 和 Scheinkman(1982)，Araujo，Scheinkmen(1983).

[9]如果 $u_k(t)$ 在一定时间 t 碰到边角，而在某些其他时间 t 位于内部，则称这样的控制称为 **bang－coast 控制**. 例如，如果 $0\leqq u_k\leqq 1$，则控制 $u_k^*(t)=0$，对于 $t^0\leqq t<\bar{t}$；$0<u_k^*(t)<1$，对于 $\bar{t}\leqq t\leqq T$，便是一个 bang－coast 控制. 注意，bang－bang 和 bang－coast 控制假定控制中的跳跃是"无成本的"或"非惯性"的.

[10]在(12)中，状态向量 $x(T)$ 的所有坐标都是固定的. 不然，如果只有一些坐标是固定的，就是说，如果

$$x_i(T)=x_i^T,\ i=1,2,\cdots n',\ n'<n \tag{12'}$$

则我们有

$$p_i(T)=c_i,\ i=n'+1,n'+2,\cdots,n \tag{8'}$$

(12′)和(8′)式中共有 n 个等式. 这些与(2)式即定理 9.1 的条件(iv)一起提供

了关于 $2n$ 个微分方程的 $2n$ 个边界条件.

[11]现代控制论是基于古典变分法发展而来的.尽管这是个古老的命题(古希腊人曾解决过其中的一些问题),但是直到 1744 年欧拉才将其演变为数学的一个重要分枝。关于欧拉,Simmons(1972,107～111 页)曾用明显赞赏性的词句写道:

"欧拉(Leonard Euler,1707—1783)是苏黎士最伟大的科学家.三位现代最伟大的数学家之一(其他两位是 Gauss 和 Riemann)。他或许是历史上最伟大的作者.他的选集出版工作是 1911 年开始的,人们估计大约需要出版一百多大卷才能最终完成此出版项目.

他的写作是轻松和清晰的楷模。他从不浓缩,对其丰富思想和广博兴趣进行充分的揭示.法国物理学家 Arago 曾评论道'他计算起来没有明显费力,就像人呼吸,或像鹰在空中翱翔一样.'在生命的最后十七年中,他双目失明;但他实际上增加了已有的巨大工作成果.

Euler 是巴塞尔人,在大学是 Johann Bernoulli 的学生,但他青出于蓝而胜于蓝。他的工作生涯是作为柏林科学院和圣·彼得堡科学院的院士度过的。他是一个具有广博文化的人,精通古典文学和许多现代语言,生理学、医学、植物学、地理学和整个物理学……他的个人生活是如此的平和安静,所以才有可能生出 13 个孩子.

虽然,他自己不是一个老师,Euler 对数学教学比其他任何人都影响深刻。这主要源于他三本伟大的著作:Introductio in Analysin Infinitorum(1748),Institutiones Calculi Differentialis(1755),Institutiones Calculi Integralis(1768—1794).像人们常说的那样,自 1748 年以来所有有关基础和高级积分的教科书都是 Euler 的复制品,或是复制品的复制品……通过他的工作,符号 e,i 和 π 成为数学家常用的符号.他对数学标准符号的其他贡献是 $\sin x$,$\cos x$,用 $f(x)$表示非限定函数,用 $\sum$ 表示求和……牛顿是古典数学的奠基人,但 Euler 是主建筑设计师……

Euler 是数学的莎士比亚——多才多艺,丰富细致,无穷无尽."

[12]转换点的坐标可如下得到.设 $-y^2/2+3=x=y^2/2$,我们得 $y=-\sqrt{3}$.从 $x=y^2/2$,我们有 $x=3/2$.

[13]折旧可以如下方式纳入分析.设 δ 是折旧率,改写(28c)为 $K_t=I_t-\delta K_t$.这不会从本质上改变当前的分析.

[14]回忆第 6 章中 Solow－Swan 增长模型的讨论.特别地,我们注意 $f'=\partial f/\partial K$(资本边际产品),以及当且仅当 $\partial^2 F/\partial N^2<0$ 和 $\partial^2 F/\partial K^2<0$ 时,$f'<0$.

[15]50 年代和 60 年代的一些文献见 Takayama(1985,466－468 页).关于这个专题和相关领域有很多发展,著名的"高速公路理论",通常总结在"资本理论"的名下.这个专题的最近综述见 Mckenzie(1986),其中他使用离散时间模型.关于连续时间模型,重要的结论在 Benveniste 和 Scheinkman(1982),Araujo 和 Scheinkman(1983),和 Becker,Boyd 和 Sung(1989)中得到.

[16]这种类型的目标被不同的作者批评的原因"在于纯时间偏好率不应

与消费模式的大小和形状无关”. 如(32)中所示,偏好被附上时间因素,这是“强可分离性质的直接推论,由此任何两个时期的消费边际替代率独立于消费潮流”(Becker,Boyd 和 Sung,1986). Hicks(1965)按照此方向作了扩展的评论. 我们假定以(32)中表达的、ρ 为常数的目标函数只是为了简便.

[17]实际上,费一些工夫就可大大弱化假定. 为此,回忆(31)中定义的 $\bar{k}$. 如果 $k_0>\bar{k}$,则从(30),对所有 t 有 $\dot{k}_t<0$ 以保持 $c_t>0$. 这样,对所有 t,$k_t<k_0$,故对所有 t 有 $f(k_t)<f(k_0)$. 如果 $k_0\leqq\bar{k}$,我们可证明对任何可达到的途径,对所有 $t\geqq0$ 有 $k_t\leqq\bar{k}$(通过在(33a)中设定对所有 t,$c_t^*=0$,这称为**纯积累途径**). 由此我们可以证明沿着任何可达路径 c_t 及 $u(c_t)$ 有上界. 如果资本不能被全部“耗尽”,而且当前消费均来自当前产出,这个断言可立即得到. 我们可证明没有这样的假定,这个断言亦可得到. 在正文的分析中,我们允许资本被耗尽的可能性.

[18]“在无限上”的横截条件是个争论很多的问题. 例如,见 Arrow(1968a),Benveniste 和 Scheinkman(1982),Araujo 和 Scheinkman(1983),及 Becker 和 Boyd(1988). 后三者在普遍的架构内严格分析了这个问题.

[19]方程(36′)或(40)经常被提及为 **Keynes－Ramsey 法则**或 **Ramsey－Cass－Koopmans 法则**. 见 Ramsey(1928,7 页)、Koopmans(1965)和 Cass(1965).

[20]这里要求读者不考虑 $\beta\beta'$ 曲线(虚线)和 $\tilde{k}$. 这些概念将在以后讨论.

[21]考虑一族可行路径,其中对所有 t,$k=$常数. 在(30)中令 $\dot{k}=0$,我们得

$$(*)\qquad c=f(k)-nk$$

这里,c 和 k 一样是常数. 满足(*)的路径(k,c)称为**黄金时代路径**或**平衡增长路径**. 沿着这样一条路径,N_t,K_t,C_t,Y_t 和 I_t 都以相同的比率(n)增长. 对每个 t,最大化人均消费的黄金年代路径被称为**黄金律路径**. $c=f(k)-nk$ 关于 k 最大化立即得到(48),这说明资本边际产品等于人口增长率. 这个关于黄金律增长途径由不同国家的经济学家们于 1961 和 1962 年独立地得到. 对具体的参考,见 Takayama(1985,440～444 页).

[22]自从 60 年代早期对一个部门总量模型的最优增长问题的热烈研究以来,就有了对于两个部门最优增长问题的兴趣. 这里简述此问题的要点是值得的. 对两个部门的兴趣来源于两部门模型揭示了在一个部门公式中被掩盖了的某些重要问题(正如同 Solow－Swan 模型的两部门模型中的情况). 两部门最优增长问题的开拓性研究归于 Srinivasan(1962,1964),他假定了资本密集条件,即消费品部门的资本—劳动比率(K_C)总是大于投资品部门的相应比率(k_I). 接着,Uzawa(1964)试图不用这样的假定来建立 Srinivasan 定理. 他试图分别证明 $k_C>k_I$ 和 $k_I>k_C$ 两个极端情况. 在 Haque 的重要文章(1970)中,他找到了 Uzawa 的分析错误,并写道,“我们注意到了每个情况中他的推理错误(377 页).”他继续说,“在 $k_C>k_I$ 情形中的错误是不重要的,因为 Srinivasan 已正确地处理了这个问题,但在 $k_I>k_C$ 情形中的错误是严重的.”Uzawa 错误

地指定了资本需求和供给价格的运动方向，这随后导致了最优路径的不正确建立.在文章中，Haque首先解决了Srinivasan考虑的问题，而没有假定任一资本密集条件，然后类似地解决了Uzwan考虑的问题.Haque在完全的普遍性上解决了问题.(Haque的文章不仅是对Uzawa文章的评论，它还解决了一些重要问题).更近地，Uzawa(1989，522～560页)阐述了两部门最优增长模型，其中他奇怪地完全忽视了Haque的工作.Srinivasan，Uzawa和Haque都假定了一个线性的目标函数.在非线性目标函数下的两部门模型由Cass考虑(在其未出版的在Stanford的博士论文中，1965)，其中他像Srinivasan一样，将注意力集中在消费品部门总是比资本品部门更加资本密集的情况上($k_C > k_I$).考虑了所有极端情形($k_C > k_I$和$k_I > k_C$)的全面研究由Hadley和Kemp(1971)尝试，但不幸的是它包含了一些严重的错误.Drabicki和Takayama(1975)解决了Hadey和Kemp的错误，并完全解决了在非线性目标函数下的该问题.进一步，Drabicki和Takayama解决了在**任何资本密集条件**下的两部门最优增长问题.与此相反，以前所有关于此问题的作者只考虑了要素密集假设的一个或两个极端条件，因此完全忽略了要素密集一起逆转的问题.而且，Drabicki和Takayama并未将他们局限于通常的要素密集逆转，而是允许对工资—租金比率的区间上有完全相同的资本密集度.

[23]这里又要求读者不必理会虚线和$\tilde{k}$.这些概念将在后面讨论.

[24]这样的一个假设被Arrow(1968b)称为**投资的不可逆转性**，其中他分析了有这样一个限制的最优增长问题.

[25]设C_t和Y_t分别代表总消费和总产出.则我们可把"可行性条件"写为

$$C_t + \dot{K}_t = Y_t$$

要求$\dot{K}_t \geqq 0$等同于指定

$$C_t \leqq Y_t$$

则(53)可立即从此得出.

[26]问题可正式地陈述为选择(32)中定义的c_t以最大化I，约束条件为(30)，$c_t \geqq 0$，$k_t \geqq 0$，(53)及任意给定的初始值k_0.像(53)这样的约束处理在11章中作为"g约束"来讨论.

▶ 参考文献

Arrow, K. J. 1968a. "Applications of Control Theory to Economic Growth." In *Mathematics of the Decision Sciences*, pt. 2, ed. G. B. Dantzig and A. F. Veinott, 85－119, Providence, R. I.: American Mathematical Society.

489 _____. 1968b. "Optimal Capital Policy with Irreversible Investment." In

Value, Capital and Growth: Papers in Honour of Sir John Hicks., ed. J. N. Wolfe, 1 – 19, Edinburgh: Edinburgh University Press.

Arrow, K. J., and M. Kurz. 1970, *Public Investment, the Rate of Return, and Optimal Fiscal Policy*. Baltimore, Md.: Johns Hopkins University Press.

Araujo, A., and J. A. Scheinkman. 1983. "Maximum Principle and Transversality Condition for Concave Infinite Horizon Economic Models." *Journal of Economic Theory* 30 (June): 1 – 16.

Becker, R. A., and J. H. Boyd III. 1988. "Recursive Utility and Optimal Capital Accumulation II: Sensitivity and Duality Theory." *Manuscript*.

Becker, R. A., J. H. Boyd III, and B. Y. Sung. 1989. "*Recursive Utility and Optimal Capital Accumulation I: Existence*," *Journal of Economic Theory* 47 (February): 76 – 100.

Benveniste, L. M., and J. A. Scheinkman. 1982. "Duality Theory for Dynamic Optimization Models of Economics: Continuous Time Case." *Journal of Economic Theory* 27 (June): 1 – 19.

Berkovitz, L. D. 1974. *Optimal Control Theory*. New York: Springer Verlag.

Brock, W. A., and A. G. Malliaris. 1989. *Differential Equations, Stability, and Chaos in Dynamic Economics*. Amsterdam: North-Holland.

Cass, D. 1965. "Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation." *Review of Economic Studies* 32 (July): 233 – 40.

Cesari, L. 1983. *Optimization: Theory and Applications*. New York: Springer Verlag.

Drabicki, J. Z., and A. Takayama. 1975. "On the Optimal Growth of the Two Sector Economy." *Keio Economic Studies* 12(1): 1 – 36.

Gelfand, I. M., and S. V. Fomin. 1963. *Calculus of Variations*. Trans. R. A. Silverman. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.

Hadley, G., and M. C. Kemp. 1971. *Variational Methods in Economics*. Amsterdam: North-Holland, chapter 6.

Haque, V. 1970. "Skeptical Noes on Uzawa's 'Optimal Growth in a Two-Sector Model of Capital Accumulation,' and a Precise Characterization of the Optimal Path." *Review of Economic Studies* 37 (July): 377 – 94.

Hesteness, M. R. 1965. "On Variational Theory and Optimal Control Theory." *Journal of SIAM Control* 3 (September): 23 – 48.

_____. 1966. *Calculus of Variations and Optimal Control Theory*. New York: Wiley.

Hicks, J. R. 1965. *Capital and Growth*. Oxford: Oxford University Press.

Intriligator, M. S. 1964. "Regional Allocation of Investment: Comment." *Quarterly Journal of Economics* 78 (November): 659 – 62.

Kamien, M. I., and N. Schwartz. 1991. *Dynamic Optimization*. 2d ed. Amsterdam: North-Holland (1st ed. 1981).

490 Kendrick, D. 1981. "Control Theory with Applications to Economics." In *Handbook of Mathematical Economics*, ed. K. J. Arrow and M. D. Intriligator, vol. 1. Amsterdam: North-Holland.

Koopmans, T. C. 1965. "On the Concept of Optimal Economic Growth." In *The Econometric Approach to Development Planning*, Pontificiae Academiae Scientiarvm Scriptuvm Varia, 225 – 87; Discussion, 289 – 300. Amsterdam: North-Holland.

McKenzie, L. W. 1986. "Optimal Economic Growth, Turnpike Theorems, and Comparative Dynamics." In *Handbook of Mathematical Economics*, ed. K. J. Arrow and M. D. Intriligator, vol. 3. Amsterdam: North-Holland.

Macki, J., and A. Strauss. 1982. *Introduction to Optimal Control Theory*. New York: Springer Verlag.

Mangasarian, O. L. 1966. "Sufficient Conditions for the Optimal Control of Nonlinear Systems." *Journal of SIAM Control*. 4 (February): 139 – 52.

Pitchford, J. D. 1977. "Two State Variable Problems." In *Aplications of Control Theory to Economic Analaysis*, ed. J. D. Pitchford and S. J. Turnovsky, 127 – 54, Amsterdam: North-Holland.

Pitchford, J. D., and S. J. Turnovsky, eds. 1977. *Applications of Control Theory to Economic Analysis*. Amsterdam: North-Holland.

Pontryagin, L. S., V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mishchenko. 1962. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Trans. from the Russian original by K. N. Trirogoff. New York: Interscience.

Rahman, M. A. 1963. "Regional Allocation of Investment." *Quarterly Journal of Economics* 77 (February): 26 – 39.

_____. 1966. "Regional Allocation of Investment: Continuous Version." *Quarterly Journal of Economics*. 80 (February): 159 – 60.

Ramsey, F. P. 1928. "A Mathematical Theory of Saving." *Economic Journal* 38 (December): 543 – 59.

Sethi, S. P., and G. L. Thompson. 1981. *Optimal Control Theory Applications to Management Science*. Boston, Mass.: Martinus Nijhoff.

Seierstat, S., and K. Sydsaeter. 1987. *Optimal Control Theory with Economic Applications*. Amsterdam: North-Holland.

Simmons, G. F. 1972. *Differential Equations with Applications and Historical Notes*. New York: McGraw-Hill.

Srinivasan, T. N. 1964. "On a Two Sector Model of Growth." *Econometrica* 32 (July): 385 – 73 (Cowles Foundation Discussion Paper, 1962).

Takayama, A. 1967. "Regional Allocation of Investment: A Further Analysis." *Quarterly Journal of Economics* 81 (May): 330 – 37.

_____. 1985. *Mathematical Economics*, 2d ed. New York: Cambridge University Press.

Troutman, J. L. 1983. *Variational Calculus with Elementary Convexity*. New York: Springer Verlag.

491 Tu, P. N. V. 1984. *Introductory Optimization Dynamics: Optimal Control with Economics and Management Science Applications*. Berlin: Springer Verlag.

Uzawa, H. 1964. "Optimal Growth in a Two-Sector Model of Capital Accumulation." *Review of Economic Studies* 31 (January): 1－24.

_____. 1989. *Economic analysis* (in Japanese). Tokyo: Iwanami.

Young, L. C. 1980. *Calculus of Variations and Optimal Control Theory*. New York: Chelsea Publishing.

第 10 章　无限期界最优控制问题与应用

493　在最优控制论对经济学的应用中，一些特殊类型的控制问题常被重复使用.这里，我们讨论其中之一.所讨论的这个问题是指其计划期界是无限的，未来值被加以贴现.左端点是固定的，右端点是开放的.我们得到一个一般定理，用一个熟悉的问题(最优增长问题)来说明它，并给出一些经济应用.

§10.1　一般定理

我们考虑选择 $u(t)$的问题，使得

$$\text{Maximize}\int_0^{\infty} f_0[x(t),u(t),t]e^{-\rho t}dt$$

约束条件为

$$\dot{x}_i(t)=f_i[x(t),u(t),t],i=1,2,\cdots,n$$

$$u_k(t)\geqq 0,k=1,2,\cdots,r,x(0)=x^0$$

这里，ρ 是一个正常数.假定在(x,u,t)空间上函数 f_0 和 $f_i,i=1,2,\cdots,n$ 是

连续可微的.函数 $x_i(t),0\leqq t<\infty$ 是连续的,且 $u_k(t),0\leqq t<\infty$ 是分段连续的.这里 $x(\infty)$ 的值没有事先确定.这种类型的最优化问题经常出现在最优控制论对经济学的各种应用中.

令 $[x(t),u(t)]$ 是最优的,则必然存在乘数,$p_1(t),p_2(t),\cdots,p_n(t)$,使得如下条件满足:

494 (i) $p(t)$ 和 $x(t)$,及 $u(t)$ 满足 Hamilton 方程组

$$\dot{x}_i=\partial\tilde{H}/\partial p_i,i-1,2,\cdots,n \tag{1}$$

$$\dot{p}_i=-\partial\tilde{H}/\partial x_i,i=1,2,\cdots,n \tag{2}$$

其中 $\tilde{H}$ 定义为

$$\tilde{H}[x(t),u(t),t,p(t)]$$

$$\equiv f_0[x(t),u(t),t]e^{-\alpha t}+\sum_{i=1}^{n}p_i(t)f_i[x(t),u(t),t] \tag{3}$$

(ii) $\tilde{H}$ 关于 $u(t)$ 达到最大值,$u_k(t)\geqq 0,k=1,2,\cdots,r$,即

$$\partial\tilde{H}/\partial u_k\leqq 0,u_k(\partial\tilde{H}/\partial u_k)=0,k=1,2,\cdots,r \tag{4}$$

(iii) 下列横截条件成立:

$$\lim_{t\to\infty}p_i(t)x_i(t)=0,i=1,2,\cdots,n \tag{5}$$

反之,如果 f_0 和 $f_i,i=1,2,\cdots,n$ 关于 x 和 u 都是凹的,而且存在乘数,$p_1,\cdots,p_n$ 满足(1)、(2)、(4)和(5)以及 $p_1\geqq 0,\cdots,p_n\geqq 0$,则 $[x(t),u(t)]$ 是最优的.此外,如果 f_0 关于 x 和 u 严格凹,则最优路径惟一.

定义 $q_i(t)$:

$$q_i(t)\equiv p_i(t)e^{\alpha t}\text{或}p_i(t)=q_i(t)e^{-\alpha t} \tag{6}$$

借助 $q_i(t)$,我们可定义函数 H 为

$$H[x(t),u(t),t,q(t)]$$

$$\equiv f_0[x(t),u(t),t]+\sum_{i=1}^{n}q_i(t)f_i[x(t),u(t),t] \tag{7}$$

回忆(3),我们可以立刻得到

$$H[x(t),u(t),t,q(t)]\equiv\tilde{H}[x(t),u(t),t,p(t)]e^{\alpha t} \tag{8}$$

495 函数 H 叫做**现值 Hamilton 函数**(current value Hamiltonian).于是(1)、(4)及(5)可改写为

$$\dot{x}_i=\partial H/\partial q_i,i=1,2,\cdots,n \tag{1'}$$

$$\partial H/\partial u_k\leqq 0,u_k(\partial H/\partial u_k)=0,k=1,2,\cdots,r \tag{4'}$$

$$\lim_{t\to\infty}q_i(t)e^{-\alpha t}x_i(t)=0,i=1,2,\cdots,n \tag{5'}$$

同样,根据(6),我们有

$$\dot{p}_i=(\dot{q}_i-\rho q_i)e^{-\rho t}$$

于是通过使用(8),我们也可以从(2)中得到关系式

$$(\dot{q}_i-q_i)e^{-\rho t}=-\partial\widetilde{H}/\partial x_i=-(\partial H/\partial x_i)e^{-\rho t}$$

因此,

$$\dot{q}_i=\rho q_i-\partial H/\partial x_i,i=1,2,\cdots,n \tag{2'}$$

概括地说,我们可以得到如下结果:

【定理 10.1】 如果$[x(t),u(t)]$是本节开头所述最大化问题的解,则必然存在乘数,$q_1(t),q_2(t),,\cdots,q_n(t)$,使得如下条件满足:

(i) 令 $q(t)$、$x(t)$及 $u(t)$是 **Hamilton 函数 H** 的解,则

$$\dot{x}_i=\partial H/\partial q_i,i=1,2,\cdots,n \tag{1'}$$

$$\dot{q}_i=\rho q_i-\partial H/\partial x_i,i=1,2,\cdots,n \tag{2'}$$

其中现值 Hamilton 函数 H 的定义为

$$H[x(t),u(t),t,q(t)]$$
$$\equiv f_0[x(t),u(t),t]+\sum_{i=1}^{n}q_i(t)f_i[x(t),u(t),t]$$

(ii) H 达到最大值所对应的 u,其中 $u_k(t)\geqq 0,k=1,2,\cdots,r$,即

$$\partial H/\partial u_k\leqq 0,u_k(\partial H/\partial u_k)=0,k=1,2,\cdots,r \tag{4'}$$

(iii) 下面的横截条件成立:

$$\lim_{t\to\infty}q_i(t)e^{-\rho t}x_i(t)=0,i=1,2,\cdots,n \tag{5'}$$

反之,如果 $f_0(x,u,t)$及 $f_i(x,u,t),i=1,2,\cdots,n$,关于 x 和 u 均凹,且存在乘数 $q_1(t),\cdots,q_n(t)$,满足(1')、(2')、(4')、(5'),且 $q_1\geqq 0,\cdots,q_n\geqq 0,$,则$[x(t),u(t)]$是最优的.而且,如果 f_0 关于 x 和 u 均严格凹,则最优路径是惟一的.

注:当然,读者可以用任何记号代替这里所说的乘数 $q_1(t),\cdots,q_n(t)$.

如果对于任一 t 而言,没有限制 $u_k(t)\geqq 0,k=1,2,\cdots,r$,则(4')改写为

$$\partial H/\partial u_k=0,k=1,2,\cdots,r \tag{4''}$$

假设 u_k 的最优值是有界的.另外,如果对任一 k,以及相应于最优值而取的任一 t,有 $u_k(t)>0$,则(4')可被(4'')代替.如果 H 关于 u 是线性的,且 u_k 的允许值无界,则最大化 H 的 $u_k,k=1,2,\cdots,r$,的值是无界的.

如果 $x(t)$是标量且它惟一,则此最优问题的解是单调的(参看 Hartle,1987).

例子:最优增长问题

我们首先用我们熟悉的最优增长问题来说明定理 10.1 的应用. 就是说，我们考虑第 9 章讨论的最优增长问题. 如前所讲的，新古典主义总量增长模型的基本方程可表示为

$$\dot{k}_t = f(k_t) - nk_t - c_t \tag{9}$$

这里，k_t – 资本 – 劳动比率

n = 人口增长率

c_t = 人均消费

$f(k_t)$ = 人均产出的生产函数[1]

令 $u(c_t)$ 表示有代表性的个人效用函数. 符号 u 不应该被误认为控制变量. 那么，我们考虑如下问题：

497

选择 c_t，maximize $\int_0^{\infty} u(c_t)e^{-\rho t}dt$

约束条件为

对于一个给定的初始值 k_0，所有的 t，$\dot{k}_t = f(k_t) - nk_t - c_t$，$c_t \geqslant 0$

这里 ρ 为正的常数.[2] 假设满足如下通常的条件：

$$\text{对所有的 } k_t > 0,\ f' > 0,\ f'' < 0 \tag{10a}$$

$$f(0) = 0,\ f'(0) = \infty,\ f'(\infty) = 0 \tag{10b}$$

且

$$\text{对所有 } c_t > 0,\ u' > 0,\ u'' < 0,\ u'(0) = \infty \tag{10c}$$

这样，$u(t)$ 和 $[f(k_t) - nk_t - c_t]$ 关于 k_t 和 c_t 是(严格)凹的.

这个问题的现值函数 H 可定义为

$$H = u(c_t) + q_t[f(k_t) - nk_t - c_t]$$

这里 q_t 是与状态变量 k_t 相关的乘数. 此问题的控制变量为 c_t. 应用定理 10.1，我们可立刻观察到下面的条件是该问题的惟一最优解的充要条件：

$$\dot{k}_t = \partial H / \partial q_t,\ \text{即 } \dot{k}_t = f(k_t) - nk_t - c_t \tag{11}$$

$$\dot{q}_t = \rho q_t - \partial H / \partial k_t,\ \text{即 } \dot{q}_t = -q_t[f'(k_t) - (n + \rho)] \tag{12}$$

$$\text{对所有 } t,\ \partial H / \partial c_t \leqslant 0 \text{ 及 } c_t(\partial H / \partial c_t) = 0 \tag{13}$$

$$\lim_{t \to \infty} q_t e^{-\rho t} k_t = 0 \tag{14}$$

已假定 $u'(0) = \infty$. 在此条件下，对所有 t，沿着最优路径，我们有 $c_t > 0$. 因此，(13)可改写为

$$\partial H / \partial c_t = 0$$

即

$$q_t = u'(c_t) \tag{15}$$

从而有

$$c_t = c(q_t), c' = 1/u'' < 0$$

498 将此代入(11),我们可以立即得到

$$\dot{k}_t = f(k_t) \quad nk_t \quad c(q_t) \tag{16}$$

(16)和(12)构成一个基本的动态系统,它在给定初始值 k_0 及横截性条件(14)下又决定了最优路径(k_t, q_t).余下的分析同第9章,本章的(15)和(16)与第9章的(40)和(42)相对应.(k_t, q_t)的最优路径与第9章的图9.3中所示的相同.最优路径的单调性来自于 k_t 是一标量和解的惟一性(见 Hartle,1987),这在图9.3中一目了然.

§10.2 最优货币政策[3]

在前一节和第9章中讨论的最优增长问题的重要特点是预先假定一个中央集权经济,在这种经济里,经济计划者支配消费者每一时期 t 的消费 c_t.另一个重要特点是排除货币.本节的目的是研究非中央集权货币经济的最优增长问题.我们将用一个简单模型表明,如何通过简单的货币政策实现最优增长.虽然在文献中有许多非中央集权条件下的货币宏观模型,但我们已经证明针对非货币中央集权经济的 Cass-Koopmans 模型的结论可以移植到本节中.这个模型是在我们熟悉的 Tobin 的新古典货币增长模型的基础上形成的,这在8章第2节中已经阐述过.模型的一个关键特征是将 Fisher 的货币实际收益率和 Wicksell 累积过程的思想与 Solow-Swan 新古典总量增长模型放在一起.这条思路,根据非中央集权经济的描述性模型加以发展,被应用于最优增长理论.

我们仍以

$$\dot{k} = f(k) - nk \quad c \tag{9}$$

表示可行路径.这里省去了表示时间的符号 t 以避免杂乱.为简单起见,假定人均消费(c_t)是人均实际可支配收入(y^D)的一个固定部分.

499

$$c = (1-s)y^D, 0 < s < 1 \tag{17}$$

令 p 和 M 分别代表价格水平和货币供应量,现在我们这里用 p 表示价格水平而不是 Pontryagin 乘数.那么正如8.2节所述的那样,在理性预期下实际可支配收入(y^D)可表示为[4]

$$Y^D = Y + (\theta - \pi)M/p \tag{18}$$

这里 Y=当前实际产出,$\theta \equiv \dot{M}/M$(货币供应增长率),$\pi \equiv \dot{p}/p$(通货膨胀

率).令 N 表示劳动力,则(18)可改写为

$$y^D = f(k) + (\theta - \pi)m \tag{18'}$$

其中

$$y^D \equiv Y^D/N(\text{人均实际可支配收入})$$

$$m \equiv M/(pN)(\text{实际人均现金余额})$$

令 K 表示资本存量,则我们可将货币均衡的关系式表示为

$$M = L[f'(k) + \pi, pY, M + pK], L_1 < 0, L_2 > 0, 0 < L_3 < 1 \tag{19}$$

在此,假定预期通货膨胀率等于实际通货膨胀率.因为货币需求函数 L 关于名义收入(pY)和名义财富($M + pK$)是一次齐次的,从(19)可得

$$m = L[f'(k) + \pi, f(k), m + k] \tag{20}$$

解得[5]

$$\pi = \pi(k, m), \pi_k > 0 \text{ 及 } \pi_m < 0. \tag{21}$$

500 将(18')及(21)代入(17),有

$$c = (1 \quad s)\{f(k) + [\theta - \pi(k, m)]m\} \tag{22}$$

结合(9),我们得到第一个动态方程

$$\dot{k} = sf(k) - nk - (1 - s)[\theta - \pi(k, m)]m \tag{23}$$

接下来,先将等式 $m \equiv M/(pN)$取对数,然后微分,再用 $\dot{N}/N = n$ 就可得到

$$\dot{m} = (\theta - \pi - n)m$$

将(21)代入上式,有

$$\dot{m} = [\theta - \pi(k, m) - n]m \tag{24}$$

如果 θ 的时间路径给定,(23)和(24)就描述了(k, m)的运动.如果 θ 对所有 t 是一常数,我们就可以获得(k, m)的鞍形运动轨迹.

在当前的分析中,货币当局选择 θ 的时间路径,使得

$$\text{Maximize} \quad \int_0^\infty u(c)e^{-\rho t}dt$$

约束条件为(23)、(24)及给定的 k_0 值,其中 c 的表达式由(22)式确定.为解决问题,定义即期值 Hamilton 函数为

$$H \equiv u(c) + p_1\{sf(k) - nk - (1 - s)[\theta - \pi(k, m)]m\} + p_2[\theta - \pi(k, m) - n]m$$

其中,p_1 及 p_2 表示(Pontryagin)乘数,c 的表达式由(22)确定.于是可得(k, m)为惟一最优解的充要条件[6]

$$\dot{k}=\partial H/\partial p_1,\dot{m}=\partial H/\partial p_2 \tag{25}$$

$$\dot{p}_1=\rho p_1-\partial H/\partial k \tag{26a}$$

501

$$\dot{p}_2=\rho p_2-\partial H/\partial m \tag{26b}$$

$$\partial H/\partial\theta=0 \tag{27}$$

$$\lim_{t\to\infty}p_1e^{-\rho t}k=0 \tag{28a}$$

且

$$\lim_{t\to\infty}p_2e^{-\rho t}m=0 \tag{28b}$$

注意,由(25)可得到与(23)及(24)一样的方程.又因 $m>0$,从(27)可得

$$(1-s)u'=(1-s)p_1-p_2 \tag{29}$$

从(26a)及(29),消去一些项后可得

$$\dot{p}_1=(n+\rho)p_1-(p_1+p_2)f' \tag{30}$$

同样,从(26b)及(29)可得

$$\dot{p}_2=(n+\rho)p_2,p_2=p_2(0)e^{(\rho+n)t} \tag{31}$$

这里 $p_2(0)$是 p_2 的初始值.将此与(28b)结合,我们得到 $p_2=0$.这样

$$\text{对所有 } t,p_2=0 \tag{32}$$

这表明改变货币供应的影子价格为0(事实上应该是这样).通过(29)及(32),我们可以立刻得到著名的结论

$$u'(c)=p_1 \tag{33}$$

这与在中央集权的无货币经济中的最优增长问题中所得到的法则相同(回忆等式(15)).正如我们在前一章提到的,(33)表明熟悉的 Ramsey-Cass-Koopmans 法则(或 Keynes-Ramsey 法则):牺牲一个单位的消费所损失的边际效用与积累的物质资产的影子价格 p_1 相等.条件(32)暗示着货币积累或消耗的机会成本为0,这反映了这样一个事实,钞票能以被忽略不计的成本被印制或销毁.

502 同样,用(30)及(32),我们得到

$$\dot{p}_1=-p_1[f'(k)-(n+\rho)] \tag{34}$$

这与(12)相同.

通过(22)和(23),我们可以得到

$$\dot{k}=f(k)-nk-c \tag{35}$$

关于 c 解方程(33),我们得到

$$c=c(p_1),c'=1/u''<0$$

代入(35),有

$$\dot{k} = f(k) - nk - c(p_1) \tag{36}$$

最优路径(k, p_1)可用(34)及(36)表示.当$\rho>0$时,(k, p_1)的动态行为与一些论述中央集权,非货币经济的标准文献(如 Cass 1965 及 Koopmans 1965)中所得到的正好相同,同样也可用第 9 章的图 9.3 加以表明.因为对每一p_1,c 由(35)惟一确定,所以它的动态行为与标准的 Cass-Koopmans 模型所得到的一致.注意,(k, p_1)的时间路径是独立地于 m 或货币方程(24)而被确定的.

在(34)中设 $\dot{p}_1 = 0$,则 k 的稳态值由

$$f'(k^*) = n + \rho \tag{37}$$

惟一确定,即,稳态下的资本—劳动比率体现为所熟悉的修正黄金率路径 $\hat{k}$.同样,在(23)及(24)中设 $\dot{k} = 0$ 及 $\dot{m} = 0$,我们得到 m 和 θ 的稳态值(用 m^* 和 θ^* 表示)

$$m^* = [sf(k^*) - nk^*] / [(1-s)n] \tag{38}$$

$$\theta^* = n + \pi^* \tag{39}$$

这里 $\pi^* \equiv \pi(k^*, m^*)$.稳态下的人均消费 c^* 可从(22)及(39)得出

$$c^* = (1-s)[f(k^*) + nm^*]$$

503 利用(38),可重写为

$$c^* = f(k^*) - nk^* \tag{40}$$

c^* 的值与一些有关最优增长的文献所得出的完全相同.

现在我们对上面的分析结果进行总结.

【命题 10.1】

(i) 目前货币经济的最优增长路径遵循 Ramsey-Cass-Koopmans 法则(33).

(ii) 资本—劳动比率(k),物质资本积累的影子价格(p_1)以及人均资本消费(c)的最优值的动态行为在 $\rho>0$ 时与一些标准文献所得出的结论相同,如 Cass-Koopmans 模型(在这些模型中没有考虑货币)中所述.(k, p_1, c)的最优轨道在目前的货币经济下独立于人均实际现金余额(m)的时间路径,即最优货币政策是"中性的".

(iii) 当 $\rho>0$ 时 k 和 c 的稳态值与从标准的 Cass-Koopmans 模型中得到的相同.定态的通货膨胀率(价格变动)等于货币供应增长率的稳态值 θ^* 减去人口增长率(n).

为得到 θ 的最优值,可将关于 c 的表达式(22)代入(33),再针对 θ 解所得方程,这样可得

$$\theta = \theta(k, m, p_1)$$

再将上式代入(24),得

$$\dot{m} = \dot{m}(k, m, p_1) = [\theta(k, m, p_1) - \pi(k, m) - n]m$$

这确定了 m 的变化.

在此分析中,我们忽略了生息证券及货币供给的内在性.然而可以证明这些复杂因素不会改变命题 10.1 中得到的结论(参见 Drabicki 及 Takayama, 1983).

§ 10.3 储蓄:持久收入假设

504 在这一节中,我们分析个人储蓄行为.[7]我们特别关注古典 Modigliani-Brumberg 生命周期假设(1954 年)[8]与 Friedman 的持久收入假设(1957 年).[9]这两种理论有一个基本的相似点:都是从建立在一致的效用函数基础上的个人明显的跨时选择中得到储蓄/消费行为.在这方面,两种理论都得到了广泛的接受.由于两种理论在一些主要方面有所不同(参见 Modigliani 1990),所以我们这里讨论 Friedman 的持久收入假设.

正像 Farrell(1959,679 页)曾经恰当地指出那样,Friedman 理论的基本特征在于"认识到如果个人理性地计划使其一生中的效用达到最大,则在任何给定的一年里他的消费不决定于他在那一年的收入而决定于他可支配的资源."这种观点在 Irving Fisher 的传统观念中是很清楚的,因为它抓住了消费者跨时选择的本质.Farrell(1959)称这种主张是"合理但又模糊",于是他根据下面两个假设简要总结了这个命题:

505 (i) **"正常收入假设"**:在任何给定的时期里,个人本期收入……只是通过它对他的正常收入的影响……来影响他的消费……[这里消费和正常收入之间的函数关系与本期收入和资产无关]".(1959,680 页)

(ii) **"比例假设"**:对任何个人,他的消费和他的名义收入的关系是一个比例关系."(1959,681 页)

关于符号,设 c_0 为当前(即,时间 0)实际消费,y_0^* 为持久或正常(实际)收入.则"正常收入假设"可表示为

$$c_0 = f(y_0^*)$$

在此,假定"临时性消费"可以被忽略.这样,比例假设便赋予函数 f 一个特别的函数形式:

$$c_0 = ky_0^*$$

这里,如 Friedman(1957)所提出的,比例因子 k 依赖于利率,偏好等等.我们可改写上式为

$$c_0 = (1 \quad s)y_0^* \tag{41}$$

其中 s 表示储蓄倾向,我们假定 s 依赖于实际利率.因为(41)式兼含正常收入假设和比例假设,它便被看成持久收入理论的关键方程.

那么本节的目的在于指出在何种情况下简单的公式(41)可以通过最优控制理论方法和对个人跨时理性行为的明确认识而加以得到.通过假定,这个任务也可指出(41)式成立的范围.

我们考虑一个消费者,他在 t 时刻的名义收入(Y_t)包括名义工资收入(W_t)和他的资产利息收入(i_tA_t),

$$Y_t \equiv W_t + i_tA_t \tag{42}$$

506 其中 A_t 是生息资产在 t 时刻的名义价值,i_t 为名义利率.[10]

消费者的收入 Y_t 有两种去向:消费支出(C_t)和资本积累(A_t),

$$Y_t \equiv C_t + \dot{A}_t \tag{43}$$

这里 $\dot{A}_t \equiv \partial A_t/\partial t$,点代表对时间求导.结合(42)和(43)两式有

$$\dot{A}_t \equiv W_t + i_tA_t - C_t \tag{44}$$

令 p_t 表示在时间 t 的价格水平,定义"实际变量" a_t, w_t 和 c_t 为

$$a_t \equiv A_t/p_t, w_t \equiv W_t/p_t, \text{及 } c_t = C_t/p_t$$

然后注意 $\dot{a}_t \equiv \dot{A}_t/p_t - a_t\dot{p}_t/p_t$,则(44)式可重写为

$$\dot{a}_t \equiv w_t + (i_t - \pi_t)a_t - c_t \tag{45}$$

这里 $\pi_t \equiv \dot{p}_t/p_t$ 表示预期价格变化率.根据 Irving Fisher,令 $r_t \equiv i_t - \pi_t$,表示 t 时刻的**实际利率**,我们可重写(45)式为

$$\dot{a} \equiv w_t + r_ta_t - c_t. \tag{46}$$

生命周期假设(持久收入假设在一定程度上)典型地认为消费者的寿命是有限的.虽然这由明显的背景得以证实,但却包含了一个难题:最优消费的模式依赖于遗产的数额,而且遗产的效用必须与继承者的效用有关,而这也就进一步同继承者的效用有关,等等.这就产生了一个包含无限代的问题.这个问题已借助由 Samuelson(1958)提出的交叠世代模型而得到广泛的研究.近来在这个问题上的文章已大大增加了.然而还不清楚我们能通过这个关于持久收入假设的公式中得到多大的认识.

507 而且,谈到交叠世代模型,分析变得冗长和复杂.为了避免这种复杂,并将消费者选择的无限期界的一而考虑进去,经常假设消费者的生命是无限的,这似乎很接近 Friedman 的持久收入假设.该理论考虑一个"代表性的消费者",他的生命可以被看做是无限的(归因于连续的世代),这里我们遵循这个假设.这样令 c_t 为 t 时刻我们的"代表性的消费者"的实际消费,假定他或她的"终生"效用由

$$U \equiv \int_0^{\infty} u(c_t)e^{-\rho t}dt$$

决定,其中 $u'>0$, $u''<0$ 及 $u'(0)=\infty$, ρ 表示主观的时间贴现率,假设为一正

的常数.[11]

代表性消费者在资本积累方程(46),关于 c_t 通常的非负要求,与给定的初始条件的约束下选择 c_t 的时间路径使 U 达到最大值.假定消费者是"竞争性"的,在这种意义上讲他或她不能影响价格水平 p_t,利率 i_t 以及工资收入 W_t 的预期值.

为了解决最优化问题,我们定义即期值 Hamilton 函数 H 为

$$H(a_t, c_t, q_t) \equiv u(c_t) + q_t(w_t + r_t a_t - c_t)$$

其中 q_t 是乘数.最优问题的解可以通过直接的方式得到,在有惟一内部解的一系列必要条件中,[12]我们有

$$\dot{a} = \partial H / \partial q_t, \text{即 } \dot{a} = w_t + r_t a_t - c_t \tag{47a}$$

$$\dot{q}_t = \rho_t q_t - \partial H / \partial a_t, \text{即 } \dot{q}_t = (\rho - r_t) q_t \tag{47b}$$

$$\partial H / \partial c_t = 0, \text{即 } u'(c_t) = q_t \tag{47c}$$

$$\lim_{t \to \infty} q_t e^{-\rho} a_t = 0 \tag{47d}$$

508 这里为得到(47c),我们假定 c_t 对于最优点的 t 均大于 0.由于函数 u 的严格凹性以及约束(46)的线性,这些条件也是存在惟一最优解的充分条件.

首先注意,从(47c)可得方程

$$\dot{q}_t = u''(c_t)\dot{c}_t \tag{48}$$

定义消费的边际效用弹性为

$$\eta(c_t) \equiv -u''(c_t)c_t / u'(c_t) > 0 \tag{49}$$

可改写(48)为

$$\dot{q}_t / q_t = -\eta(c_t)\dot{c}_t / c_t \tag{50}$$

将上式与(47b)合并,得

$$r_t = \rho + \eta(c_t)\dot{c}_t / c_t \tag{51}$$

这里(51)式的右端意味着"时间偏好率".(51)是这个问题的关键性最优条件.

为讨论简便,我们暂时假设消费者预期将来的实际利率 r_t 为一常数,即 $r_t = r$.这样,(46)或(47a)可改写为

$$\dot{a}_t - r a_t = w_t - c_t \tag{46'}$$

(46')两端乘以 e^{-rt},有

$$(\dot{a}_t - r a_t) e^{-rt} = (w_t - c_t) e^{-rt}$$

因为 $d(a_t e^{-rt})/dt = (\dot{a} - r a_t) e^{-rt}$,所以我们有

$$\frac{d}{dt}(a_t e^{-rt}) = (w_t - c_t) e^{-rt}$$

从 $(0, \infty)$ 将两边积分,我们可以观察到

$$a_t e^{-rt}\Big|_0^{\infty} = \int_0^{\infty} (w_t - c_t)e^{-rt}dt$$

509 从这里立即得到

$$\int_0^{\infty} c_t e^{-rt}dt = a_0 + \int_0^{\infty} w_t e^{-rt}dt \equiv a_0^* \tag{52}$$

这里 a_0^* 是消费者现时资产和未来工资收入的现值之和，这里 a_0^* 表示他或她的总财富的实际值. 我们假设 a_0^* 有限，方程(52)表示**跨时预算约束条件**. 借助 a_0^*，我们现在能够定义他或她今天的**持久收入** y_0^* 为：[13]

$$y_0^* = ra_0^* \tag{53}$$

即产生收入流 y_0^* 的终身价值在利率是 r 的条件下等于 a_0^* ($\equiv y_0^*/r$).

在前面的讨论中，我们假定对所有 $r_t = r$，一般而言这种假设不能得到保证. 跳过冗长的推导[14]，我们可以得到下面的关系式，这个式子将(52)扩展到 r_t 不是常数的情形：

$$\int_0^{\infty} c_t \exp\left(-\int_0^t r_s ds\right)dt = a_0 + \int_0^{\infty} w_t \exp\left(-\int_0^t r_s ds\right)dt = a_0^* \tag{52'}$$

注意，当 r_t 是常数时(52′)转化为(52). 持久收入 y_0^* 也能用(53)定义，但这里 a_0^* 由(52′)给出.

现在我们在 r_t 为常数的假设下继续我们的讨论. 我们再次大胆假定消费边际效用弹性是常数，即

$$\text{对所有 } t, \eta(c_t) \equiv \eta$$

510 这一假定可以得到保证，如果效用函数 u 确定为

$$u(c_t) = \alpha c_t^{1-\eta} + \text{常数}, 0 < \eta < 1 \tag{54a}$$

或

$$u(c_t) = \alpha \log c_t + \text{常数}, \text{当 } \eta = 1 \tag{54b}$$

的话，这里的 η 为常数. 这样形式的效用函数经常出现在最优经济增长模型中. 例如，Goodwin(1961)和 Stigltz(1974)假定 $\eta = 1$，而 Tinbergen(1960，482页)从 Ranar Frisch1931 年的研究中引用的数据认为美国工人的边际效用弹性 $\eta = 0.6$.[15] Yaari(1964)，Blinder(1974，31 页)及其他人在个人生命周期模型中也使用这一假设. 按照 Blinder，我们可以称(54)的效用函数为**等弹性效用函数**.[16]

在等弹性效用函数形式的假设下，我们可把最优消费法则(51)简写为

$$r = \rho + \eta \dot{c}_t / c_t \tag{51'}$$

从此可得

$$\dot{c}_t / c_t = \mu, \text{其中 } \mu \equiv (r - \rho)/\eta$$

改写为[17]

$$c_t = c_0 e^{\mu t} \tag{55}$$

511 这样，消费的增长或减少取决于实际利率 r 是否超过或小于主观贴现率 ρ。[18]

这个结果由 Yaari(1964,309 页)得到，它的经济解释是很直观的. 例如，如果 $\rho > r$，"家庭为了实现超前消费而以利率 r 借债来提高自己的状况. 于是 c_t 最优值在以后的时间里将会下降"，Blinder (1974,304 页)对于 $\rho < r$ 情形的解释类似.

既然由定义 $\mu \equiv (r-\rho)/\eta$，且 ρ 和 η 已假设为常数，则 μ 只是 r 的函数，即 $\mu = \mu(r)$. 得到 $\mu(r)$ 的更明显的方法是利用(51′)式. 我们借助图 10.1 来说明如何利用(51′)式来确定 $\mu(r)$. 这里图 10.1(a)及(b)分别说明 $\rho > r$ 及 $\rho < r$ 的情形.[19]

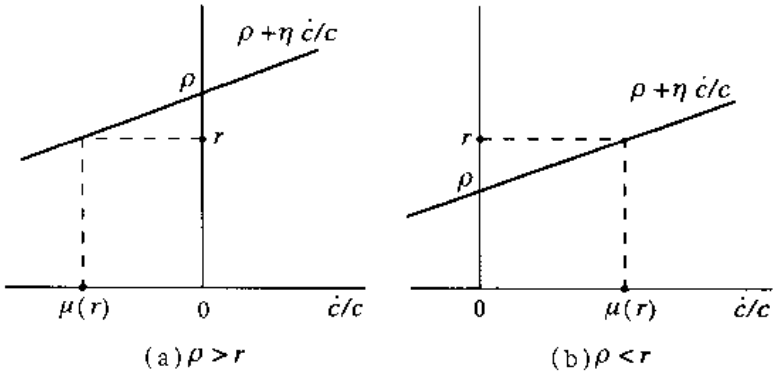


图 10.1 $\mu(r)$的确定

利用(55)式可计算

$$\int_0^\infty c_t e^{-rt} dt = \int_0^\infty c_0 e^{-(r-\mu)t} dt = \frac{c_0}{r-\mu} \tag{56}$$

这里必须假设

$$r - \mu > 0 \tag{57}$$

以保证(56)中积分收敛和积分取正值. 注意如果 $r = \rho$(此时 $\mu = 0$ 和 $r > 0$)，这个条件总是满足的. 人们可以假定有一种竞争机制使 r 在长期内等于 ρ，在
512 这种情形下消费是静止不变的. 然而，这里我们不加上任何这样的假设，继续我们的讨论.

结合(56)、(52)及(53)，我们现在得到

$$c_0 = [1 - s(r)]y_0^*，\text{其中 } s(r) \equiv \mu(r)/r \tag{58}$$

该方程给出了根据由(52)和(53)定义的持久收入(y_0^*)来决定当前最优消费(c_0)的关系式. 更重要的是，(58)与(41)是确切对应的，即我们现在得到了持久收入假设的关键方程式. 注意到消费和储蓄倾向分别由$[1 - s(r)]$和 $s(r)$

决定，且它们依赖于实际利率 r. 同时注意到(58)式暗含着消费的(持久)收入弹性等于 1.[20] 由(53)式，这也表明消费的财富弹性也等于 1.

回想 $\mu \equiv (r-\rho)/\eta$ 的定义，我们可以得到 $s(r)$ 的表达式为

$$s(r) \equiv (1-\rho/r)/\eta \tag{59}$$

从(59)，很明显 $ds(r)/dr>0$，即储蓄倾向随实际利率的增长而提高.

在这一点上，考虑一个极端情形是有用的. 在这极端情形下，工资收入(w_t)被期望为常值；即对所有 t，$w_t = w_0$. 此时，使用(52)中对 a_0^* 的定义及(53)中对 y_0^* 的定义，我们得到

$$y_0^* = ra_0 + w_0 \equiv y_0 \tag{60}$$

即，如果消费者预期未来工资收入和未来实际利率是不变的，则持久收入等于当前收入. 如果持久收入的假设是无懈可击的，则这种关系必是成立. 方程(60)表明我们关于持久收入的定义通过了这样的检查. 而且，(60)也指出如果我们指明当前消费依赖于当前收入而不是持久收入，按理必先有消费者预期 w_t 和 r_t 对所有未来的 t 是常数的静态预期.

513 在这里的分析中，我们要求有条件(57)，即 $r-\mu>0$. 回忆 μ 的定义，易知(57)满足，当且仅当

$$\rho > (1-\eta)r \tag{61}$$

这样，(61)成立和消费随时间增长(即，$\mu>0$，或，$r-\rho>0$)的充分条件给定为

$$r > \rho > (1-\eta)r \tag{62}$$

回忆(59)式中 $s(r)$ 的定义，且假定 $r>0$，则当且仅当 $r>\rho$ 时，$s>0$；当且仅当 $\rho>(1-\eta)r$ 时，$s<1$. 也就是说，条件(62)是 $0<s<1$ 的充要条件. 注意，要求 $s<1$，以保证 $c_0>0$[见方程(58)].

上述结果可以概括在命题 10.2 中.

【命题 10.2】 如果实际利率(r)为常数，则(41)或(58)形式的持久收入假设可作为消费者跨时选择的最优解得到. r 上升使储蓄倾向上升. 如果实际利率 r 不是常数，则持久收入假设不一定成立.

我们强调持久性收入假设的关键方程(58)是在实际利率为常数($r_t = r$)的假设下得到的. 一般地，如果这个假设被违背，则(58)不能得到. 这样，Friedman 的持久收入假设最适合于实际利率不变的情形. 如果通货膨胀率(π_t)及名义利率(i_t)的变动方式使得实际利率波动，那么该讨论需要重大的修正. 值得注意的是，Friedman 认为实际利率(至少在长期内)是相当稳定的(虽然它在短期内表现出波动，如 Friedman 1974，35～38 页和 53～54 页).[21] Brunner 和 Meltzer(1974，68 页)在他们对这篇文章的评论中，指出 Friedman

514 “假定实际利率是常数且市场利率随预期变化迅速作出调整.”然后他们说，“我们不知道是否有经验证据支持这些推论.”在这种情形中，先前的 Friedman 持久收入假设公式也许更与“长期状态”有关，在这种状态下，预期得到完全实

现，而且这种状态似乎经常出现在 Friedman 许多著作的核心部分.

最后是一些结论性的评论.我们已经表明 Friedman 相对简单的但又富有洞察力的持久收入假设公式是如何通过最优控制方法得到的，在这里消费者选择的内在跨时性质起了关键的作用.特别地，我们已经证明了一个持久收入假设的关键性的论断：即如果基础效用函数是等弹性的话，当前消费与"持久收入"成比例，其中比例因子依赖于实际利率.最优控制理论提供了一个让我们推导出关键结论的结构，而消费与"财富"或"持久收入"成比例的结论很自然地可从这样的论证中得到.我们在推导结论的分析过程中所做的各种假设规定了"持久收入"假设是正确的范围.[22]

§10.4 投资[23]

投资是经济学中颇有争议的论题.Keynes 的《通论》(1936)对于引起现代投资理论中的许多争论起了重要作用.在这些研究中，Jorgenson 关于"新古典理论"的研究[24]，即调整成本的方法以及 Tobin 的"q"理论，在现代投资理论的形成中具有重要地位.这一节我们批判性地回顾这些理论并得出结论：尽管
515 它们有明显的优点，但很不幸，它们中无一是令人满意的.

10.4.1 "新古典"理论

令 K_t 和 I_t 分别表示一公司在时刻 t 的资本存量和投资流量.令 δ 为折旧率，我们有

$$\dot{K}_t = I_t - \delta K_t \tag{63}$$

其中 $0<\delta<1$.假设公司的产出(Y_t)由资本(K_t)和劳动力(N_t)决定，且公司的生产函数假定是凹的，并指定为

$$Y_t = F(N_t, K_t)$$

令 p，w，及 p_I 分别为公司产出的价格，工资率及投资品的价格，于是公司在时刻 t 的净现金流量为

$$R_t \equiv pY_t - wN_t - p_I I_t$$

为简单起见，假定 p，w 及 p_I 对公司而言是外部给定的且对所有的 t 均不变.假定贴现率(i)为常数，我们可以定义未来现金流量和的现值为[25]

$$W \equiv \int_0^{\infty} R_t e^{-it} dt$$

516 于是我们可以得到

$$W\equiv\int_0^{\infty}[pF(N_t,K_t)-wN_t-p_II_t]e^{-it}dt \tag{64}$$

公司将选择劳动流$\{N_t\}$和投资流$\{I_t\}$，从而使得(64)中定义的 W 达到最大值并满足(63)式，$N_t\geqq0$，$K_t\geqq0$，给定初始资本存量(K_0)．注意总投资 I_t 可以为负值．这个问题的现值 Hamilton 函数可定义为

$$H\equiv[pF(N_t,K_t)-wN_t-p_II_t]+\lambda_t(I_t-\delta K_t) \tag{65}$$

其中 λ_t 是乘数．这里 I_t 和 N_t 是控制变量，K_t 是状态变量．

由定理 10.1，我们可以得出条件

$$\dot{K}_t=\partial H/\partial\lambda_t，即\ \dot{K}_t=I_t-\delta K_t \tag{66a}$$

$$\dot{\lambda}_t=i\lambda_t-\partial H/\partial K_t，即\ \dot{\lambda}_t=(i+\delta)\lambda_t-pF_K，其中\ F_K\equiv\partial F/\partial K_t \tag{66b}$$

$$\lim_{t\to\infty}\lambda_te^{-it}K_t=0 \tag{66c}$$

对于最优解是必要的；而且，由于 F 是凹的，因此它们也是充分的．H 关于 N_t 和 I_t 最大化．H 关于 N_t 的最大化得到$\partial H/\partial N_t=0$(假定在最优点 $N_t>0$)．这样我们有

$$F_N=w/p，其中\ F_N\equiv\partial F/\partial N_t \tag{67}$$

如果给 F 加上适当的限制，给定 H 关于 N_t 的非线性，可以得到在最优点时 N_t 的有界正值．

由于(65)中定义的现值 Hamilton 函数可改写为

$$H=pF(N_t,K_t)-wN_t-\delta\lambda_tK_t+(\lambda_t-p_I)I_t \tag{68}$$

H 关于 I_t 最大化将有

$$如果\ \lambda_t>p_I，I_t\to\infty；如果\ \lambda_t<p_I，I_t\to-\infty \tag{69}$$

517 当 $\lambda_t=p_I$ 时，I_t 无法确定．(69)表明 I_t 的最优值是无界的．

使用本质上与上面相同的公式，Jorgenson 和他的同事们得出

$$\partial H/\partial I_t=0，即\ \lambda_t=p_I$$

而不是(69)．不幸的是，如(68)式所示，由于 H 关于 I_t 是线性的，因而上面的结论得不到保证．这就在 Jorgenson 的研究中构成了一个严重的分析困难，虽然这并没否认他的重要贡献——他得到了一个明确的投资动态方程，且根据实际数据检验了他的理论发现．

条件(69)意味着公司将瞬时地调整所需要的资本存量．特别地，这暗含着没有诸如投资的"需求规划"的东西．事实上，这重新肯定了 Lerner(1944)和 Haavelmo(1961)在围绕凯恩斯借助"资本边际效率"讨论投资时所引起的争论中所持的观点．他们的著作都先于 Jorgenson 及其助手关于投资的一系列著作出现．Lerner 和 Haavelmo 的主张可以简洁地归纳在如下出自 Haavelmo(1961，

216 页)的引述中:[26]

我们应该拒绝的是这样一种幼稚推理,即存在一个可以从生产者利润最大化行为这一经典方案得出的投资"需求计划".

在现在的框架下,展开分析的一种方法是给出一个 I_t 变动的边界,即[27]

$$I_{\min} \leqq I_t \leqq I_{\max}$$

这种分析由 Takayama(1985a,688～697 页)完成.从(69)易看出,这种情形下的投资规则可改写为

如果 $\lambda_t > p_I$,$I_t = I_{\max}$

如果 $\lambda_t < p_I$,$I_t = I_{\min}$

如果 $\lambda_t = p_I$,I_t 的值不可确定

518 因为 λ_t 可解释为资本的影子需求价格及 p_I 是资本的市场价格,所以这条规则的经济解释是很直观的.其他最优条件(66)及(67)成立.

假定规模报酬不固定,对(67)式解 N_t 为

$$N_t = N(K_t, w/p)$$

在其他地方(Takayama,1985a,691～694 页),可以证明公司的最优策略是尽快达到所要求的资本存量(K^*),其中 N^* 和 K^* 由式

$$F_N(N^*, K^*) = w/p \tag{67'}$$

$$F_K(N^*, K^*) = (i+\delta)p_I/p \tag{70}$$

确定.这里,$(i+\delta)p_I$ 表示资本的租金.这样,(67′)及(70)就是有名的边际生产力规则.为说明 $(i+\delta)p_I$ 是资本的租金,假设一单位资本品的租金为 c.一单位资本品在时刻 t 损耗为 $e^{-\delta t}$,所以租金支付额将为 $ce^{-\delta t}$.因此,如果资本品被无限期租用,则所有未来时期的租金现值总和将为[28]

$$\int_0^\infty ce^{-\delta t}e^{-it}dt = \int_0^\infty ce^{-(i+\delta)t}dt = \frac{c}{i+\delta} \tag{71}$$

跨时套利关系将使之与单位资本价格相等,所以

$$p_I = \frac{c}{i+\delta},\text{或 } c = (i+\delta)p_I \tag{72}$$

假设在将来发生通货膨胀,且通货膨胀率($\pi = \dot{p}/p$)是常数.在这种情况

519 下,(名义上的)租金支付额等于 $ce^{\pi t}$ 而不是 c.则(71)可改写为

$$\int_0^\infty ce^{\pi t}e^{-\delta t}e^{-it}dt = \frac{c}{(i-\pi)+\delta} \tag{71'}$$

其中 $(i-\pi)$ 表示实际利率.跨时套利条件(72)可相应改写为

$$c = [(i-\pi)+\delta]p_I \tag{72'}$$

为易于表达,以下我们假设 $\pi = 0$.

以上讨论的 c 在 Jorgenson 的投资理论中起着重要的作用. Jorgenson 把它称作**资本的使用者成本**.[29]它表示一公司为从资本品中得到一个单位的服务所必须承担的成本. 在资本品可以出租的情况下, c 为资本的租金, 如(72)式所示, 它等于 $(i+\delta)p_I$. 正如(70)所指出的, 当公司希望购买资本品且安装它而不是租用时, 在长期的状态下, 使用者成本这一定义仍是适用的. 注意, 在这些情形中, 忽略了安装成本及其他成本.[30]还应注意, 在得出(70)和(72)过程中, 价格变量如 p、p_I 和 i 假定为常数. 在实际经济生活中, 这些价格是不时变化的. 这也许引起了在实证文献中对强调在 $(i+\delta)p_I$ 意义上讲的使用者成本的关注.[31]

520 假设公司处在长期稳态 (N^*, K^*) 上, 则根据(71)及(72), 我们立即认识到(70)可改写为

$$p_I = \int_0^\infty pF_K{}^* e^{-(i+\delta)t}dt \tag{73}$$

其中 $F_K{}^* \equiv \partial H/\partial K_t$ 在 (N^*, K^*) 处的赋值. 这使我们想起 Keynes 的资本边际效用法则. 方程(73)表明对资本存量的需求可由单位资本价格与追加一个单位资本所带来的所有未来收益的现值总和的相等而确定. 因为(70)与(73)是等价的, 所以如果公司在路径 (N^*, K^*) 上, Keynes 的资本边际效用法则类似于新古典的边际生产力法则. 因此, 我们不赞成 Jorgenson(1967, 152 页)和他的同事的观点:"因为 Keynes 对投资需求函数的建立与新古典最优资本积累理论不一致, 所以必须抛弃它."

521 另一方面, 众所周知, Keynes 没有明确加上一些前面的假设, 这样, Keynes 得到的是一个不如(73)明确的法则, 即

$$p_K = \int_0^\infty Q_t e^{-(i+\delta)t}dt$$

其中 Q_t 是资本在 t 时刻的"预期收益率", 等于每一附加单位资本的预期收益减去预期运行成本(不包括折旧费), p_K 和 p_I 不同, p_K 为"资本资产的供给价格"(Keynes, 1936, 135 页). 假定概率密度函数与关于 Q_t 的预期形成无关. 所有未来的结果用 Frank Knight 的话来说都是"不确定的".[32]搁置这个问题, 我们强调一个事实: 资本品不是前面讨论的那种类型, 在那里忽略了资本的"固定性". 这样的"固定性"将产生 p_K 与 p_I 之间的差异. 我们应该在后面的 10.4.3 得到 p_K 的一个更准确的定义.

注意到下面的事实是值得的, 即 N^* 和 K^* 的值与静态最优问题所决定的值是相等的, 而静态最优问题是选择 N 和 K, 以使利润

$$pF(N, K) - wN - cK$$

最大化.

换言之, 动态最优问题的"长期"解 (N^*, K^*) 可化为静态最优问题的解. 从长期观点者, 毕竟短视法则是最优的.

10.4.2 调整成本方法

522 在前面的分析中，假定公司在无安装费用或拆卸费用以及与此有关的费用的情况下能增加或减少它的资本存量.资本品是出租品(就像出租汽车)，它们在一个给定的时间段内以一定的价格出租然后归还给租赁公司.虽然这对许多公司是正确的，但也有许多公司不属于这种情形.钢铁公司不会租用转炉，汽车公司不会租用装配线.这些公司必须用一定的安装费用及其他费用来建立他们的资本存量.如果他们决定缩小规模或废弃它们，他们必须面对一定的拆卸费用及其他费用.这经常被认为是资本品的基本方面，叫做“资本的固定性”.

Tobin(1967，158页)强调这种包含在投资中的摩擦性或调整性成本，他写道：

Jorgenson的投资需求规划不适合需要这种规划的分析目的，人们必须寻找别的投资决定理论.在单个公司的水平上这可以由摩擦性或调整性成本导出.

虽然存在许多将“资本固定性”概念引入公司的最大化问题中的办法，这里我们将其作为随投资率增加的每单位总量增加的成本.特别地，将公司目标函数(64)中的 $p_I I$ 替换成[33]

$$C_t = C(I_t) \tag{74}$$

这里，$C(0)=0$，对所有的 I_t，$C'(I_t)>0$；对所有的 $I_t>0$，$C'(I_t)>0$.

公司的最大化问题由这样的修正所改变.这样公司将选择 N_t 和 I_t，以使

$$\text{Maximize} \quad \int_0^{\infty} [pF(N_t, K_t) - wN_t - C(I_t)]e^{-it}dt$$

523 约束条件为

对所有 t，$\dot{K}_t = I_t - \delta K_t$，$N_t \geqq 0$，$K_t \geqq 0$，以及给定的 K_0 值

该问题的现值 Hamilton 函数可定义为

$$H \equiv [pF(N_t, K_t) - wN_t - C(I_t)] + \lambda_t(I_t - \delta K_t) \tag{75}$$

其中 λ_t 为当前问题的 Pontryagin 乘子.我们假定一个内部解以及对 F 作适当的假设，由定理10.1我们可以得出如下条件是问题有惟一最优解的充要条件的结论.充分性由函数 C 的凸性和函数 F 的凹性保证.

通过函数 C 引入调整成本使得 H 关于 I_t 是非线性的.这样使我们得到了一个内部解，它避开了无界的 I_t.则我们有

$$\dot{K}_t = \partial H / \partial \lambda_t, \text{即 } \dot{K}_t = I_t - \delta K_t \tag{76a}$$

$$\dot{\lambda}_t = i\lambda_t - \partial H / \partial K_t, \text{即 } \dot{\lambda}_t = (i+\delta)\lambda_t - pF_K \tag{76b}$$

$$F_N = w/p \tag{76c}$$

$$C'(I_t)=\lambda_t \tag{76d}$$

$$\lim_{t\to\infty}\lambda_t e^{-ut}K_t=0 \tag{76e}$$

为得出(76c)和(76d),我们假设对所有在最优处的 t,$N_t>0$ 且 $K_t>0$.

Takayama对这个问题的进一步分析作了详细的讨论(1985a,697－706页).这里我们简要说明从(76)式开始进行分析的方式.我们假设 F 是一阶齐次的(规模收益不变),即 $F(N_t,K_t)=N_t f(k_t)$.我们可以对 f 加上通常的假设

$$\text{对于所有的 } k_t,f'>0 \text{ 且 } f''<0;f(0)=0,f'(0)=\infty,f'(\infty)=0$$

由(76c)惟一决定 $k^*\equiv K_t^*/N_t^*$ 的值,这里只要 w/p 是常数,k^* 就是常
524 数.同前,将 c 定义为 $c\equiv pF_K^*=pf'(k^*)$.方程(76b)可简化为一个线性方程

$$\dot{\lambda}_t=(i+\delta)\lambda_t-c \tag{77}$$

现在我们断言满足横截性条件(76e)的解由式

$$\lambda_t=\frac{c}{i+\delta}(\equiv\lambda^*) \tag{78}$$

给出.这样,λ_t 对所有 t 是正常数.显然,(78)满足(77),故它是(77)的解.

为表明它也满足边界条件(76e),先将(76d)和(78)合并,得

$$C'(I^*)=c/(i+\delta) \tag{79}$$

于是最优投资是正的常数,即,对所有 t,$I_t=I^*$.[35]接下来,将 $I_t=I^*$ 代入(76a),得

$$\dot{K}_t=I^*-\delta K_t \tag{80}$$

该线性微分方程的解可确切地得到为

$$K_t=I^*(1-e^{-\delta t})/\delta+K_0e^{-\delta t} \tag{81}$$

将(81)代入

$$\lim_{t\to\infty}\lambda_t e^{-ut}K_t=\lim_{t\to\infty}\lambda^* e^{-ut}K_t$$

可观察出条件(76e)是满足的.这样(78)是满足横截性条件(76e)的(77)的(特)解.

因为我们有

$$I^*(1-e^{-\delta t})/\delta=\int_0^\infty I^*e^{-\delta t}ds$$

方程(81)右边第一项表示积累到时间 t 的投资,第二项表示在时间 t 留下的最初资本存量.

525 因 $C''>0$ 且 $f''<0$,从(79)和(76c)中易得

$$\partial I^*/\partial_i<0,\partial I^*/\partial\delta<0,\partial I^*/\partial p>0,\text{及}\partial I^*/\partial w<0$$

这里我们回想 $c \equiv pF_K$，且注意到 c 随 p 的增加或 w 的减少而增加. 这样，当利率、折旧率或工资率上升时，投资需求减少；当产出价格上升时，它将增加.

定义 $\bar{K} \equiv I^*/\delta$，则(80)可改写为

$$\dot{K}_t = \delta(\bar{K} - K_t) \tag{80'}$$

$\bar{K}$ 可解释为"长期中所要求的资本存量"，(80′)可理解为"反应函数"，反应率等于折旧率(δ). 从(81)中很明显地有：不管初始资本存量(K_0)为多少，当 $t \to \infty$ 时，K_t 单调收敛于 $\bar{K}_0$

10.4.3 Tobin q、公司的价值和 Keynes 的资本边际效率原则

在一篇重要论文(1969)中，Tobin 介绍了"q"的概念，这在后来被称为 **Tobin q**. 从 20 世纪 70 年代晚期起 Tobin q 一直受到极大的注意，被当作投资决策的准则. 在 1969 年的那篇文章中，Tobin 用 p 表示**当前**产品的价格，用 qp 表示**现存的**资本品的市场价格，在此将所有物品假设为同类的(见 1969，326 页). 这样，q 是现存的资本的市场价格对当前生产的产品的价格的比率. 然而，Tobin 还将这一概念作了一点深入，他说，"投资率——投资者希望的增加资本存量的速度——应该与 q(资本相对于它的重置成本的价格)有关."(1969，330 页). 于是他主张"长期均衡"条件"要求资本以它的再生产成本来进行估价，即 $q=1$"(331 页).

在 1969 年的文章中，Tobin 也用 qK 表示公众的实际物质资产(327 页). 这里的 q 是就**平均**而言的 q，即，现存资本的市场价值对其重置成本的比率. 然而，随后却普遍认为与投资决策有关的这个"q"是**边际的** q，即**追加**一单位资本的市场价值与其重置成本的比率. 正如前面的段落所指出的，Tobin 1969 年的文章在一定程度上可能混淆了两者的区别. 但是，在 Tobin 和 Brainard 1977 年的文章中很清楚地表达了边际 q 的重要性. 事实上，他们简明地陈述了 q 理论的梗概：

526

公司投资的新古典理论基于以下假设：公司管理部门寻求使公司的净现值、所有流通的普通股的市价最大化.……很明显边际 q 对投资很重要：市场估价的增值与相关投资成本的比率. 边际 q 的关键值是 1，但这跟平均 q 的值非常不同于 1 是不矛盾的.……(1977，242～243 页).

在 20 世纪 70 年代后期之前，q 理论变得很流行，Hall(1977，85 页)称其为"Jorgenson 理论体系的竞争者"，同时他不认为 q 理论基本上是 Jorgenson 和其同事的新古典理论. 另一方面，Lovell 表示他对"q 理论和 Dale Jorgensen，Robert Hall，及其他人的新古典理论两者的相似感到惊讶"(1977，399 页)，且继续写道：

两种方法都没有在精确构建的最优化框架下计算出调整过程的动态行为，这种框架应明确地将预期形成过程和调整成本包括进来.

也有一系列著作，著名的有 Abel(1979)，Yoshikawa(1980)，Hayashi

(1982),Abel 和 Blanchard(1983),Blanchard 和 Fischer(1989),解释了 q 理论事实上能从跨时选择理论体系中推导出来.这个体系明确考虑到了与投资有关的调整成本,它和前节中讨论过的调整成本体系相似.在这一节中,我们首先专注于以 Hayashi(1982)为基础的投资理论.

因为 Hayashi 的工作目的是实践调查,因而它是非常乏味的.举例说,他考虑了用于税收目的的每 1 美元投资的"折旧津贴"(他的"D"函数).由于考虑不固定的折旧率和公司税,它进一步复杂化.虽然这些推广是重要的,但我们略去了这些以抓住他的理论的要旨.也为了阐述方便,我们假设所有的价格,p,p_I 及 w,和 i 一样不随时间变化.

527

虽然 Hayashi 的理论是根据上面讨论的调整成本方法,但他在资本积累方程中引入了这些成本.他将普通方程

$$\dot{K}_t = I_t - \delta K_t$$

修正为[36]

$$\dot{K}_t = \Psi(I_t, K_t) - \delta K_t \tag{82}$$

正如 Hayashi(1982,216 页)所说的,"在这个公式中,I 个单位的总投资不一定都转化为资本:仅仅投资的百分之 $\Psi \times 100$ 转化为资本……Ψ 关于 I 递增且是凹的,当 I 从 0 变为负数时 Ψ 下降得很快,这反映了投资的不可逆性".因此 Ψ 函数体现了早些讨论过的调整成本方法的精髓,他称 Ψ 为"安装函数",这在图 10.2 中得以说明.更明确地,我们可以(依照 Hayashi,1982)假定

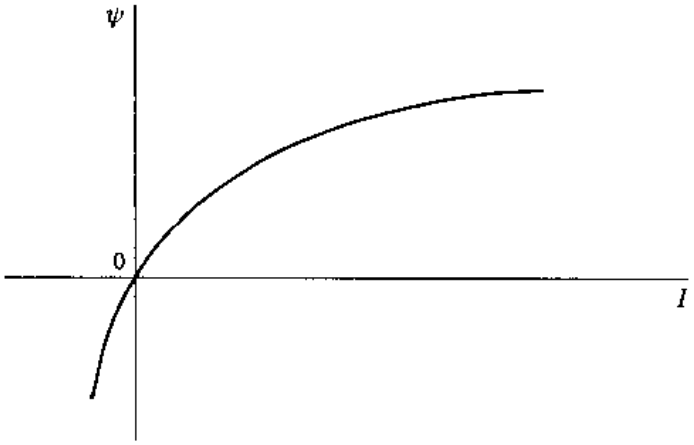


图 10.2　对 Ψ 函数的解释

对所有 (I,K),$\Psi_I > 0$,$\Psi_{II} < 0$

对所有 K,$\Psi(0,K) = 0$

此处 $\Psi_I \equiv \partial\Psi/\partial I$ 及 $\Psi_{II} \equiv \partial^2\Psi/\partial I^2$.进一步假定

对所有的 K,如果 $I > 0$,$0 < \Psi_I < 1$

如果 $I=0, \Psi_I=1$；如果 $I<0, \Psi_I>1$

528 Jorgenson 的限定等于是限定对所有 (I,K)，$\Psi_I=1$

公司将选择 N_t 及 I_t 的时间路径，以使

$$\text{Maximize} \quad \int_0^{\infty} [pF(N_t,K_t)-wN_t-p_II_t]e^{-it}dt$$

约束条件为

(82)式，$N_t \geqq 0, K_t \geqq 0$ 及给定的 K_0 值

该问题的现值 Hamilton 函数可改写为

$$H \equiv [pF(N_t,K_t)-wN_t-p_II_t]+\lambda_t[\Psi(I_t,K_t)-\delta K_t] \tag{83}$$

于是(N_t, I_t, K_t)是最优的必要条件由下面的(84a)到(84e)给出.因为 H 对 I_t 和N_t 是非线性的；我们可假定 N_t 和 I_t 是有界的，假定函数 F 和 Ψ 是凹函数，这些条件对于一个最优解又是充分的.

$$\dot{K}_t=\Psi(I_t,K_t)-\delta K_t \tag{84a}$$

$$\dot{\lambda}_t=(i+\delta)\lambda_t-pF_K-\lambda_t\Psi_K, \text{其中 } \Psi_K=\partial\Psi/\partial K_t \tag{84b}$$

$$F_N(N_t,K_t)=w/p \tag{84c}$$

$$p_I=\lambda_t\Psi_I \tag{84d}$$

$$\lim_{t\to\infty}\lambda_tK_te^{-it}=0 \tag{84e}$$

这里要得到(84c)和(84d)，再假定对所有在最优点的 t，$N_t>0$ 及 $I_t>0$.Hayashi 引入的关键假设是函数 F 和 Ψ 是一次齐次的.因此这等于指明

$$\text{对所有的 } N \text{ 和 } K, F(N,K)=F_NN+F_KK \tag{85a}$$

以及

$$\text{对所有 } I \text{ 和 } K, \Psi(I,K)=\Psi_II+\Psi_KK \tag{85b}$$

接下来，我们得到

$$\frac{d}{dt}(\lambda_tK_te^{-it})=(\dot{\lambda}_tK_t+\lambda_t\dot{K}_t-i\lambda_tK_t)e^{-it}$$

529 并且我们可以观察到

$$\begin{aligned}
&\dot{\lambda}_tK_t+\lambda_t\dot{K}_t-i\lambda_tK_t \\
&=-[(pF_K+\lambda_t\Psi_K)K_t-\lambda_t\Psi] && \text{(通过 84a,b)} \\
&=-[(pF-pF_NN_t)+\lambda_t(\Psi_KK_t-\Psi)] && \text{(通过 85a)} \\
&=[(pF-wN_t)+\lambda_t(\Psi_KK_t-\Psi)] && \text{(通过 84d)} \\
&=-\{(pF-wN_t)+\lambda_t[\Psi_KK_t-(\Psi_II_t+\Psi_KK_t)]\} && \text{(通过 85b)} \\
&=-(pF-wN_t-p_II_t) && \text{(通过 84e)}
\end{aligned}$$

这样,沿着一条最优路径,我们有

$$\frac{d}{dt}(\lambda_t K_t e^{-it}) = -(pF - wN_t - p_I I_t)e^{-it} \tag{87}$$

从0到∞对(87)积分,并使用横截条件(84c),得

$$\lambda_0 K_0 = V^*, \text{其中 } V^* \equiv \int_0^\infty [pF - wN_t - p_I I_t]e^{-it}dt \tag{88}$$

注意 V^* 代表**公司价值**.在 F 和 Ψ 的齐次假定下,我们能得到公司价值 V^* 的一个非常简单的表述.

不管公司价值是否有一个像(88)一样的简单的表述,我们都能从上面的工作中理解 Tobin 的 q 理论的要旨.令 V^* 表示根据跨期选择得到的公司价值.于是 V^* 依赖公司现有的资本存量(即 K_0).从而$(\partial V^*/\partial K_0)$度量了在时间0追加一单位资本所带来的公司价值的增量.如果$(\partial V^*/\partial K_0)$超过现时产出的投资品市场价格,$p_I$,则将鼓励公司进一步扩大投资,否则减少投资.$(\partial V^*/\partial K_0)$的数量对应于 Keynes(1936,135页)所称呼的"资本资产的供应价格".大体上,Tobin 的**边际 q**(以 q_M 表示)可定义为:

$$q_M \equiv (\partial V^*/\partial K_0)/p_I \tag{89}$$

他的投资准则简单地决定于 q_M 是否超过1.所以 Tobin 和 Brainard(1977,238页)写道:

530 经济学逻辑指出 q 的正常均衡值对实际上已经被再生产的可再生产资产而言是1,对别的则小于1.q 大于1将刺激投资,超出对重置和正常增长的需求,而 q 小于1将减少投资.

与(89)相对照,Tobin 的**平均 q**(用 q_A 表示)可定义为

$$q_A \equiv V^*/(p_I K_0) \tag{90}$$

此后,如果 Hayashi 的齐次假设(85)被满足,通过(88)~(99),得下面的重要结论:

$$q_M = q_A \tag{91}$$

为得出(91),这里(88)起了关键的作用,(91)说明在假定生产函数和安装函数是一次齐次的情况下,边际 q 等于平均 q_0 我们称这为 **Hayashi 定理**.[37]

正如 Hayashi(1982,214页)所强调的,"只要 q 是不可观察的,'q'理论就是不可操作的."在 Tobin 理论中与投资决策有关的是边际 q 而非平均 q.不过,我们仅能观察到平均,而非边际 q.然后 Hayashi 继续写道,"基于'q'理论的实证工作已经用平均 q 代替由 von Furstenberg(1977)所代表的边际 q",Hayashi 定理为理论和实证研究提供了桥梁.在这个理论基础上,Hayashi 继续进行实证研究,在这个过程中他遇到了一个难题.他无法检验齐次性假设(85)的合理性.假如这个假设在现实经济生活中是得不到保证的,则他的实证研究将无意义,所以这是 Hayashi 研究中的难题.为继续他的实证调查,他需要齐

次性假设，因为它使他能得到边际 q 的度量（$q_M = q_A$），而实证结果的合理性依赖于这种假设的有效性.[38]

531 事实上，甚至他的齐次假设中也存在一个理论难题. 为检验这点，我们假设 F 和 Ψ 实际都是一次齐次的，且简单地检查它的理论含义. 由 Ψ 的齐次性，我们可定义函数 ψ 为

$$\psi(z_t) \equiv \Psi(z_t, 1)K_t, \text{其中 } z_t \equiv I_t / K_t \tag{92}$$

这里可设

对所有的 z，$\psi' > 0, \psi'' < 0$

对所有的 $z > 0, \psi'(0) = 1, 0 < \psi' < 1$，及对 $z < 0, \psi' > 1$

同样，令 $F(N_t, K_t) \equiv N_t f(k_t)$. 于是条件(84a)至(84e)可改写为

$$\dot{K}_t = [\psi(z_t) - \delta]K_t \tag{93a}$$

$$\dot{\lambda}_t = [(i + \delta) - \psi(z_t) + z_t\psi'(z_t)]\lambda_t - pF_K \tag{93b}$$

$$F_N = w / p \tag{93c}$$

$$p_I = \lambda_t \psi'(z_t) \tag{93d}$$

$$\lim_{t \to \infty} \lambda_t e^{-it} K_t = 0 \tag{93e}$$

同样，根据(93c)，$F_N = f(k) - kf'(k)$，及 $F_K = f'(k)$知，k 和 pF_K 是常数.

对 z_t 解(93d)，得

$$z_t = g(\lambda_t), \text{其中 } g'(\lambda_t) = -\psi' / \lambda_t \psi'' > 0 \tag{94}$$

将其代入(93a)及(93b)，得

$$\dot{K}_t = \{\psi[g(\lambda_t)] - \delta\}K_t \tag{95a}$$

532 $$\dot{\lambda}_t = \{(i + \delta) - \psi[g(\lambda_t)] + g(\lambda_t)\psi'[g(\lambda_t)]\} - c \tag{95b}$$

其中 $c \equiv pF_K$. 在给定边界条件(93e)和 K_0 的条件下，(95a)和(95b)确定了 (K_t, λ_t)的时间路径. 经过冗长的分析后，我们能证明 K_t 或者无限制增大或收缩为零（见 Semba, 1989）. 即，Hayashi 的公司或者无限制扩大，或者消失！但可以证明如果 Ψ 不是一次齐次的，这种困难可以避免. Ψ 的齐次性为借助 Hayashi 定理进行实证调查提供方便，但又伴随着一个理论难题.

为预先阻止可能的误解，我们应指出公司价值这一概念及在(89)和(90)中 q_M 和 q_A 的定义是没有错误的. Hayashi 的难题是没找到 Ψ 的齐次性的含义.

接下来，让我们推导公司价值及它对前面讨论过的调整成本模型的含义. 回想(76a)至(76e)中提出的最优条件. 另外回忆 F 是一次齐次的，且沿着最优路径 $k_t = k^*$（=常数），$I_t = I^*$（=常数），$c \equiv pF_K(1, k^*)$，以及由(81)给出的资本存量的时间路径. 然后有

$$
\begin{aligned}
V^* &= \int_0^\infty [pF(N_t, K_t) - wN_t - C(I^*)]e^{-it}dt \\
&= \int_0^\infty [pF_K(1, k^*)K_t - C(I^*)]e^{-it}dt \\
&= \int_0^\infty \{c[I^*(1-e^{-\delta t})/\delta + K_0 e^{-\delta t}] - C(I^*)\}e^{-it}dt \\
&= (cI^*/\delta)\int_0^\infty e^{-it}dt - c(I^*/\delta - K_0)\int_0^\infty e^{-(i+\delta)t}dt \\
&\quad - C(I^*)\int_0^\infty e^{-it}dt \\
&= [cI^*/\delta - C(I^*)]/i - c(I^*/\delta - K_0)/(i+\delta) \\
&= \frac{c}{i+\delta}K_0 + \frac{c\delta}{(i+\delta)i}\bar{K} - \frac{C(I^*)}{i}
\end{aligned}
$$

这里，$\bar{K} \equiv I^*/\delta$.

533 由此，在时刻 0，追加一单位资本所带来的公司价值增量（即，$\partial V^*/\partial K_0$）很容易算出为

$$\partial V^*/\partial K_0 = c/(i+\delta)(\equiv \lambda^*) \tag{96}$$

注意，由(79)式知，I^* 独立于 K_0，即 λ^* 表示在时间 0 追加一单位资本所带来的公司价值的边际增量，也就是在时刻 0($\partial V^*/\partial K_0$)等于 Pontryagin 乘数($\lambda$)的值. 由(79)式可得

$$\partial V^*/\partial K_0 = C'(I^*) = c/(i+\delta) \tag{97}$$

(97)中的第一个等式表明投资(I^*)被追加到某一点，在这一点使得追加单位资本所带来的公司价值的边际增量等于由于投资导致的边际调整成本.

如前指出的，($\partial V^*/\partial K_0$)可理解为 Keynes(1936，135 页)称作的“资本资产的供给价格”(p_K)，于是从(96)式可得

$$p_K = \int_0^\infty ce^{-(i+\delta)t}dt[= c/(i+\delta)] \tag{98}$$

由于一单位资本产生收入流 $c \equiv pF_K^*$ 及在 $t=0$ 所得到的单位资本将在时刻 t 折旧为 $e^{-\delta t}$，所以(98)右边表示由在时刻 $t=0$ 得到的单位资本中产生的收入流的总现值. 这样方程(98)表示 **Keynes 资本边际效率规则**，这使资本供给价格等于所有未来收益的现值. 区分(73)和(98)是很重要的；(73)中的 p_I 被(98)中的 p_K 所代替. p_K 和 p_I 的区别因其源自“资本固定性”或包含于投资中的调整成本而显得重要. 从(98)，我们可得出 *Keynes* 的资本边际效率规则同得于公司跨时决策过程的投资是一致的，从这一点我们也能得到资本供给价格的正确理解.

将(76a)和(76b)代入(86)，同时回忆函数 F 的齐次性和(76c)，我们可以得

534

$$\frac{d}{dt}(\lambda_t K_t e^{-it}) = \{[(i+\delta)\lambda_t - pF_K]K_t + \lambda_t(I_t - \delta K_t) - i\lambda_t K_t\} e^{-it}$$

$$= (-pF_K K_t + \lambda_t I_t) e^{-it}$$

$$= (pF - wN_t - \lambda_t I_t) e^{-it}$$

上式从 0 到∞积分，得

$$\lambda_0 K_0 = \int_0^\infty (pF - wN_t - \lambda^* I^*) e^{-it} dt \tag{99}$$

这里回想对所有 t，$\lambda_0 = \lambda_t = \lambda^* = c/(i+\delta)$ 及 $I_t = I^*$. 注意(99)右边不是 Hayashi(1982)意义上的公司价值. 同样，在当前情况下，边际 q 不等于平均 q.

最后，我们检验"Tobin 的 q 规则"作为投资准则是否无懈可击. q 规则表明投资被追加到使边际 q 等于 1 的那一点. 回想(89)和(97)，我们得到

$$q_M = C'(I^*)/p_I \tag{100}$$

当 $q_M = 1$ 时，我们有

$$p_I = C'(I^*) \tag{101}$$

另一方面，假设

$$C'(0) = p_I \tag{102}$$

是合理的. 即当投资率为 0 时，边际调整成本等于资本购买价格. 因为对所有 I，$C'' > 0$，故除了 $I^* = 0$ 的情形，(101)和(102)是不一致的. 这就要求对 q 理论作进一步研究. 即如果(101)将决定投资需求 I^*，则根据(102) I^* 必为零. 一种解决这个难题的方法是抛弃将投资推进到 $q_M = 1$ 的前提. 于是从(100)的第一个关系式，我们可得出 $I^* \gtreqless 0$，取决于 $q_M \gtreqless 1$. 这又决定投资水平是为
535 正还是为负，但不决定投资数额，于是，与通常信条相反，q 规则作为一种决定投资需求量的理论是不令人满意的. 相似的观点也可用安装函数(Ψ)方法得出.

现在我们总结这节所得到的结论.

【命题 10.3】

(i) 如果不存在投资的调整成本，最优投资将无界. 在这种情形没有投资"需求计划"那样的东西，且 Jorgenson 的投资理论有一个严重的困难.

(ii) 随着调整成本的引入，存在着投资需求计划，且它是利率，折旧率，及工资率的减函数，产出价格的增函数.

(iii) Tobin 的 q 理论借助公司价值抓住了投资的重要方面，且它与借助调整成本的动态理论是一致的. 然而，作为一种解释投资数量的理论，它是不令人满意的.

(iv) Keynes 的"资本资产供给价格"(p_K)可用单位边际资本增加所带来的公司价值增量($\partial V^*/\partial K_0$)来定义. 他的资本边际效率理论可被证实为借助调整成本方法的动态投资理论.

▶ 注 释

[1]见第 6 章和第 9 章.注意变量 k_t 和 c_t 是 t(时间)的函数.

[2]有一个附加的约束,对所有 t,$k_t \geqq 0$.但是,正如在第 9 章中,我们可以暂时忽略这个约束而进行我们的讨论,然后我们可以看到在这种模式下得到的最优路径的确满足,对所有的 t,$k_t \geqq 0$.

[3]这一节基于 Drabicki 和 Takayama(1978).有关银行部门和货币供应内生本质的扩展分析由 Drabicki 和 Takayama(1983)得到.

[4]为得到(18),如同 Tobin(1965)所说的,我们假定经济中只有两类资产,货币(Treasury money)和实物资产.这个假定也被用来得到(19).关于三种资产的扩展,见 Drabicki 和 Takayama(1983).

[5]$\pi_k(\equiv \partial\pi/\partial k)$和 $\pi_m(\equiv \partial\pi/\partial m)$的表达式如下所示:

$$\pi_k = -(L_1 f'' + L_2 f' + L_3)/L_1 > 0, \pi_m = (1 - L_3)/L_1 < 0$$

[6]这里我们不必限制 θ 为非负数.因此,从 H 关于 θ 的最大化简单地得到 $\partial H/\partial\theta = 0$,正如(4″)所指出的那样.

[7]此节选自 Takayama(1985b).这又基于作者 1974 年秋在东京大学关于宏观经济学的演讲,这随后又在各所大学重复(有一些改动).

[8]Franco Modigliani 是 1985 年诺贝尔经济学奖得主.

[9]Friedman 的持久收入假说和 Modigliani - Brumberg 的生命周期假说的历史性进步是非常戏剧性的.它开始于预测的误差,例如预测 1946 年第一季度的失业人数.实际的数值是270万,而不是预测的810万(见 Hagen,1947 对他自己预测误差的反应).类似的由 Mosak 和 Smithies 作出的预测(发表在《数量经济学》1945 年 1 月期)也很有名.由于这个预测的误差,产生了关于消费函数的正确的限定方式的一些质疑.显然在这些研究中,表面上看来相冲突的经验证据在这种努力中被调解了.1869—1929 年的 Kuznets 的数据说明了平均消费倾向(APC)的长期稳定性;商业部的数据说明了边际消费倾向(MPC)的短期易变性.1901,1917—1919,1935—1936,1941—1942 的截面预算研究数据说明 *MPC* 小于 *APC*,但这个关系将转换为恰当维持的面定的 *APC*.第一个成功的调和努力是 Duesenberry(1949).随着 Modigliani - Brumberg(1954)和 Friedman(1957)研究成果的出版,"消费函数争论"达到了其顶峰.对始于 Hagen 和其他人的预测误差,终止于 Modigliani,Brumberg 和 Friedman 研究的消费函数争论的精彩论述见 Shinohara(1958).另见 Branson(1989,第 12 章).Modigliani 和 Friedman 都是诺贝尔奖得主.

[10]不生息资产的引入不改变现在分析的本质.为简化,另外假定消费者的金融资产具有银行中储蓄账户的特性,即它们具有利息率可变下的固定货币价值.这样做可以避免因与公债类型债券相关联而导致的资本收益或损失

的复杂性.

[11]正如在第9章中阐述最优增长问题时提到的那样,一个恒定的 ρ 的假定给理论加上了特定的较强的限制.

[12]由假设 $u'(0)=\infty$ 可得一内部解.

[13]这与 Hick(1939,1946)的收入流定义相一致,即如果财富要保持不变,收入流必须被消耗掉.正如 Yaari(1964,312 页)指出的,Friedman(1957)在理论层次上接受了 Hicks 的收入定义(虽然"在实践水平上他以某种不同的方式定义'永久收入'").

[14]为得到(52′),在(46′)两侧乘以

$$\exp\left(-\int_0^{\infty} r_s\,ds\right)$$

(用 r_s 取代 r),并进行与得到(52)的计算类似的计算.

[15]Ragnar Frisch 和 Jan Tinbergen 因计量经济学方面的工作面共同获得了 1969 年第一届诺贝尔经济学奖.

[16]等弹性效用函数的验证由 Yaari(1964)提出.Yaari 的验证被 Blinder(1974,31～32 页)重点讨论.Blinder(1974,32 页)也宣称效用函数(54)"在宏观经济学中具有长期的受人注目的历史,因为它是 Friedman 的持久收入模型(1957)和 Modigliani 与 Brumberg(1954)的生命周期模型的基础."

[17]这里 c_0 代表了最优的即期实际消费,此式是在现在的最优条件(47)的框架下得到的.

[18]这个结论就本身而言不依赖于效用函数的等弹性假定.等弹性效用函数的假定加上了一个限制:消费扩展率或收缩率($\dot{c}_t/c_t$)是常数(μ).

[19]类似的图由 Imai 等人(1972,16 页)得到,这里他们假定 $r>p$.按他们的说法,图 10.1 也被称为 **Irving Fisher 图**.

[20]Yaari(1964,313 页)叙述说"存在支持这个观点的经验论据",并随后提供了研究这个观点内含的分析.

[21]关于实际利率的稳定性,Friedman(1974,37 页)注释说,"我们有长时期的利率数据,这些数据说明利率在不同时期是非常类似的,如果相比较的时期中有类似的价格行为(Gupta,1964).St. Louis 的联邦储蓄银行最近已估计了'实际利率',他们的估计值非常的稳定,尽管名义利率变换是很大的."

[22]我们可以注意到这个比例结论与静态需求模型的一个著名结论相类似.这个结论是:在位似偏好下,对每个商品的需求与收入是成比例的,且比例因于取决于价格.既然我们总是使商品过时,这节中得出的结论也许不会太令人惊奇.即人们可以认为持久收入假说只是在位似偏好下通常的需求理论的一个应用.但是,这一点显然需要进一步审视.在通常的需求理论中,甚至"持久收入"的概念也是未予明确介绍的.

[23]这节选自 Takayama(1987,1991).

[24]虽然它受到很大批评,Jorgenson 和其同事在 60 年代和 70 年代早期的投资研究对于激励以后的发展仍是重要的.代表性的工作是 Jorgenson(1967).然后他写了一系列关于投资研究的综述文章(例如,Jorgenson 1971 和

1972). Jorgenson 的理论已被包括在最近的投资教材中(例如,见 Dorbusch 和 Fischer 1987).

[25]不变的折现率(i)可解释为人们可以进行任何数量借贷的名义利率. 假定对公司而言 i 是外生给定的,而且贷款利率等于借款利率. 后一个假定常被称为**完善资本市场**的情况. (不完善资本市场情况的分析是类似的,因此可以省略.)如果 i 不是恒定的而是随时间变化的,则对 W 的表达式中的 e^{-it} 被 $e^{-\int_0^t i_t dt}$ 代替.

[26]Trygve Haavelmo 是 1989 年诺贝尔经济学奖得主.

[27]一个明显而简单的关于 I_{min} 的可选数是 0: $I_{min} \geqq 0$ 的限制通常被称为**投资的不可逆性**(见 Arrow 1968). 这意味着投资品的拆除是非常费钱的(如果不是过于昂贵). I_{min} 和 I_{max} 外来给定的(暗含)假设是凭经验的. 例如, I_{max} 由施加于特定公司之上的融资限制决定(见 Niho 和 Musacchio 1983).

[28]如果资本品在一段有限时间内出租,比如说 T,则跨时套利关系是

$$p_I = \int_T^0 ce^{-(i+\delta)t}dt + p_I e^{(i+\delta)T}$$

由此可导出和前面一样的关系式,即 $c = (i+q)p_I$.

[29]"使用者成本"的概念在 Keynes 的"通论"中讨论过. 作为一个"预备"定义,他将其定义为"他(企业家)为他必须向其他企业家购买的产品而支付给他们的金额,再加上由于他使用设备而不是将其闲置而招致的损失的金额",(1936,23 页). 后来(52~53 页),他给出这个概念的更"精确"的定义. 显然对他自己的解释还不满意,Keynes 写了一个"使用者成本附录"(66~73 页). 尽管他陈述说(66 页),"稍加思考便可说明所有这些只不过是常识",人们仍可以发现他的阐述是令人迷惑的. 他能够(应该)以更流畅的方式解释使用者成本的概念. 需要对通论的相关部分进行大量的和反复的阅读,才能理解 Keynes 想通过这个概念表示什么. 关于 Keynes 概念的有益解释见 Uzawa (1984,131~158 页).

[30]以下的解释,虽然含有掩饰了 p_I 和 p_K 之间区别的不足之处,但对于进一步深入理解使用者成本是有益的. 考虑某公司在时期开始借入 p_I 美元. 在时期末,公司需偿还 $(1+i)p_I$ 美元. 通过 p_I 美元,公司能购买一单位的资本品. 在时期末,一单位资本品成了 $(1-\delta)$ 单位,这里 δ 是折旧率. 记期末的资本品价格为 $(p_I + \Delta p_I)$,其中允许时期内价格发生变化. 则公司可以在期末以 $(1-\delta)(p_I + \Delta p_I)$ 的价格卖出在期初购买的资本品. 假定公司从时期内资本品的使用上获得了 c 美元收益. 公司于期末获得了 $c + (1-\delta)(p_I + \Delta p_I)$ 美元. 这里期末资本的拆卸费用(与售卖相关的其他费用)被忽略. 在竞争性市场上,跨时期套利使等式

$$(1+i)p_I = c + (1-\delta)(p_I + \Delta p_I)$$

成立. 忽略 $\delta \Delta p_I$,该套利条件化为 $c = [(i - \Delta p_I / p_I) + \delta]p_I$,它与(72′)相符. 如果 p_I 在时期内不变($\Delta p_I = 0$),则该方程能简化为 $c = (i+\delta)p_I$,它与(72)相符. 在这个讨论中,我们假定公司在期初以利率 i 借入 p_I 美元. 如果公司开

始时有这笔资金，而不必去借，同样可运用相同的分析，因为它可以借出 p_I 美元，于期末得到 $(1+i)p_I$ 美元（假定资本市场完善）. 这只是一个通常的机会成本的概念.

[31]这样的资本边界的使用者成本的概念在最近的实证文献中大量出现. 不幸的是，许多实证研究忽略了为得到使用者成本的概念而加上的假定：$(i+\delta)p_I$.

[32]这通常被看做 Keynes 关于投资讨论的基础部分（"动物血气"），并且实际上是"通论"背后的基本主题. 我们认定这其中有着真理的重要因素，在我们关于投资的讨论中忽略它，把我们的注意力集中在另一重要方面，"资本的固定性". 虽然我们同意以 Knight 的认识来看，不确定性在实际生活的经济中很重要，但我们不能同意"原教旨主义者"的话，像 Joan Robinson 和 G. L. S. Shackle，他们相信 Knight 的不确定是凯思斯理论的"本质". 作为这种观点的结果，他们坚持完全排除均衡的概念. 在这样的情形下，许多传统的经济学就必定会被否定. 但他们没有提供任何可操作的有用的替代主张. 这并不令人惊奇：如果人类对于未来的无知主要被归纳为完全不可预测的"不确定性"，那么我们就不能获得任何有用的主张. 从没有开始，则什么也不能被创造. 毕竟，如果 Keynes 打算相信投资主要归结于公司的"动物血气"，他为什么还要发展他的资本边际效率的概念并费力劳神于使用者成本这样的概念呢？

[33]这样的规定来自于 Eisener 和 Strotz(1963), Lucas(1967a), Gould(1967), Abel(1979).

[34]关于不恒定规模收益的情况，见 Takayama(1985a, 699～701 页).

[35]为从(79)得到 $I^*>0$，我们假定 $c'(0)<c/(i+\delta)$. 注意(79)与(72)相一致.

[36]Hayashi(1982, 216 页)在验证他的 Ψ 函数时提到了 Uzawa(1968 和 1969)的"Penrose 函数".

[37]注意在 Hayashi 的阐述中，线性假定在得到 $q_M=q_A$ 上起着关键的作用. 在 Yoshikawa 的公式(1980)中，给定他的线性假定，我们可再次得到 $q_M=q_A$. 存在于这两个阐述中的普遍定理被 Rose(1981)认识到，他以很简单的方式得到了关于最优控制理论的有用定理.

[38]q 理论在最近的教材中被介绍. 例如 Branson(1989, 305～307 页)，其中他注意到边际 q 和平均 q 之间的关系会很"复杂". 然后他指出这两者可能会向相反的方向运动.

▶ 参考文献

Abel, A. 1979. *Investment and the Value of Capital*. New York: Garland.

Abel, A., and O. J. Blanchard. 1983. "An Intertemporal Model of Saving and Investment." *Econometrica* 51 (May) 675－92.

Arrow, K. J. 1968. "Optimal Capital Policy with Irreversible Investment." In *Value, Capital, and Growth: Papers in Honour of Sir John Hicks*. ed. J. N. Wolfe, 1 - 19, Edinburgh: Edinbrugh University Press.

Blanchard, O. J., and S. Fischer. 1989. "Consumption and Investment: Basic Infinite Horizon Models." In *Lectures in Macroeconomics*, 37 - 90. Cambridge, Mass.: MIT Press, 37 - 90.

Blioder, A. S. 1974. *Toward an Economic Theory of Income Distribution*. Cambridge, Mass.: MIT Press.

536 Branson, W. H. 1989. *Macroeconomic Theory and Policy*. 3d ed. New York: Harper and Row.

Brunner, K., and A. H. Meltzer. 1974. "Friedman's Monetary Theory." In *Milton Friedman's Monetary Framework: A Debate with his Critics*. ed. R. J. Gordon, 63 - 89, Chicago: University of Chicago Press, 63 - 89.

Burmeister, E., and R. A. Dobell. 1970. *Mathematical Theories of Economic Growth*. New York: Macmillan.

Cass, D. 1965. "Optimum Growth in an Aggregate Model of Capital Accumulation." *Review of Economic Studies* 32 (July): 233 - 40.

Dornbusch, R., and F. Fischer. 1987. *Macroeconomics*. 4th ed. New York: McGraw-Hill.

Drabicki, J. Z., and A. Takayama. 1978. "Money, Inflation, and Optimal Economic Growth." *Economics Letters* 1(1): 55 - 58.

_____. 1983. "An Optimal Monetary Policy in an Aggregate Neoclassical Model of Economic Growth." *Journal of Macroeconomics* 5 (Winter): 53 - 74.

Duesenberry, J. S. 1949. *Income, Saving, and the Theory of Consumer Behavior*. Cambridge, Mass: Harvard University Press.

Eisner, R., and R. H. Strotz. 1963. "Determinants of Business Investment." In *Impacts of Monetary Policy*, ed. D. B. Suits et al. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.

Farrell, M. J. 1959. "The New Theories of the Consumption Function." *Economic Journal* 69 (December): 678 - 96.

Fisher, I. N. 1930. *The Theory of Interest*. New York: Macmillan.

Foley, D. K., and M. Sidrauski. 1971. *Monetary and Fiscal Policy in a Growing Economy*. New York: Macmillan.

Friedman, M. 1957. *A Theory of the Consumption Function*. Princeton, N.J.: Princeton University Press.

_____. 1974. "A Theoretical Framework for Monetary Analysis." In *Milton Friedman's Monetary Framework: A Debate with His Critics*, ed. R. J. Gordon, 1 - 62. Chicago: University of Chicago Press.

Goodwin, R. M. 1961. "The Optimal Growth Path for an Underdeveloped Economy." *Economic Journal* 71 (December): 756 - 74.

Gould, J. P. 1968. "Adjustment Costs in the Theory of Investment of the Firm." *Review of Economic Studies* 35 (January): 47 – 55.

_____. 1969. "The Use of Endogenous Variables in Dynamic Models of Investment." *Quarterly Journal of Economics* 83 (November): 580 – 99.

Haavelmo, T. 1961. *A Study in the Theory of Investment*. Chicago: University of Chicago Press.

Hagen, E. E. 1947. "The Reconversion Period: Reflection of a Forecaster." *Review of Economics and Statistics* 29 (May): 756 – 74.

537 Hahn, F. H., and R. C. O. Matthews. 1964. "The Theory of Economic Growth: A Survey." *Economic Journal* 74 (December): 779 – 902.

Hall, R. E. 1977. "Investment, Interest Rates, and the Effects of Stabilization Policies." *Brookings Papers on Economic Activity* 1: 61 – 103.

Hall, R. E., and D. W. Jorgenson. 1971. "Application of the Theory of Optimum Capital Accumulation." In *Tax Incentives and Capital Spending*, ed. G. Fromm, 9 – 60, Washington, D.C.: Brookings Institution.

Hartle, R. F. 1987. "A Simple Proof of the Monotonicity of the State Trajectories in Autonomous Control Problems." *Journal of Economic Theory* 42 (February): 211 – 15.

Hayashi, F. 1982. "Tohin's Marginal and Average q: A Neoclassical Interpretation." *Econometrica* 50 (January): 213 – 24.

Hicks, J. R. 1946. *Value and Capital*. 2d ed. Oxford: Clarendon Press (1st ed. 1939).

Imai, K., H. Uzawa, R. Komiya, T. Negishi, and Y. Murakami. 1972. *Price Theory III* (in Japanese). Tokyo: Iwanami.

Jorgenson, D. W. 1963. "Capital Theory and Investment Behavior." *American Economic review* 53 (May): 247 – 59.

_____. 1965. "Anticipations and Investment Behavior." In *Brookings Quarterly Econometric Model of the United States*, ed. E. Kuh, G. Fromm, and L. R. Klein. Amsterdam: North-Holland.

_____. 1967. "*The Theory of Investment Behavior*." *In Determinants of Investment Behavior*, ed. R. Ferber. New York: NBER.

_____. 1971. "Econometric Studies of Investment Behavior: A Survey." *Journal of Economic Literature* 9 (December): 1111 – 47.

_____. 1972. "Investment Behavior and the Production Function." *Bell Journal of Economic and Management Science* 3 (Spring): 220 – 51.

_____. 1974. "Investment and Production: A Review." In *Frontiers of Quantitative Economics*, ed. M. D. Intriligator and D. A. Kendrick, 2: 341 – 75, Amsterdam: North-Holland.

Keynes, J. M. 1936. *General Theory of Employment, Interest, and Money*. London: Macmillan.

Koopmans, T. C. 1965. "On the Concept of Optimal Economic Growth." In *The Econometric Approach to Development Planning*. Amsterdam: North-Holland.

Lerner, A. P. 1944. *The Economics of Control: Principles of Welfare Economics*. New York: Macmillan.

_____. 1965. "On Some Recent Developments in Capital Theory." *American Economic Review* 55 (May): 284 - 95.

Lovell, M. C. 1977. "Comments and Discussion of von Furstenberg's Paper." *Brookings Papers on Economic Activity* 2: 398 - 401.

538 Lucas, R. E. 1967a. "Adjustment Costs and the Theory of Supply." *Journal of Political Economy* 75, August: 321 - 34.

_____. 1967b. "Optimal Investment Policy and the Flexible Accelerator." *International Economic Review* 8 (February): 78 - 85.

Lutz, F., and V. Lutz. 1951. *The Theory of Investment of the Firm*. Princeton, N.J.: Princeton University Press.

McLaren, K., and R. Cooper. 1980. "Intertemporal Duality: Application to the Theory of the Firm." *Econometrica* 48 (November): 1755 - 62.

Modigliani, F. 1975. "The Life-Cycle Hypothesis of Saving of Twenty Years Later." In *Contemporary Issues in Economics*, ed. M. Parkin. Manchester: Manchester University Press.

_____. 1990. "Frisch Lecture." The Sixth World Congress of Econometric Society, Barcelona, Spain, August 24.

Modigliani, F., and R. E. Brumberg. 1954. "Utility Analysis and Consumption Function: An Interpretation of Cross Section Data." In *Post-Keynesian Economics*, ed. K. K. Kurihara, 388 - 436, New Brunswick, N.J.: Rutgers University Press.

Morrison, C. J. 1986. "Structrual Models of Dynamic Factor Demands with Negative Expectations: An Empirical Assessment of Alternative Expectation Specifications." *International Economic Review* 27 (June): 365 - 86.

Morrison, C. J., and E. R. Berndt. 1981. "Short-Run Labor Productivity in a Dynamic Model." *Journal of Econometrics* 16 (August): 339 - 65.

Nagatani, K. 1970. "A Note on Professor Tobin's Money and Economic Growth." *Econometrica* 38 (January): 171 - 75.

Niho, Y. and R. A. Musacchio. 1983. "Effects of Regulation and Capital Market Imperfections on the Dynamic Behavior of a Firm." *Southern Economic Journal* 49 (January): 625 - 36.

Ramsey, F. P. 1928. "A Mathematical Theory of Saving." *Economic Journal* 38 (December): 543 - 59.

Rose, H. 1981. "Shadow Prices in Intertemporal Plans under Constant Returns to Scale." *Economics Letters* 8: 35 - 37.

Samuelson, P. a. 1958. "An Exact Consumption-Loan Model with or without the Social Contrivance of Money." *Jorunal of Political Economy* 66 (December): 467 – 82.

Semba, K. 1989. "Reconsiderations of Investment Theory" (in Japanese) *Aoyama Gakuin Seikei Ronshu* 14 (October): 73 – 95.

Shinohara, M. 1958. *Consumptium Functions* (in Japanese). Tokyo: Keiso Shobo.

Stiglitz, J. E. 1974. "Growth with Exhaustible Natural Resources: Efficient and Optimal Economic Growth." *Review of Economic Studies* 41L 123 – 37.

Summers, L. H. 1981. "Taxation and Corporates Investment: A q – Theory Approach." *Brookings Papers on Economic Activity* 1: 67 – 140.

539 Takayama, A. 1971. "A Note on Marginal Efficiency of Capital and Marginal Productivity of Capital." *Lecture notes*, Purdue University, February.

_____. 1985a. *Mathematical Economics*. 2d ed. New York: Camhridge University Press.

_____. 1985h. "Permanent Income Hypothesis: An Optimal Theory Aproach to a Classical Macro Thesis." *Journal of Macroeconomics* 7 (Summer): 347 – 62.

_____. 1987. "Chapter 7: Investment Demand." *Lecture notes*, Southern Illinois University, October.

_____. 1991. "Investment Demand: A Survey." *Osaka Eomomic Papers* 40 (March): 115 – 40.

Tinbergen, J. 1960. "Optimum Savings and Utility Maximization over Time." *Econometrica* 28 (April): 481 – 89.

Tobin, J. 1965. "Money and Economic Growth." *Econometrica* 33 (October): 671 – 84.

_____. 1967. "Comment." In *Determinants of Investment Behavior*, ed. R. Ferber. New York: NBER.

_____. 1968. "Notes on Optimal Monetary Growth." *Journal of Political Economy* 76 (July/August): 833 – 59.

_____. 1969. "A General Equilibrium Approach to Monetary Theory." *Journal of Money, Credit and Banking* 1 (Fehruary): 15 – 29.

Tobin, J., and W. Brainard. 1977. "Asset Markets and the Cost of Capital." In *Economic Progress, Private Values, and Public Policy: Essays in Honor of William Fellner*, ed. B. Belassa and R. Nelson, 235 – 262, Amsterdam: North-Holland.

Treadway, A. B. 1969. "*What is Output? Problems of Concept and Measurement.*" *In Production and Productivity in the Service Industries*, ed. V. Fuchs. New York: Columbia University Press.

_____. 1971. "On the Rational Multivariate Flexible Accelerator."

Econometrica 39 (September): 845 – 55.

_____. 1974. "The Global Optimal Flexible Accelerator." *Journal of Economic Theory* 7 (January): 17 – 39.

Tsiang, S. C. 1969. "A Critical Note on the Optimum Supply of Money." *Journal of Money, Credit, and Banking* 9 (May): 266 – 80.

Uzawa, H. 1966. "An Optimal Fiscal Policy in an Aggregate Model of Economic Growth." In *The Theory and Design of Economic Development*, ed. I. Adelman and E. Thorbeck. Baltimore, Md.: University of Maryland Press.

_____. 1968. "The Penrose Effect and Optimum Growth." *Economic Studies Quarterly* 19 (March): 1 – 14.

_____. 1969. "Time Preference and the Penrose Effect in a Two Class Model of Economic Growth." *Journal of Political Economy* 77 (July/August): 628 – 52.

540 _____. 1984. *Reader's Guide to Keynes' "General Theory"* (in Japanese). Tokyo: Iwanami.

von Furstenburg, G. 1977. "Corporate Investment: Does Market Valuation Matter in the Aggregate?" *Brookings Papers on Economic Activity* 2: 349 – 97.

Yaari, M. E. 1964. "On the Consumer's Lifetime Allocation Process." *International Economic Review* 5 (September): 304 – 317.

Yoshikawa, H. 1980. "On the '*q*' Theory of Investment." *American Economic Review* 70 (September): 739 – 43.

_____. 1984. *Studies on Macroeconomics* (in Japanese). Tokyo: University of Tokyo Press.

第 11 章　最优控制论的扩展

§ 11.1　主要定理

541　迄今为止，最优控制问题的主要约束是由一系列微分方程

$$\dot{x}_i = f_i[x(t), u(t), t], i = 1, 2, \cdots, n \tag{1}$$

给出的，其中，$x(t) = [x_1(t), \cdots, x_n(t)]$，$u(t) = [u_1(t), \cdots, u_r(t)]$. 虽然这仍是一种关键的约束形式，但考虑其他形式约束常常显得很必要. 这里我们关注一些重要的形式：即，“g - 约束”和“积分约束”，同时（在这节中）我们讨论这些约束将怎样影响最优控制理论的问题. 在接下来的小节中，我们通过应用说明在这些约束下得到的结果：特别地，11.2 节讨论消费者终身分配过程，11.3 节讨论等圆周问题，及 11.4 节分析空间定价.[1]

g - 约束

一种重要的约束形式给定为

$$g_j[x(t), u(t), t] \geqq 0, j = 1, 2, \cdots, m' \tag{2a}$$

$$g_j[x(t), u(t), t] = 0, j = m' + 1, m \tag{2b}$$

我们称形式(2)的约束为 g **约束**，它要求$[x(t),u(t)]$在由(2)定义的一定范围内. 方程(2a)考虑了对某些 t 和 j，$g_j[x(t),u(t),t]>0$ 的可能性. 而
542 (2b)不允许这种可能性. (2a)处理的是不等式约束，而(2b)是等式约束.

【例 11.1】 回忆第 10 章中讨论的最优增长问题，在该问题中，经济计划者将选择人均消费路径，使得

$$\text{Maximize} \quad \int_0^{\infty} u(c_t)e^{-\rho t}dt$$

约束条件为

$$\dot{k}_t = f(k_t) - nk_t - c_t \text{ 及给定的 } k_0$$

假设我们要求资本不能被"吃光"，因此，当前消费必须来源于当前产出. 这要求约束

$$c_t \leqq f(k_t)$$

这种约束属于(2a)形式.

积分约束

另一形式的约束可写为

$$I_k \equiv \int_0^T h_k[x(t),u(t),t] \geqq 0, k=1,2,\cdots,\ell' \tag{3a}$$

$$I_k \equiv \int_0^T h_k[x(t),u(t),t] = 0, k=\ell'+1,\cdots,\ell \tag{3b}$$

这些称为**积分约束**. 限制(3a)允许对某些 k 和某些 t 有 $I_k>0$ 的可能，而在这些积分中 T 可以是固定的、开放的，或者∞. 例如，这种类型的约束可见于个人储蓄的问题中，在这种问题中，单个消费者的预算约束可以施加在整个生命阶段而不是每个时刻.

我们现在考虑问题：

选择 $u(t)\in U$，使得

$$\text{Maximize} \quad \int_0^T f_0[x(t),u(t),t]dt + \psi[x(T)]$$

543 约束条件为

(1)、(2)、(3)且 $x(0)=x^0$(固定)

这里 T 假定是固定的，且 $x(T)$的值不是事先确定. 上述问题的 $x(0)$的值及 0 可分别被 $x(t^0)$及 t^0 取代. 其讨论和下面说明的问题类似.

在这个问题中，ψ 函数用来指定计划期 T 的期末的剩余存量 $x(T)$的效用. 如果 $\psi\equiv 0$，则最优路径在 T 时刻将不会留下资产，即，$x(T)=0$. 所有的函数，$f_0,f_1,\cdots,f_n,\psi,g_1,g_2,\cdots,g_m,h_1,\cdots,h_\ell$，假定在空间$(x,u,t)$的点集 X 上是连续可微的. 给定 $u(t)\in U$，X 由相关约束确定. 很明显，这样表达的问题包含了一系列广泛问题，其既出现在经济学中，也出现在科学和工程学中. 我们还可指出这个问题可以变换为 T 是开放或∞，以及 $x(T)$是开放的其他形式的问题，正如在第 9 章中见到的.

在陈述提供最优化特征的主要定理 11.1 之前，我们必须表述载于

Hestenes(1965 和 1966)中的“秩条件”.

秩条件 $s\times r$ 矩阵

$$\left[\frac{\partial g_E}{\partial u}\right]$$

中有沿着最优轨道的秩 s,这里 E 是 $g_j(j=1,2,\cdots,m)$中在最优点处有效的下标集合,即,沿着最优轨道$[x(t),u(t)]$,

$$E\equiv\{j:g_j[x(t),u(t),t]=0\}$$

s 是这些有效约束的数目.注意,这个秩条件只施加在“g - 约束”上,即,(2a)和(2b),而不包括 f_i 和 h_k.这个秩条件在一定程度上(但不完全)与普通非线性规划理论中的经典秩条件(见第 2 章及 Takayama 1985,98 页)一致.在假定这个秩条件后,我们就可以叙述定理 11.1,我们称其为 **Hestenses 定理**(见 Hestenes 1965 和 1966).

【定理 11.1】 设弧

$$z\equiv[x(t),u(t)],0\leqq t\leqq T$$

544 是当前最大化问题的解.则存在乘子

$$p_0,p_i(t),q_j(t),\lambda_k,i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,m,k=1,2,\cdots,\ell$$

在 $0\leqq t\leqq T$ 上不同时为零,使得对每一个 t 关系式

$$\dot{x}_i=\frac{\partial L}{\partial p_i},\dot{p}_i=-\frac{\partial L}{\partial x_i},i=1,2,\cdots,n \tag{4}$$

成立,这里,L 是**广义 Hamilton 函数**,由下面的式子来定义:

$$\begin{aligned}&L[x(t),u(t),t,p_0,p(t),q(t),\lambda]\\&\equiv p_0f_0[x(t),u(t),t]+\sum_{i=1}^{n}p_i(t)f_i[x(t),u(t),t]\\&\quad+\sum_{j=1}^{m}q_j(t)g_j[x(t),u(t),t]+\sum_{k=1}^{\ell}\lambda_kh_k[x(t),u(t),t]\end{aligned} \tag{5}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_i}=0,i=1,2,\cdots,r \tag{6}$$

$$q_j(t)\geqq 0,g_j[x(t),u(t),t]\leqq 0 \tag{7a}$$

$$q_j(t)g_j[x(t),u(t),t]=0,j=1,2,\cdots,m' \tag{7b}$$

$$g_j[x(t),u(t),t]=0,j=m'+1,\cdots,m \tag{7c}$$

$$\lambda_k\geqq 0,\lambda_kI_k=0,k=1,2,\cdots,\ell'$$

$$I_k=0,k=\ell'+1,\cdots,\ell \tag{8}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_i(T)}=p_i(T),i=1,2,\cdots,n(\text{横截条件}) \tag{9}$$

这里,$u_i(i=1,2,\cdots,r)$假定有界.

【定理 11.2】[2] 反之，如果 $f_0(x,u,t), f_i(x,u,t), i=1,2,\cdots,n,$

545 $g_j(x,u,t), j=1,2,\cdots,m$，以及 $h_k(x,u,t), k=1,2,\cdots,\ell$，对每个 t 关于 x 和 u 均为凹函数且可微，且如果函数 $\psi[x(T)]$ 关于 $x(T)$ 凹且可微，则必要条件(4)至(9)也是最优化的充分条件，只要假定 $p_0=1$，且对所有的 t，$p_i(t)\geqq 0, i=1,2,\cdots,n$. 如果 f_0 关于 x 和 u 严格凹，或 ψ 关于 $x(T)$ 严格凹，则最优路径惟一.

注：注意条件(4)中 $\dot{x}_i=\partial L/\partial p_i (i=1,2,\cdots,n)$ 化为微分等式约束(1). 同样，由(4)至(7)，可得[3]

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\partial L}{\partial t} \tag{10}$$

从定理 11.1 的条件(6)，我们也可断定，沿着最优路径，函数 $H(x,u,t,p_0,p,\lambda)$ 关于 u 对所有满足 $g_j(x,u,t)\geqq 0, j=1,2,\cdots,m'$，且 $g_j(x,u,t)=0, j=m'+1,\cdots,m$ 的 (x,u,t) 是最大的，这里函数 H 定义为[4]

$$\begin{aligned} H[x(t),u(t),t,p_0,p(t),p(t),\lambda] \equiv\ & p_0 f_0[x(t),u(t),t] \\ & + \sum_{i=1}^{n} p_i(t) f_i[x(t),u(t),t] \\ & + \sum_{k=1}^{\ell} \lambda_k h_k[x(t),u(t),t] \end{aligned} \tag{11}$$

546 函数 H 是当前问题的 **Hamilton 函数**. 当无“g - 约束”(即，条件 $2a$ 和 $2b$)时，定理 11.1 中(等式 5 定义)的函数 L 可化为简单的 Hamilton 函数 H. 在这种情形下受制于 g - 约束的 L 的最大化化为无约束的 H 的最大化.

注：注意到函数 $g_j (j=1,2,\cdots,m)$ 显式地包含 u 是很重要的. 如果不是这种情况，即，如果 $g_j=g_j[x(t),t]$，则最优路径能够“跳跃”. 这样的约束被称为**有界状态变量约束**(例如参见，Hestenes 1966，第 8 章；Funk 和 Gilbert 1970；Russak 1970；及 Seierstad 及 Sydsaeter 1977).

注意到在问题的设计中，我们假定最终资本存量 $x_i(T)(i=1,2,\cdots,n)$ **不是预先**固定的，而 T 是固定的. 另一方面，我们经常碰到一些最终资本存量 $x_i(T)(i=1,2,\cdots,n)$ 是**预先**固定的问题，即

$$x_i(T)=x_i^T, i=1,2,\cdots,n \tag{12}$$

这里，x_i^T 表示预先确定的 $x_i(T)$ 值，$i=1,2,\cdots,n$. 在这种情形下，横截条件(9)不再成立面代之以(12). 注意到我们去掉(9)而丧失了 n 个条件，但通过(12)我们现在又加上了 n 个新条件.

在实际应用中，“非负约束”

$$\text{对某些 } i, u_i(t)\geqq 0 \tag{13}$$

经常出现.虽然这些限制可并入形如 $g_j \geqq 0$ 的约束的一部分,但如果我们省去 $g_j = u_i \geqq 0$ 形式的限制而定义函数 L,且将定理 11.1 中的条件(6)重写为

$$\text{对这些 } i, \frac{\partial L}{\partial u_i} \leqq 0 \text{ 且} \frac{\partial L}{\partial u_i} u_i = 0 \tag{6'}$$

这里,我们假定 $u_i (i = 1,2,\cdots,r)$是有界的.仅有的重要(或相关的)g - 约束表现为 $u_i \geqq 0$ 的形式也是可能的.在这种情况下,(6′)可进一步简化为

$$\text{对这些 } i, \frac{\partial H}{\partial u_i} \leqq 0 \text{ 且} \frac{\partial H}{\partial u_i} u_i = 0 \tag{6''}$$

这里,假定 u_i 有界.此外,在文献中,研究者经常加上一些条件以保证"内部
547 解"的存在,即,只要 $u_i (i = 1,2,\cdots,r)$受到约束 $u_i \geqq 0$ 的限制,假定对所有这样的 i 在最优点有 $u_i(t) > 0$(对所有 t).这时,(6″)可进一步简化为

$$\text{对这些 } i, \frac{\partial H}{\partial u_i} = 0 \tag{6'''}$$

在实际应用到经济学中时,Hestenes 的秩条件通常是满足的.而且,我们从一个特别给定的问题出发能经常安全地令 $p_0 = 1$.因此在经济学中没有任何对假设 $p_0 = 1$ 的证明和对秩条件的检验,这或多或少是一种习惯.因而,虽然有点不精确,但在接下来的分析里,我们遵循这样的实践.在我们下面的例子中,这应该不会造成困难.

§ 11.2 消费者终身分配过程:有限期界的情形

考虑一个消费者,他的计划期限(或生命时限)是 T,T 有限.[5]在 t 时刻,他或她的实际收入和消费支出分别用 y 和 $c(t)$表示,y 假定为常数.再假定消费者所有的资产均以有息证券的形式持有;资产 $a(t)$的积累(或消耗)方程为[6]

$$\dot{a}(t) = y + ra(t) - c(t) \tag{14}$$

r 表示实际利率,假设为常数.

548 我们假定消费者的终身效用为[7]

$$U \equiv \int_0^T u[c(t)]e^{-\rho t}dt + \phi[a(T)]e^{-\rho T} \tag{15}$$

其中 $\rho > 0$ 是主观贴现率,而 $u(c)$表示消费的(瞬时)效用,ϕ 表示他或她的遗产的效用.这里 $u(c)$不应误认为是控制变量.假定函数 u 和 ϕ 单调递增且严格凹,即

$$u' > 0, u'' < 0, \phi' > 0, \text{及 } \phi'' < 0 \tag{16}$$

进一步假设

$$u'(0)=\infty \tag{17}$$

这意味着个人有一种强烈的避免低消费的驱动力.虽然遗产函数 ψ 也是特别为无限世代所安排的,但我们不讨论这个问题.因而我们的问题也许仅仅是说明性的,然而当前的设计便于比较当前情形和前面章节讨论的无限期界情形.

个人选择消费 $c(t)$ 的时间路径和最终财产 $a(T)$ 使终身效用 U 最大化,约束是资产积累方程(14),对所有 t,非负约束 $c(t)\geqq 0$,以及给定的他的初始财富价值,$a(0)=a_0$.显然,对这个问题面言,$a(T)$ 是状态变量,而 $c(t)$ 是控制变量.该问题的 Hamilton 函数可写为

$$\tilde{H}\equiv u[c(t)]e^{-\rho t}+p(t)[y+ra(t)-c(t)] \tag{18}$$

于是,惟一最优解的必要(且充分)条件为[8]

549

$$\dot{a}(t)=\partial\tilde{H}/\partial p,\text{即 }\dot{a}(t)=y+ra(t)-c(t) \tag{19}$$

$$\dot{p}(t)=-\partial\tilde{H}/\partial a,\text{即 }\dot{p}(t)=-p(t)r \tag{20}$$

$$\partial\tilde{H}/\partial c\leqq 0\text{ 且对每个 }t,(\partial\tilde{H}/\partial c)c(t)=0 \tag{21}$$

$$p(T)=\psi'(a_T)e^{-\rho T},\text{其中 }a_T\equiv a(T) \tag{22}$$

注意,(19)等同于(14).即,沿最优路径,约束(14)必被满足.既然很明显(17)能保证对所有 t,$c(t)>0$,所以由(21)有

$$\partial\tilde{H}/\partial c=0,\text{即 }u'[c(t)]e^{-\rho t}=p(t) \tag{23}$$

这些结果的经济解释类似于前面讨论的无限期界问题中得到的经济含义.(23)式中,很明显 $p(t)$ 表示 t 时刻消费的边际效用的现值.由于在 t 时刻牺牲一单位消费(这将用于他或她的财富积累,储蓄)所造成的效用损失用 $u'[c(t)]$ 度量,且它的现值为 $u'[c(t)]e^{-\rho t}$.这样(23)意味着 $p(t)$ 表示积累(储蓄)的机会成本.另外注意(20)可改写为

$$\dot{p}(t)/p(t)=-r \tag{20'}$$

即 $-\dot{p}/p$ 等于来自于持有资产的回报率(即利率).回忆 $p(t)$ 的经济含义是储蓄的影子价格,于是(20′)表示跨时套利条件(对于一个特定的个人).

下面,定义 $q(t)$:

$$q(t)\equiv p(t)e^{\rho t},\text{所以 }p(t)=q(t)e^{-\rho t} \tag{24}$$

于是观察

$$\dot{p}=\dot{q}e^{-\rho t}-\rho qe^{-\rho t}=(\dot{q}-\rho q)e^{-\rho t}$$

所以

$$\dot{p}/p=\dot{q}/q-\rho \tag{25}$$

这样,(20)或(20′)可改写为

$$\dot{q}(t)/q(t)=\rho-r \tag{26}$$

550 由微分方程(26)得出 $q(t)$的显式

$$q(t)=q_0e^{(\rho-r)t},\text{其中 } q_0\equiv q(0) \tag{27}$$

因(22)可改写成 $q(T)=p(T)e^{\rho T}=\psi'(a_T)$,于是由(27)有

$$q_0e^{(\rho-r)T}=\psi'(a_T) \tag{28}$$

同样,(23)可改写成

$$u'[c(t)]=q(t) \tag{29}$$

注意,这意味着对所有 t,$q(t)>0$.

最优条件(20)、(21)及(22)现在可分别改写为(26)、(29)及(28),且(26)又可化为(27).这些和(14)或(19)一起表示最优路径.将 p 改换成 q 的程序同前面章节为得到定理 10.1 所使用的一样.如前所做,现值 Hamilton 函数定义成

$$H\equiv u[c(t)]+q(t)[y+ra(t)-c(t)] \tag{16'}$$

且我们可直接得出(26)、(29)及(28).

定义函数 ϕ 为 u'的反函数,则使用(27)可把(29)写成

$$c(t)=\phi[q_0e^{(\rho-r)t}],\text{这里 } \phi'=1/u''<0 \tag{30}$$

从(30)中可得出,个人在一生中增加(减少)他的消费量当且仅当实际利率大于(小于)他的主观贴现率.这一结论与前面讨论的无限期界问题的结论一致.对于有限期界问题,参见 Yaari(1964,309 页),在其中他排除了遗赠动机.注意如果 $r<\rho$,消费随时间单调递减.

接下来注意对(瞬时)预算方程(14)积分,可得

$$\int_0^T c(t)e^{-rt}dt+a_Te^{-rT}=a_0+\int_0^T ye^{-rt}dt \tag{31}$$

551 这表示个人的终身预算条件.对他或她一生中的**每一点**,要求这个条件相当于规定[9]

$$\int_0^t c(s)e^{-rs}ds+a(t)e^{-rt}=a_0+\int_0^t ye^{-rs}ds \tag{32}$$

(32)式中对 t 微分,得(14).

定义函数 Y 为

$$Y(y,r,a_0)\equiv a_0+\int_0^T ye^{-rt}dt=a_0+(1-e^{-rT})y/r \tag{33}$$

这里 Y 表示个人的"终身收入".从(33),我们马上可得我们所期望的

$$\partial Y/\partial a_0>0,\text{且}\partial Y/\partial y>0. \tag{34}$$

将(33)和(30)代入(31),我们可定义函数 a_T 为

$$\begin{aligned} a_T &= |Y(y,r,a_0)-\int_0^T \phi[q_0e^{(\rho-r)t}]e^{-rt}dt|e^{rT} \\ &\equiv a_T(q_0,y,a_0,\rho,r) \end{aligned} \tag{35}$$

则我们易得下列关系式:

$$\partial a_T/\partial q_0>0,\partial a_T/\partial y>0 \tag{36a}$$

$$\partial a_T/\partial a_0>0,\partial a_T/\partial \rho>0 \tag{36b}$$

为得到乘数 q_0 的初始值,我们通过(35)将(28)改写为

$$q_0=\psi'[a_T(q_0,y,a_0,\rho,r)]e^{(r-\rho)T}\equiv q_0(y,a_0,\rho,r) \tag{37}$$

于是由(36)有

$$\partial q_0/\partial y<0,\partial q_0/\partial a_0<0,\partial q_0/\partial \rho<0 \tag{38}$$

552 使用(37)中定义的 q_0 和(30),我们可以定义函数 ϕ^*

$$c(t)=\phi[q_0(y,a_0,\rho,r)e^{(\rho-r)t}]\equiv\phi^*(y,a_0,\rho,r,t) \tag{39}$$

因为 $\phi'<0$,我们可以从(38)得出结论:

$$\partial\phi^*/\partial y>0,\text{且}\partial\phi^*/\partial a_0>0 \tag{40}$$

因此,收入或初始财富的增加提高每个 t 的消费.

最后,我们通过假定个人没有遗赠动机来考虑这个问题.在这种情况中,我们可以要求

$$a(T)=0 \tag{41}$$

这意味着个人死时不能有负债[$a(T)\not<0$].除了(28)由(41)替代,其他的最优条件(14)、(26)和(29)仍然成立.因此,(31)也成立,而(35)应重写为

$$0=a_T(q_0,y,a_0,\rho,r) \tag{42}$$

对 q_0 解此方程,我们可定义函数 q_0^* 为

$$q_0=q_0^*(y,a_0,\rho,r) \tag{43}$$

然后,回顾(36),我们可以得到

$$\partial q_0^*/\partial y<0,\partial q_0^*/\partial a_0<0,\partial q_0^*/\partial \rho<0 \tag{38'}$$

将(43)代入(30),我们得到

$$c(t)=\phi[q_0^*(y,a_0,\rho,r)e^{(\rho-r)t}]\equiv\phi^*(y,a_0,\rho,r,t), \tag{39'}$$

这里,我们有

$$\partial\phi^*/\partial y>0,\partial\phi^*/\partial a_0>0 \tag{40'}$$

为得到对该问题的进一步认识,我们可显式地确定效用函数为

$$u(c)=\log c \tag{44}$$

553 在这种情况中,(30)可写为

$$c(t)=e^{(r-\rho)t}/q_0 \tag{45}$$

因此(35)写为

$$\begin{aligned} a_T &= [Y(y,a_0,r)-\frac{1}{q_0}\int_0^T e^{-\rho t}dt]e^{rt} \\ &= [Y(y,a_0,r)-(1-e^{-\rho T})/(\rho q_0)]e^{rT} \end{aligned} \tag{46}$$

我们考虑,没有遗赠动机和 a_T 确定为零的情况.方程(46)连同 $a_T=0$ 定义函数 q_0^* 为

$$q_0=(1-e^{-\rho T})/[\rho Y(y,a_0,r)]\equiv q_0^*(y,a_0,\rho,r)$$

将此代入(45),我们可定义函数 Φ^* 为

$$\begin{aligned} c(t) &= e^{(r-\rho)t}\rho Y/(1-e^{-\rho T}) \\ &\equiv \Phi^*(y,a_.,\rho,r),\text{其中 } Y=Y(y,a_0,r) \end{aligned} \tag{47}$$

然后回忆 $\partial Y/\partial y>0$ 和 $\partial Y/\partial a_0>0$,我们得到

$$\partial\Phi^*/\partial y>0,\partial\Phi^*/\partial a_0>0 \tag{48}$$

§11.3 等周长问题

古希腊提出了寻找包含了最大区域的给定长度的(平面上的)闭曲线.这个问题称为**等周长问题**.我们知道解是一个圆.事实上该问题可以被考虑为一个变分法问题,其中"给定长度"的约束得到一个积分形成的约束.因此,积分约束的变分问题常常称为等周长问题.以这种一般的形式解释这些问题,在经济学中就有了许多"等周长问题",因为积分约束常常出现在经济学问题中.这里我们不考虑这样的例子,而考虑真正的等周长问题,即,由古希腊人考虑的那种,我们考虑一个稍微退化的问题.我们将找到 (t,x) 坐标系中连接两点 $(0,0)$ 和 $(1,0)$ 的给定长度的曲线,它位于 t 轴上方且包括了在其自身和 t 轴之间的最大区域.即,我们希望找到曲线 $x(t)$,以

554 $$\text{Maximize} \quad \int_0^1 x(t)dt$$

约束条件为

$$\int_0^1 \sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt = a, \text{以及 } x(0)=0, x(1)-0 \tag{49}$$

这里的 t 显然不表示"时间".尽管这是古典变分法教材中的标准问题,可以用这种技术更简单地解决,[10]这里我们使用最优控制理论解决这个问题.这将说明如何使用最优控制技术来处理等周长问题.

为解决这个问题,我们定义 $u(t)$ 为 $u(t)\equiv\dot{x}(t)$,把该问题转化为 $u(t)$ 的最优控制问题,以便

$$\text{Maximize} \quad \int_0^1 x(t)\,dt$$

约束条件为

$$\dot{x}=u, \int_0^1 (a-\sqrt{1+u^2})\,dt=0 \tag{50}$$

以及(49).(下文)Hamilton 函数可确定为

$$L\equiv x(t)+p(t)u(t)+\lambda[a-\sqrt{1+u(t)^2}] \tag{51}$$

这里 p 和 λ 是乘子,λ 是独立于 t 的常数.

555 此问题最优的必要条件可写为[12].

$$\dot{x}=\partial L/\partial p, \text{即 } \dot{x}=u \tag{52a}$$

$$\dot{p}=-\partial L/\partial x, \text{即 } \dot{p}=-1 \tag{52b}$$

$$\partial L/\partial u=0, \text{即 } p=\lambda u/\sqrt{1+u^2} \tag{52c}$$

以及(49).结合(52b)和(52c),我们得到

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\lambda u}{\sqrt{1+u^2}}\right)=-1$$

可积分为

$$\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{c_1-t}{\lambda} \tag{53}$$

这里,c_1 是积分常数.回忆 $u=\dot{x}(t)$,再积分(53),我们得到

$$(t-c_1)^2+(x-c_2)^2=\lambda^2 \tag{54}$$

不必说,(54)是中心在(c_1,c_2),半径为 λ 的圆的方程.注意,当 $a<1$ 时,问题的解不存在(见图 11.1).因此我们必须要求 $a\geqq 1$.进一步,当 $a>\frac{\pi}{2}$ 时,弧不再停留在 $t\in[0,1]$,而是延伸进了 $t<0$ 和 $t>1$ 的区域,此时上面的积分失去了它们的意义.即,我们要求

$$1\leqq a\leqq \pi/2$$

我们可以在图 11.1 中展示当前问题对 a 的不同值的解.

(54)中的常数 c_1 和 c_2 可通过将边界条件 $x(0)=0$ 和 $x(1)=0$ 代入(54)而决定.它们满足方程

$$c_1^2+c_2^2=\lambda^2,(1-c_1)^2+c_2^2=\lambda^2$$

556 因此,我们有

$$c_1=1/2,c_2=\sqrt{\lambda^2-1/4}$$

从(52c)和(53),我们可以计算

$$p=-(t-1/2)$$

这里我们可使用 $c_1=1/2$.另外,(54)的微分得到

$$u=-(t-c_1)/(x-c_2)$$

这里回想 $\dot{x}=u$ 和 λ 为常数.将此代入(53),且由(54)得

$$\sqrt{1+u^2}=\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-(t-c_1)^2}} \tag{55}$$

在[0,1]区间积分上式,并用(50),我们可决定 λ 值,由此即可决定 c_2 的值.[13]

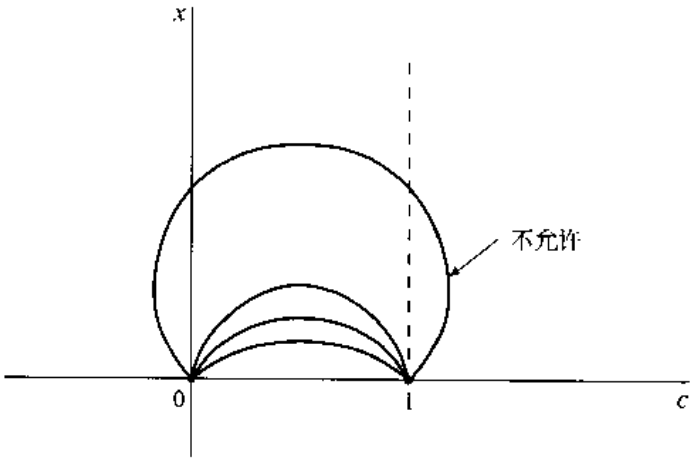


图 11.1 等周长问题

§ 11.4 空间定价问题

557 在最优控制论中,虽然 t 常用来表示"时间",但正如前面章节所表明的,并不一定是这样.在经济应用中,在闭联集交易者模型中,变量 t 可表示"t 先生",在税收模型中,t 可为"收入"等等,这样的一些应用可参见 El-Hodiri (1971,22~26 页)和 Mirrlees(1971).这里我们将使用空间定价问题作为这样

的例子，在这个例子中，t 表示“地点 t”. 我们考虑一下垄断竞争性公司的利润最大化和福利最大化问题.[14]

考虑一个垄断竞争公司，其产品在离公司距离为 T 的有限范围内售完. 这个公司受到两种成本的制约：生产成本和运输成本. 令 $\tau(t)$ 代表单位运输成本，其中 t 表示出售地到公司的距离. 假设 $\tau(0)=0$，令 $p(t)$ 表示产品在位置 t 的交货价格，且 $y[p(t)]$ 为需求函数及假设 $y'(=dy/dp)<0$. 公司根据不同的地点给出不同的价格，这意味着实行价格歧视. 假定这种价格歧视在经济上和制度上是可行的. 令 $Y(T)$ 表示在整个市场空间上卖出的总数量. 即，它定义为

$$Y(T)=\int_0^T y[p(t)]dt \tag{56}$$

这里，T 表示市场边界至公司的距离. 虽然将 T 视作一个经济变量更适意，我们在这里简单假定它由制度或物理上的原因决定，有了总产出 $Y(T)$，我们用 $C[Y(T)]$ 代表总生产成本. 不必说，总产出（等于总需求的数量）决定于公司在其市场空间上的定价政策 $p(t)$.

公司选择 $p(t)$，以最大化在其市场空间上的总利润，

$$\pi=\int_0^T \{p(t)y[p(t)]-\tau(t)y[p(t)]\}dt-C[Y(T)]$$

约束条件为

$$\dot{Y}(t)=y[p(t)] \tag{57}$$

我们注意到，关于 T 微分(56)得到(57)，在$[0,T]$上积分(57)得到(56). 这是一个最优控制问题，其中 $Y(t)$ 是状态变量且 $p(t)$ 是控制变量.

为便于解此问题，我们考虑逆需求函数

$$p(t)=P[y(t)] \tag{58}$$

这里 P 是 $y(p)$ 的反函数，因此 $P'\equiv dP/dy=1/y'<0$. 有了这个，选择 $p(t)$ 的问题转化为选择 $y(t)$，以便最大化

$$\pi=\int_0^T \{P[y(t)]y(t)-\tau(t)y(t)\}dt-C[Y(T)]$$

约束条件为

$$\dot{Y}(t)=y(t)$$

的问题. 这里，状态变量和控制变量分别是 $Y(t)$ 和 $y(t)$. 于是这个问题的 Hamilton 函数可定义成

$$H\equiv P[y(t)]y(t)-\tau(t)y(t)+q(t)y(t) \tag{59}$$

其中 $q(t)$ 是与约束(57)，$\dot{Y}=y$ 相关的乘数. 这样，该问题的内部解的必要条件可写为[15]

$$\dot{Y}=\partial H/\partial q, \text{即 } \dot{Y}(t)=y(t) \tag{60a}$$

$$\dot{q} = -\partial H / \partial Y, \text{即 } \dot{q}(t) = 0 \tag{60b}$$

$$\partial H / \partial y = 0, \text{即 } P'y + P - \tau + q - 0 \tag{60c}$$

$$-C'[Y(T)] - q(T), \text{这里 } C' \equiv dC/dY \tag{60d}$$

559 注意,(60d)对应于(9),表示当前问题的横截条件.

从(60b)及(60d)中,立即得到

$$\text{对所有 } t, q(t) = \text{常数} = -c^* \tag{61}$$

其中在最优处,$c^* \equiv C'[Y(T)]$.乘子 $q(t)$在任何位置是常数且表示边际生产成本的负数.注意$(P'y + P)$表示位置 t 的市场的边际收入,以 $MR(t)$记之.再由方程(60c)推出

$$MR(t) = \tau(t) + c^* \tag{62}$$

这里上式右边是运输和生产的边际总成本.当运输成本被忽视时,即,$\tau(t) \equiv 0$,(62)化为熟悉的"无空间垄断"的规则 $MR = MC$,这里 MC 仅指边际生产成本,即,(62)是通常的 $MR = MC$ 规则对空间垄断情形的一个扩展.

为进一步分析问题,定义在位置 t 的市场的需求弹性 $\eta(t)$为

$$\eta(t) \equiv \cdot y'P/y, \text{所以 } \eta(t) = -P/(P'y) > 0 \tag{63}$$

即,η 表示通常的需求弹性,需求数量的百分比变动对价格的百分比变动的比率.由(60c)、(61)及(63)可得

$$p(t) = \frac{\tau(t) + c^*}{1 - 1/\eta(t)} \tag{64}$$

为得到对所有 t 有 $p(t) > 0$,这里要求[16]

$$\text{对所有 } t, \text{有 } 1 - 1/\eta(t) > 0 \tag{65}$$

560 由(65),对所有 t,$0 < 1/\eta(t) < 1$.如果我们与通常的价格理论教科书一样忽视运输成本,(64)将化为

$$p(t) = \frac{c^*}{1 - 1/\eta(t)} \tag{66}$$

公司在需求弹性低的市场上将索取更高价格,即

$$\text{只要 } \eta(t_0) > \eta(t_1), \text{就有 } p(t_0) < p(t_1) \tag{67}$$

这是价格歧视理论中的标准结论,方程(64)是这种著名的结论在空间垄断情形上的推广.

假设对所有 t,$\eta(t) =$ 常数,此时,$p(t)$是 $\tau(t)$的简单线性函数,这一点由图 11.2(a)说明,公司在本地的产品价格显然是 $p(0)$.如果 $\eta =$ 常数,假定 $\tau(0) = 0$,就有 $p(0) = c^*/(1 - 1/\eta)$.所以有

$$p(t)-p(0)=\frac{\tau(t)}{1-1/\eta}>\tau(t) \tag{68}$$

该不等式表明公司所要的运输成本，$p(t)-p(0)$，高于实际发生的运输成本 $\tau(t)$. 这一点由图 11.2(b)说明.

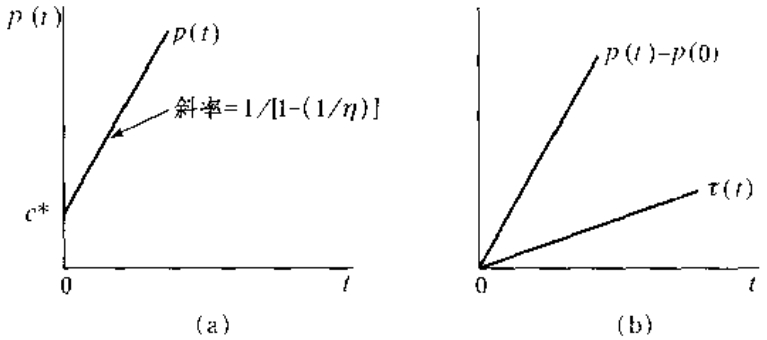


图 11.2　空间垄断的定价策略：需求弹性为常数的情形

微分(64)，且令 $\epsilon(t)\equiv 1/\eta(t)$，得

$$\dot{p}(t)=(\tau'+p\epsilon')/(1-\epsilon) \tag{69}$$

这里 $\tau'\equiv d\tau/dt$ 及 $\epsilon'\equiv d\epsilon/dt$. 因由(65)有 $1-\epsilon>0$，所以从(69)中可得出 $\dot{p}>0$ 的充要条件(即，交货价格随离公司的距离的增大而增大)为

$$\tau'+p\epsilon'>0 \tag{70}$$

对所有 t，假定 $\tau'>0$ 是合理的，即运输成本随离公司的距离的增大而增大. 于是 $\dot{p}>0$ 的一个充分条件为

$$\epsilon'\geqq 0,\text{即 } \eta'\leqq 0 \tag{71}$$

其中 $\eta'\equiv d\eta/dt$. 这样，如果需求弹性在任何位置都是常数，或随距离的增大而减小，则公司将对离公司越远的顾客要越高的价格(即，$\dot{p}>0$). Greenhut 和
561 Qhta(1975，94 页)认为，“弹性递减的需求曲线从经验上讲很可能是最现实的曲线”，但他们没有提供任何有关的实证研究来支持他们的论断.

另一方面，如果我们允许 $\eta'>0$ 可能性，则 $\dot{p}<0$ 这种矛盾现象就会出现. 如果需求弹性随距离的增大而增大，则公司对离得越远的顾客要越低的价格是可能的. 然而，这个“矛盾”是不难理解的. 对于忽略运输成本的情形，由于据假设需求弹性越远越大(即，$\eta'>0$)，则对于越远的顾客，价格应该越低. 这对应于一般的价格歧视情形. 不用说，运输成本是显著的，且它随距离的增大而增大.

当由于需求弹性的增加引起的价格降低比运输成本的增加更重要时，这个矛盾(或确切地，反面情形)就会出现. 这使我们想起国际贸易中的倾销理论，这里“倾销”指与本国市场比较起来在国外市场实行更低的价格. 当本国产

品的需求弹性在国外市场比国内市场更富有弹性时，倾销就能发生.[17]

562 最后，我们研究这个空间垄断者被要求实现“社会福利”最大化的情形.假定社会福利由消费者在整个市场空间上的剩余加上公司利润来度量.回忆 $p(t)=P[y(t)]$ 表示反需求曲线，曲线下的区域由 $F(y)$ 表示，

$$F(y)\equiv\int_0^y P(y^*)dy^* \tag{72}$$

则整个社会福利为

$$W\equiv\int_0^T \{F[y(t)]-\tau(t)y(t)\}dt-C[Y(T)] \tag{73}$$

公司在限制为 $\dot{Y}(t)=y(t)$ 下被要求选择 $y(t)$，以使 W 达到最大.

为解决这个问题，定义 Hamilton 函数 H 为

$$H\equiv F[y(t)]-\tau(t)y(t)+q(t)y(t) \tag{74}$$

其中 $q(t)$ 是当前最大化问题的乘子，应与前面讨论过的利润最大化公司中的 $q(t)$ 区分开来.问题有内解的必要条件为

$$\dot{Y}=\partial H/\partial q，即\ \dot{Y}(t)=y(t) \tag{75a}$$

$$\dot{q}=-\partial H/\partial Y，即\ \dot{q}=0 \tag{75b}$$

$$\partial H/\partial y=0，即\ F'[y(t)]-\tau(t)+q(t)=0 \tag{75c}$$

$$-C'[Y(T)]=q(T) \tag{75d}$$

如果需求曲线向下倾斜，即 $P'(y)<0$，则这些条件也是最优解的充分条件.

563 由(75b)和(75d)，可得

$$q(t)=常数=-c^*，这里\ c^*\equiv C'[Y(T)] \tag{76}$$

这与利润最大化公司问题中得到的条件相同，即(61)式.由(72)中对 F 的定义，注意到 $F'(y)=P(y)=p(t)$.所以，由(75c)和(76)，可得

$$p(t)=\tau(t)+c^* \tag{77}$$

最优交货价格(从社会福利观点看的最优解)等于运输成本加上生产的 $MC(c^*)$.由 $\tau(0)=0$，有 $p(0)=c^*$.这样公司本地的价格等于 c^*，这与“无空间”垄断(社会福利最大化)下所得到的边际成本定价结果一致.交货价与运输成本之差，$p(t)-\tau(t)$ 叫做工厂价.(77)说明对于福利最大化公司，工厂价是常数且等于产品的 MC.公司向顾客所要的运输成本，$p(t)-p(0)$，将恰好等于实际运输成本 $\tau(t)$.而且，由(65)可观察

$$\frac{\tau(t)+c^*}{1-1/\eta(t)}>\tau(t)+c^* \tag{78}$$

所以，如果 c^* 是常数，与福利最大化公司比较起来，利润最大化公司情形在同一地点所要的交货价格要高些.

事实上，公司经常被允许有追求个人利润最大化的动机，然而向顾客索要

的运输成本被规定为实际运输成本，所以工厂价必须保持固定，这种要求就称为工厂定价.要求公司接受

$$p(t)-m=\tau(t) \tag{79}$$

也就是，$p(t)=m+\tau(t)$，其中 $m=p(0)$表示工厂价.在这种情形下，公司的利润函数为

$$\begin{aligned}\pi &= \int_0^T \{P[y(t)]y(t)-\tau(t)y(t)\}dt - C[Y(T)] \\ &= \int_0^T my(t)dt - C[Y(T)]\end{aligned} \tag{80}$$

564 现在考虑问题：选择 $y(t)$，使 π 最大，其中约束为 $\dot{Y}=y$.同样，定义 Hamilton 函数 H 为

$$H\equiv my(t)+q(t)y(t) \tag{81}$$

其中 $q(t)$是该问题的乘数.问题有内解的必要(且充分)条件为

$$\dot{Y}=\partial H/\partial q,\text{即 } \dot{Y}(t)=y(t) \tag{82a}$$

$$\dot{p}=-\partial H/\partial Y,\text{即 } \dot{q}(t)=0 \tag{82b}$$

$$\partial H/\partial y=0,\text{即 } m+q(t)=0 \text{ 和} \tag{82c}$$

$$-C'[Y(T)]=q(T) \tag{82d}$$

从(82)易得

$$-q(t)=c^*=m \tag{83}$$

其中 $c^*\equiv C'[Y(T)]$对所有 t 均为常数.将(83)代入(79)有

$$p(t)=\tau(t)+c^* \tag{84}$$

这正好与从(77)中得到的福利最大化公司的价格政策相同.当前的管制方法，即，工厂定价，在令 $m=c^*$ 的条件下也实现了社会最优.$m=c^*$ 规则表明工厂价格等于生产的边际成本.所以它是边际成本定价规则的一个应用.

11.4 节附录：空间定价问题与非线性规则

在本附录中，我们将表明在 11.4 中通过最优控制公式得到的结果实际由第二章所阐述的通常的非线性规划很容易得到.[18]于是，这说明了非线性规划和最优控制理论这两种重要的工具是紧密相关的，只不过是我们在分析特
565 定经济问题时需考虑使用哪种工具更为方便.

考虑一个垄断公司将产品出售到 n 个划分明确的地区市场.令 p_i 表示第 i 个市场的交货价格，令 y_i 表示第 i 个市场的产品需求($i=1,2,\cdots,n$).反需

求函数为 $p_i(y_i)$，其中 $p'_i \equiv dp_i/dy_i < 0$（向下倾斜的需求曲线），令 τ_i 表示第 i 个市场的单位运输成本.

于是公司的总利润为

$$\pi \equiv \sum_{i=1}^{n} [R_i(y_i) - \tau_i y_i] - C\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) \tag{85}$$

其中 $R_i(y_i) \equiv p_i(y_i) y_i$，且 C 表示总成本函数. 假设公司使利润 π 达到最大. 设在最优点 $y_i > 0$ 对于所有的 i 成立，则利润最大化条件为

$$\partial \pi / \partial y_i = 0, \text{即 } R'_i = \tau_i + c^*, i = 1, 2, \cdots, n \tag{86}$$

其中 $c^* = C'\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$ 最优点赋值，且 $R'_i \equiv dR_i/dy_i$. 这条件简单地表明对每个市场来说，MR 等于运输和生产的 MC. 通常的 $MR = MC$ 规则是(86)的特殊情形，即对所有的 i，$\tau_i \equiv 0$.

定义第 i 个市场的需求弹性为

$$\eta_i \equiv -(dy_i/dp_i)(p_i/y_i) = -p_i/(P'_i y_i) > 0$$

将(86)改写为

$$p_i = \frac{\tau_i + c^*}{1 - \varepsilon_i}, \text{其中 } \varepsilon_i = 1/\eta_i, i = 1, 2, \cdots, n \tag{87}$$

注意到对每个 i，$p_i > 0$ 要求有

$$1 - \varepsilon_i > 0 \tag{88}$$

因此 $0 < \varepsilon_i < 1$. 这个条件($1 - \varepsilon_i > 0$)与要求第 i 个市场的 MR 为正是一致的. 若我们像普遍价格理论教科书中的情形那样忽略运输费用，则(87)可化为

$$p_i = c^*/(1 - \varepsilon_i) \tag{87'}$$

566 由此易得

$$\text{只要 } \eta_i < \eta_j, p_i > p_j \tag{89}$$

这表明公司将在需求弹性更低的市场上索取更高价格. 正如前面所提到的，这是价格歧视理论中的标准结论.

假如每个地区的需求弹性相同，那么，对所有 i 有 $\eta_i = \eta$（所以 $\varepsilon_i = \varepsilon$），则由(87)和(88)可得

$$p_i - p_0 = \tau_i/(1 - \varepsilon) > \tau_i, i = 1, 2, \cdots, n \tag{90}$$

这里 $p_0 \equiv c^*/(1 - \varepsilon)$. 假设在公司所在地 $\tau_i = 0$. 于是设 $\tau_i = 0$，从(87)可得 p_0 的值. (90)中的不等式指明公司索取的运输费用，$p_i - p_0$，高于实际投入的运输成本(τ_i).

现在回到不同市场有不同需求弹性的情形，由(87)，通过简单计算可得

$$\text{对所有 } i,j,\ p_j - p_i = \frac{[(1-\varepsilon_i)\Delta\tau + (c' + \tau_i)\Delta\varepsilon]}{(1-\varepsilon_i)(1-\varepsilon_j)} \tag{91}$$

其中 $\Delta\tau \equiv \tau_j - \tau_i$ 及 $\Delta\varepsilon \equiv \varepsilon_j - \varepsilon_i$. 假定第 j 市场到公司的距离远于第 i 市场，即 $\Delta\tau > 0$. 于是由(91)，我们可马上得到

$$\text{如果 } \eta_i \leqq \eta_i,\ p_j - p_i > 0 \tag{92}$$

这里注意到 $\eta_j \leqq \eta_i$ 蕴含 $\Delta\varepsilon \geqq 0$. 即，如果需求弹性在各处均为常数，或随距离增大而减少，则公司将对更远离公司的顾客索取更高的交货价格.

如果有需求弹性随距离增大而增大的可能，则“矛盾”现象将出现；即这种情形下，公司可能向距离越远的顾客索取越低的价格. 然而，这是不难理解的. 对于忽略运输成本的情形，公司对距离远但弹性大的顾客应该索取低价. 另一方面，运输成本可以很显著，且它随距离的增大而增大. 这个“矛盾”出现在由需求弹性增加引起的价格降低比运输成本的增加更重要时. 同样，这个结果类
567 似于国际贸易中的“倾销”行为，即公司发现制定对国内顾客歧视并有利于外国顾客的价格是有利可图的. 如前所述(见注释[17])，这种倾销，虽然在国内是允许的，但在国际上是禁止的.

现在假定该公司被要求实现“社会福利”最大化，其中社会福利是由消费者在整个市场上的剩余，加上公司利润来度量的. 第 i 条需求曲线下方区域为

$$F_i(y_i) \equiv \int_0^{y_i} p(y_i^*)\,dy_i^* \tag{93}$$

于是，总社会福利由

$$W = \sum_{i=1}^{n}[F_i(y_i) - \tau_i y_i] - C\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) \tag{94}$$

度量. 公司要求选择 y_i(这等同于选择 p_i)，以使 W 最大化.

再假定在最优点，对所有的 i，有 $y_i > 0$. 则最优状态的必要条件为

$$\partial W / \partial y_i = 0,\text{即 } p_i = \tau_i + c^*,\ i = 1,2,\cdots,n \tag{95}$$

这里 $F'_i = p_i$. 因为据假设有 $p'_i < 0$，W 关于每个 y 凹，所以(95)也是全局最大化的充分条件. 条件(95)表明最优交货价格(从社会福利角度的最优)等于运输成本(τ_i)加上边际生产成本(c^*). 注意到对于福利最大化垄断的公司，本地的交货价格由令 $\tau_i = 0$ 得到，即 $p_0 = c^*$. 这与“无空间垄断”的边际成本定价结论相同. 因为据(88)有 $0 < \varepsilon_i < 1$，我们有

$$(\tau_i + c^*)/(1 - \varepsilon_i) > \tau_i + c^* \tag{96}$$

这里我们假定产出的 $MC(c^*)$ 是常数. 根据(87)及(95)，(96)表明利润最大化公司与福利最大化公司比较起来，对同一市场索取的价格要高.

实际上，公司常常被允许追求个人利润，然而向顾客索取的运输成本应规
568 定为实际运输费用 τ_i，所以交货价格和运输成本的差，$p_i - \tau_i$(这是工厂价格)应保持固定. 即，公司必须接受

$$p_i - m - \tau_i \tag{97}$$

(即 $p_i = m + \tau_i$),这里 m 表示工厂价格.在工厂定价情形下,公司的利润函数(85)可改写为

$$\begin{aligned}\pi &= \sum_{i=1}^{n}[(m+\tau_i)y_i - \tau_i y_i] \quad C\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) \\ &= mY - C(Y)\end{aligned} \tag{98}$$

此处 $Y = \sum_{i=1}^{n} y_i$,公司选择 y_i 以使 π 最大.

再假定在最优点 $y_i > 0$,则最优条件可写成

$$m = C'(Y) \tag{99}$$

由(97),该条件与福利最大化公司的条件(95)相同.如果工厂价格被设定等于生产边际成本,则工厂定价实现社会最优.

▶ 注　释

[1]本章节选自 Takayama(1978).

[2]本定理的证明在 Takayama(1985,660～664 页)中得到,函数 $g_1, \cdots, g_m$ 的凹性可放宽至拟凹性.

[3]为得到(10),首先利用(4)、(5)和(6)观察

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= L_x \cdot \dot{x} + L_u \cdot \dot{u} + L_t + L_p \cdot \dot{p} + L_q \cdot \dot{q} \\ &= L_x \cdot f + L_t - f \cdot L_x + g \cdot \dot{q} = L_t + g \cdot \dot{q}\end{aligned} \tag{10'}$$

这里,L_x,L_u,L_p 和 L_q 表示 L 关于 x,u,p 和 q 的梯度向量,且 $L_t \equiv \partial L/\partial t$.如果 $g_j = 0$,则 $g_j \dot{q}_j = 0$.另一方面,如果在一些区间上 $g_j > 0$,则由条件(7)中 $g_j q_j = 0$ 推出 $q_j = 0$(常数),故 $g \cdot \dot{q} = 0$.那么,从(10′)有 $dL/dt = \partial L/\partial t$.

[4]如果我们加上星号(*)来代表[$x(t)$,$u(t)$]的最优轨迹和乘数的相应指定,这可以更清楚地表述为

对所有满足 $g_j[x^*(t), u(t), t] \geqq 0, j = 1,2,\cdots,m'$ 和 $g_j[x^*(t), u(t), t] = 0, j = m'+1, \cdots, m$ 的 $u(t) \in U$,有

$$\begin{aligned}&H[x^*(t), u^*(t), t, p^*., p^*(t), \lambda^*] \\ &\geqq H[x^*(t), u(t), t, p^*., p^*(t), \lambda^*]\end{aligned} \tag{11'}$$

[5]这个问题首先是由 Yaari(1994)讨论.他并没有使用最优控制论.由于 Yaari 先驱性的工作,现在已有很多这个问题的推论.无限期界形成已在第 10 章讨论过.现在的表述形式主要受到 Hu(1978)方法的影响,它提供了该问题

在社会保障问题中的重要应用.同样可参见 Phillip(1974).

[6]注意 $a(t)$可以是负的.负的 $a(t)$代表净债务.另外,注意通过允许借钱的可能性(14),隐含地假定消费者的贷款利率和借款利率是相同的.文献中常见这个假设的放宽.

[7]在(15)的上下文中会产生一个问题,是否个人在时间 T 死亡时会留下一笔数量为负的资产,即 $a(T)$是否为负.如果他的孩子或其他人愿支付其债务,且如果他不介意这个,则 $a(T)$可以是负的.$a(T)$是否为负的问题包含在函数 ψ 中.这样一个表述的困难在于债务的数量可以是任意的或因人而异的.

[8]充分性来自于 u 的严格凹性和(14)右边的线性.u 的严格凹性保证了最优路径的惟一性.

[9]由于 $a(t)$是负的,这个要求不像它听起来那么严格.则 $a(T)>0$ 不是最优的,因为一个人总可通过使 $a(T)=0$ 来增加消费(由此增加满足).

[10]有关等周长问题经典的变分法表述,参见 Gelfand 和 Fomin(1963); Hedley 和 Kemp(1971)和 Simmons(1972).

[11]替代(50)式,我们也可考虑不等式限制条件

$$\int_0^1 (a \quad \sqrt{1+u^2})dt \geqq 0 \tag{50'}$$

在这个情况下,曲线要求不得超过给定的长度 a.定理 11.1 使我们能研究这个问题.如我们期望的,它的解与由(50)给出的相同.

[12]由于在当前问题中终止端点被指明为 $x(1)=0$,我们没有横截条件.

[13](55)的右边的积分得到

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}dz = \arcsin z$$

这里 $z=(t-1/2)\lambda$.

[14]这一节的分析可依据非线性规划理论以更简单的方式进行(参见本节的附录).现在的分析只是为了说明;我们希望阐明 11.1 节中提出的普遍性定理能应用到经济学的不同分支中去.本节也摘自 Takayama(1978).这个讲稿注释的撰写受到与 Mark Fratrik 谈话的启发.

[15]假定总收益函数(除去运输费用后的净值),$[p(y)y-ty]$关于 y 是凹的,成本函数 C 关于 Y 是凹的,这一套必要条件也是最优的充分条件.如果这两个函数中任一个是严格凹的,则最优解是惟一的.

[16]弹性条件,$1-1/\eta>0$(或等价地,$\eta>1$),是对于一个垄断公司所要求的通常条件.易证明这个条件等价于要求边际收益在最优处必须是正的条件.

[17]实际上,为证明在此种情形中倾销是有利的,我们不必用到最优控制理论.只用考虑两个市场就足够了,国内和国外.(不必说,虽然在一国内不同地区间的价格歧视是允许的,倾销在国际上是禁止的.)为比较在倾销定义上的本国和国外价格,国外价格通常定义为 FOB 价,它不包括国内外市场之间的运输费用(也不包括运输保险费).

[18]这个附录再次来自于 Takayama(1978).

参考文献

El-Hodiri, M. A. 1971. *Constrained Extrema: Introduction to the Differentiable Case with Economic Applications*. Berlin: Springer Verlag.

Funk, J. E., and E. G. Gilbert. 1970. "Some Sufficiency Conditions for Optimality in Control Problems with State Space Constraints." *SIAM Journal on Control* 8 (November): 498 - 504.

Gelfand, I. M., and S. V. Fomin. 1963. *Calculus of Variations*. Trans. from the Russian original by R. A. Silverman. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.

Greenhut, M. L., and H. Ohta. 1975. *Theory of Spatial Pricing and Market Areas*. Durham, N.C.: Duke University Press.

Hadley, G., and M. C. Kemp. 1971. *Variational Methods in Economics*. Amsterdam: North-Holland.

Hestenes, M. R. 1965. "On Variational Theory and Optimal Control Theory." *SIAM Journal on Control* 3 (September): 23 - 48.

569 _____. 1966. *Calculus of Variations and Optimal Control Theory*. New York: Wiley.

Hu, S. C. 1978. "On the Dynamic Behavior of the Consumer and the Optimality Provision of Social Security." *Review of Economic Studies* 14 (October): 437 - 45.

Mirrlees, J. A. 1971. "An Exploration in the Theory of Optimum Income Taxation." *Review of Economic Studies* 38 (February): 175 - 208.

Phillip, L. 1974. *Applied Consumption Analysis*, Amsterdam: North-Holland. See esp. chap. 10.

Russak, B. 1970. "On Problems with Bounded State Variables." *Journal of Optimization Theory and Applications* 5 (February): 114 - 57.

Seierstad, A., and K. Sydsaeter. 1977. "Sufficient Conditions in Optimal Control Theory." *International Economic Review* 18 (June): 367 - 91.

Simmons, G. F. 1972. *Differential Equations*. New York: McGraw-Hill.

Takayama, A. 1978. "Optimal Control Themes: Part II." Lecture notes. Texas A & M University.

_____. 1985. *Mathematical Economics*. 2d ed. New York: Cambridge University Press.

Yaari, M. E. 1964. "On the Consumer's Lifetime Allocation Process." *International Economic Review* 5 (September): 304 - 17.

附录A　线性代数基本原理

573　线性代数或矩阵代数是经济理论分析中非常有用的工具．它也在计量经济学中被广泛应用．在本附录中，我们集中了这个专题的一些基础问题，特别是那些在经济理论中被运用的方面．虽然本书未曾用到所有资料，这里的资料旨在提供一个线性代数工具的有用总结．

§A.1　矩阵和基本运算

令 $a_{ij}\in R, i=1,2,\cdots,m, j=1,2,\cdots,n$，考虑如下 a_{ij} 按一定顺序给出的矩形列阵

$$A\equiv\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

或简单地写为 $A\equiv[a_{ij}]$．这样的一个列阵称为 **$m\times n$ 阶矩阵(在实数域上)**．a_{ij} 可以是复数，但是，本书中我们假定 a_{ij} 都是实数．如果两个矩阵同阶且对所

有 i 和 j，$a_{ij}=b_{ij}$，则我们称 A 和 B **相等**(用 $A=B$ 表示)。如果 $m=n$，则矩阵 A 称为**方阵**。设 $A=[a_{ij}]$ 和 $B=[b_{ij}]$ 是同阶矩阵。我们用元素方式的加法定义两个矩阵的**和**(或**加**)，即，如果 $C=[c_{ij}]$ 代表两个矩阵 A 和 B 的和($C=A+B$)，那么 C 由

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}, \text{对所有 } i \text{ 和 } j \tag{1}$$

574 得到。令 α 为一实数。我们以元素相乘定义**矩阵的数乘**，即

$$\alpha A=[\alpha a_{ij}], \text{其中 } A=[a_{ij}] \tag{2}$$

例如，如果 $\alpha=3$，且 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$，则

$$3A=\begin{bmatrix}3 & 6\\ 9 & 12\end{bmatrix}$$

从(1)和(2)，则两个矩阵 A 和 B 的差，以 $C=A-B$ 表示，可由下式得：

$$c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}, \text{对所有 } i \text{ 和 } j$$

令 A，B 和 C 是同阶的三个矩阵，令 α、β 为数。给定(1)和(2)的加法和数乘规则，我们易有

$$A+B=B+A(\text{交换律}) \tag{3}$$

$$(A+B)+C=A+(B+C)(\text{结合律}) \tag{4}$$

$$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B(\text{分配律}) \tag{5}$$

$$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A(\text{分配律}) \tag{6}$$

如果矩阵 A 的所有元素皆为零，我们称 A 为**零矩阵**。我们简单地以 0 表示零矩阵，即我们使用与数 0(或向量 0)相同的符号。由于 0 的意义从上下文来看通常是明显的，因而不会产生混淆。由加法(1)，对零矩阵 0，我们有

$$A+0=0+A \tag{7}$$

考虑实数域上所有 $n\times n$(方)阵的集合 S。易见 S 在由(1)定义的加法下是封闭的。另外，从(3)到(7)，易证 S 满足一个线性空间的所有定义性质，故而 S 是一个线性空间。

我们在定理 A.1 中总结一些结论。

575 **【定理 A.1】** 由方程(1)和(2)分别定义(矩阵)的加法和数乘规则，然后我们有性质(3)到(7)，这里涉及到的矩阵不必是方阵，但必须是同阶的。特别地，同阶的所有方阵的集合构成一个线性空间。

矩阵乘法

我们现在定义两个矩阵的乘法。设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times k$ 矩阵。那

么两者的积，即矩阵 $C=AB$，是一个 $m\times k$ 矩阵，其第(i,h)位置元素定义为

$$c_{ih}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jh},\ i=1,2,\cdots,m,\ h=1,2,\cdots,k \tag{8}$$

也就是说，乘积矩阵的第(i,h)位置元素由第一个矩阵 A 的第 i 行元素与第二个矩阵 B 的第 j 列对应的元素依次相乘，然后将所有项相加，这是矩阵乘法. 当且仅当 A 的列数等于 B 的行数时，乘法规则才是可行的. 例如，如果

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix}\text{ 和 }B=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\\ b_{31} & b_{32}\end{bmatrix}$$

那么 AB 是一个 2×2 矩阵，即

$$AB=\begin{bmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}\end{bmatrix}$$

为使矩阵乘法有意义，第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数，有可能使我们只能定义乘积 AB，却不能定义乘积 BA. 另一方面，如果两个矩阵是 $m\times n$ 阶和 $n\times m$ 阶的，则 AB 和 BA 都存在. 显然，如果 $m\neq n$，AB 和 BA 有不同的阶，故若 $m\neq n$，则 $AB\neq BA$. 如果两个矩阵都是方阵且同阶，那么两个乘积 AB 和 BA 都存在，且同阶，但不会必然是相等的. 在线性代数教材中给出了许多这样的例子. 以下的例子出自 Gantmacher(1959, I, 第 7 页).

576

【例 A.1】

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 3 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & -2\\ 18 & -4\end{bmatrix},\text{但}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

也就是说，一般情况下 $AB\neq BA$；那就意味着，矩阵乘法是不可交换的. 在矩阵乘积 AB 中，A 称为**前乘数**，B 称为**后乘数**. 如果 $AB=BA$，那么矩阵 A 和 B 称为**可换的**或**互换的**. 从矩阵乘法(8)可直接得到下面的关系式：

$$(AB)C=A(BC)\ \text{（结合律）} \tag{9}$$

$$A(B+C)=AB+AC\ \text{（分配律）} \tag{10}$$

$$(A+B)C=AC+BC\ \text{（分配律）} \tag{11}$$

令 $A=[a_{ij}]$为一个方阵，A 被称为是**对称矩阵**，如果对所有 i 和 j 有 $a_{ij}=a_{ji}$. 如果 A 的非对角元素都是零，则 A 称为对角矩阵，即对所有 $i\neq j$ 有 $a_{ij}=0$. 显然，所有的对角矩阵都是对称的. 如果一个对角矩阵的对角元素都等于 1，则其称为**单位矩阵**(我们以 I 表示). 虽然我们不明显地确定 I 的阶，但根据上下文，这是显而易见的. 例如，如果 A 是个 $n\times n$ 矩阵，那么 AI 中的 I 亦是 $n\times n$ 矩阵. 对于单位矩阵，我们有

$$AI=IA=A \tag{12}$$

§A.2 转置、向量、联立方程组和非奇异矩阵

一个矩阵 A(不必是方阵)的**转置**定义为由 A 的行列互换所得的矩阵,它表示为 A'(或 A^T).即,如果 $A=[a_{ij}]$,那么 $A'=[a_{ji}]$.例如,

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix},\quad A'=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$$

577 易见 $I'=I$.

考虑到矩阵的转置,我们有如下易证的结论:

$$(AB)'=B'A' \tag{13}$$

如果 $A'A=0$,则 $A=0$ (14)

$$A=(A')' \tag{15}$$

$$(A+B)'=A'+B' \tag{16}$$

一个 n 维向量 $x\in R^n$ 可被看做一个 $n\times 1$ 的矩阵,并且如此一个 $n\times 1$ 矩阵被称为一个(n 维)**列向量**,它可写为

$$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

x 的转置为 $x'=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,它能被视为一个 $1\times n$ 矩阵.这样一个 $1\times n$ 矩阵称为一个(n 维)**行向量**.

除非另有规定,或从上下文显而易见,在我们的线性代数讨论中,我们将一个的向量(如 x)视作列向量(x'表示行向量).因此,如果 A 是个 $m\times n$ 矩阵,那么 Ax 是个 m 维列向量,这里 x 是一个 n 维列向量.A.1 节中定义的(欧几里得)内积也可写为 $x\cdot y=x'y=y'x$.既然向量可被视为特殊矩阵,矩阵转置的规则(13)到(16),也可在这儿适用.例如 $Ix=x$ 和 $I=I'$,由(12)我们有

$$Ix=x,\text{和 } x'I=x' \tag{12'}$$

另外,令 A 为 $m\times n$ 矩阵,令 x 和 y 分别是 n 维和 m 维向量,利用(9)和(13),我们有

$$\begin{aligned} y\cdot(Ax)&=y'(Ax)=(Ax)'y \\ &=(x'A')y=x'(A'y)=x'(A'y) \end{aligned}$$

578 总之,我们有如下有用法则:

$$y\cdot(Ax)=y'(Ax)=x'(A'y)=x\cdot(A'y) \tag{17}$$

虽然使用撇(′)来标志转置是很方便的,但有一个困难,它可能与函数的导数相混淆.[1]基于此原因,我们偏好于用 $x\cdot x$ 表示欧几里得内积而不用 $x'x$.另一方面,从上下文中很明显地知道撇的使用不涉及导数,并且那将方便阅读,因此我们将使用撇来表示转置.

这儿接下来有一个问题要注意.当我们把向量视作特殊的矩阵时,两个向量的乘积将产生不同的结果,这依赖于我们是将它们当做行向量还是列向量.这可由例 A.2 说明.

【例 A.2】

$$(x_1,x_2)\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=x_1y_1+x_2y_2$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}(y_1,y_2)=\begin{bmatrix}x_1y_1 & x_1y_2\\x_2y_1 & x_2y_2\end{bmatrix}$$

前者代表 x 和 y 的欧几里得内积,而后者不是.

我们现在考虑联立方程组

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\
&\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\
&\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\
&a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+\cdots+a_{mn}x_n=b_m
\end{aligned} \tag{18}$$

用矩阵表示,这个方程组可紧凑地写为

$$Ax=b \tag{18'}$$

579 这里 $A=[a_{ij}]$是个 $m\times n$ 矩阵,x 和 b 是列向量,$x'=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$b'=(b_1,b_2,\cdots,b_m)$.

注意到矩阵记号的使用大大简化了方程组的书写.另外注意依据(8)的矩阵乘法的定义对于这种简化是很重要的.甚至抛开线性代数的一切重要和有用的结论,其自身的标记简化性就有很大的价值.

我们在定理 A.2 中总结这些结论中的一些.

【定理 A.2】 由(8)定义矩阵乘法.我们有性质(9)到(14).另外,联立方程组(18)可紧凑地写为(18′).根据矩阵转置的一些性质,我们有法则(15)和(16).

非奇异矩阵

令 A 为方阵,I 为同阶的单位矩阵.假定存在同阶方阵 X 和 X^*,使得

$$AX=X^*A=I$$

注意到(9)和(12),我们有

$$X = IX = (X^* A)X = X^*(AX) = X^* I = X^*$$

故我们必有 $X = X^*$. 我们称这样的 X 为 A 的**逆矩阵**. 注意,如果逆矩阵存在,则逆矩阵是惟一的.

为说明这点,设 X 和 Y 是 A 的两个逆矩阵,即

$$AX = XA = I \text{ 和 } AY = YA = I$$

但我们再次回忆(9)和(12),可看到

$$X = XI = X(AY) = (XA)Y = IY = Y$$

因此,X 必等于 Y. 我们用 A^{-1} 表示 A 的逆矩阵. 如果 A 有逆矩阵,A 被称为是**非奇异**的,否则 A 是**奇异**的. 如果 A 非奇异,我们有

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \tag{19}$$

580

易见一些矩阵存在逆矩阵,如下面的例子所示:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

另外,易知不是所有的矩阵都有逆矩阵,也就是说,不是每个矩阵都是非奇异的. 例如,下面的两个矩阵都没有逆矩阵. 这儿 A 和 B 都是奇异的.[2]

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ 和 } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \tag{20}$$

为说明这个问题,计算

$$AX = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad BX = \begin{bmatrix} x_{11} + x_{21} & x_{12} + x_{22} \\ 2x_{11} + 4x_{21} & 2x_{12} + 4x_{22} \end{bmatrix}$$

这里

$$x = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$$

显然,AX 不可能是单位矩阵,因此 A 不可逆. 另外,如果 BX 是一个单位矩阵,那么,我们必须有

$$x_{11} + 2x_{21} = 1 \quad 2x_{11} + 4x_{21} = 0$$

$$x_{12} + 2x_{22} = 0, \quad 2x_{12} + 4x_{22} = 1$$

这是不可能的,因此 B 也是奇异的.

设 A 为非奇异矩阵,考虑联立方程组(18′),$AX = b$. 在这个方程两边左乘 A^{-1},我们立即可得 $x = A^{-1}b$. 既然逆矩阵 A^{-1} 是惟一的,$Ax = b$ 的解 x 是惟一的.

对于非奇异矩阵,下面结论是有用的,并且容易证明:

$$A = (A^{-1})^{-1} \tag{21}$$

581 $$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1} \tag{22}$$

§ A.3 线性无关、秩和线性子空间

为了更深入探索非奇异矩阵的本质，有必要讨论矩阵的“秩”. 首先，我们回忆 A.2 节中讨论的线性无关的概念. 考虑 R^n 中 k 个向量，$x^1, x^2, \cdots, x^k$. 如果对 $\alpha_j \in R, j=1,2,\cdots,k$，

$$\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_k x^k = 0 \text{ 推出 } \alpha_1 - \alpha_2 - \cdots = \alpha_k = 0$$

我们称这些向量是**线性无关的**. 另外，如果对某 $\alpha_j \neq 0, j=1,2,\cdots,k$，有

$$\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_k x^k = 0$$

我们称这个 k 个向量是**线性相关的**. 令 $A=[a_{ij}]$ 是个 $m \times n$ 矩阵. 我们定义 A 的列秩为线性无关的列向量的最大数目，A 的行秩为线性无关的行向量的最大数目. 可证对于任何 $m \times n$ 矩阵的行秩和列秩实际上是相等的，这个结论称为秩定理.

【定理 A.3】 (秩定理)对任何(可长方形)矩阵 A，行秩和列秩相等.

这个定理使我们能简单地指出 A 的秩. 零矩阵的秩为零. 易证 A 的转置有与 A 相同的秩，我们可记为

$$\text{rank } A' = \text{rank } A$$

为讨论矩阵的逆，我们的讨论仅限于方阵. 令 A 为 $n \times n$ 矩阵，易证当且仅当 A 的秩等于 n 时(此情况称 A 是**满秩的**)，A 是非奇异的. 从这点易知非奇异矩阵的逆矩阵也是非奇异的. 另外，下式

$$(A')^{-1} = (A^{-1})' \tag{23}$$

582 成立. 我们也易证明对角矩阵是非奇异的，当且仅当其所有的对角元素皆不为零. 并且，如果 A 是第 i 个对角线元素为 a_{ii} 的非奇异矩阵，那么 A^{-1} 也是一个以 $1/a_{ii}$ 为第 i 个对角元素的对角矩阵.

我们现在可在定理 A.4 中总结关于方阵的逆的一些结论.

【定理 A.4】

(i) A 是非奇异的，当且仅当它为满秩；如果它是非奇异的，其逆矩阵是惟一的.

(ii) 如果 A 是非奇异的，那么 $Ax=b$ 有惟一解，$x=A^{-1}b$.

(iii) 非奇异矩阵有性质(21)到(23).

(iv) 如果 A 是第 i 个对角线元素 $a_{ii} \neq 0$ 的对角矩阵，则 A 是非奇异的，且 A^{-1} 是第 i 个对角线元素为 $1/a_{ii}$ 的对角矩阵.

线性空间和秩

满足下列两个条件的线性空间 X(对其定义,回忆第 1 章的 L1～L8)的一个子集 V 被称为 X 的一个**线性子空间**,如果

(i) $x,y\in V$ 有 $x+y\in V$,且

(ii) 对所有 $\alpha\in R,x\in V$,有 $\alpha x\in V$

即 V 是在加法和数乘下封闭的 X 的子集.易证 V 满足一个线性空间的所有公理,因此它也是一个线性空间.令 x^0 是 X 中的一点.那么$\{\alpha x^0:\alpha\in R\}$是 X 的一个线性子空间.另外,仅包含 0 向量的集$\{0\}$也是子空间,X 本身也是 X 的子空间,这两个子空间$\{0\}$和 X 有时称为**平凡子空间**.

既然 X 的线性子空间 V 本身是一个线性空间,线性无关和基的概念在这儿也是适用的.设 V 中 k 个向量,$x^1,x^2,\cdots,x^k$ 是线性无关的,如果 V 中任何一个向量都可表示为这些向量的线性组合,那么这 k 个向量被称作 V 的一个基,并且如此一组向量的个数(这里是 k)被称作是 V 的**维数**,我们可表示为

583

$$\dim V=k$$

例如,$\{\alpha x^0:\alpha\in R\}$的维数等于 1.虽然线性子空间理论如同线性空间理论可以很广泛地加以扩展,而不必限制 X 是R^n(欧几里得空间),我们仍假设 $X=R^n$以方便目前的讨论.

令 $A=[a_{ij}]$是 $m\times n$ 矩阵,定义集合 K 为

$$K\equiv\{y:y=Ax,x\in R^n\}$$

则 K 是R^n的一个子集.由于 $y^1,y^2\in K$,可推出 $y^1+y^2\in K$,以及由 $y\in K$ 和对所有 $\alpha\in R$ 可推出$\alpha y\in K$,知 K 是R^n的一个线性子空间.如果 A 的秩等于 k,那么 A 中有 k 个线性无关的列向量,易见 K 中任何 y 可表示为 k 个列向量的一个线性组合.因此,K 的维数等于 k,或者

$$\dim K=\operatorname{rank}A \tag{24}$$

下一步定义集合 N(称为 A 的**零空间**),

$$N\equiv\{x:Ax=0,x\in R^n\}$$

易证 N 是R^n的一个线性子空间,关于 A 的零空间的一个基础性结果是

$$\dim N+\operatorname{rank}A=n(\text{即 }\dim N=n-\operatorname{rank}A)^{[3]} \tag{25}$$

以下关于矩阵秩的关系是众所周知的,并且很有用.它们可以利用子空间的概念来得到

$$\operatorname{rank}AA'=\operatorname{rank}A \tag{26}$$

$$\operatorname{rank}AB\leqq\min\{\operatorname{rank}A,\operatorname{rank}B\} \tag{27}$$

$$\text{如果 }B\text{ 是非奇异的,}\operatorname{rank}AB=\operatorname{rank}A^{[4]} \tag{28}$$

$$\text{rank}\,(A+B)\leqq\text{rank}\,A+\text{rank}\,B \tag{29}$$

584 除了(28)中的 B,这里的矩阵 A 和 B 不必是方阵.一般地,AB 的秩不能惟一地被 A 和 B 的秩所决定.可得定理 A.5 中的结论,它们是很有用的.

【定理 A.5】

(i) $K\equiv\{y:y=Ax,x\in R^n\}$ 的维数等于 A 的秩.

(ii) $m\times n$ 矩阵 A 的零空间的维数等于 n 减去 A 的秩,即(25)成立.

(iii) 对于矩阵的秩,我们有(26)到(29).

命题(ii)或(25)在经济学中最终表明是非常有用的.这可由例 A.3 说明.

【例 A.3】(成本最小化) 考虑通常的成本最小化问题,其中一个竞争性公司选择一个要素投入组合 $x\in R^n$,以最小化 $w\cdot x$,约束条件为 $f(x)\geqq y$,$x\geqq 0$,这里 $w=$要素价格向量,$y=$产出的目标水平,$f(x)=$生产函数,w 和 $y(>0)$是给定的参数.一般地,这个问题的解 x^* 依赖于 w 和 y,因此可表示为 $x^*=x(w,y)$.量 $\partial x_i/\partial w_j$ 意味着在产出恒定时,第 j 个要素价格变化时对第 i 个要素的需求的影响.考虑一个 $n\times n$ 矩阵 $S\equiv[\partial x_i/\partial w_j]$.那么 S 代表成本最小化问题的替代矩阵,这里我们可以记 $S=S(w,y)$.由于任何 $\alpha\in R$ 且 $\alpha>0$,选择 (αx) 以最小化 $w\cdot(\alpha x)$ 的问题(约束条件为 $f(x)\geqq y$ 和 $x\geqq 0$)对于将产生与此问题相同的解,因此对任何如此的正 α,我们有 $x(\alpha w,y)=x(w,y)$.$x(w,y)$ 的值对 w 是(正)零次齐次的.因此,由齐次函数的欧拉方程,我们有

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial w_j}w_j=0,j=1,2,\cdots,n$$

585 即,对所有 w,我们有 $Sw=0$,因此,S 是一个奇异矩阵,或 rank $S\leqq n-1$.S 的零空间定义为

$$N\equiv\{z:Sz=0,z\in R^n\}$$

假设对所有与 w 不成比例的非零 z,有 $z'Sz<0$(见第 3 章中介绍的 Samuelson 正则条件).这个条件和 $Sw=0$ 推出 $N=\{z:z=\alpha w,\alpha\in R\}$.$N$ 的秩等于 1.那么由(25),S 的秩等于 $n-1$.因此,从这点我们可得结论,删去 S 的第 n 行和第 n 列(成它的任意一列和与之相对应的一行)而得到的 $(n-1)\times(n-1)$ 矩阵的秩等于 $n-1$,因此此矩阵是非奇异的.

§ A.4 作为线性变换的矩阵[5]

为进一步探讨线性矩阵代数,将矩阵看做是一个线性变换的表达方式而不仅仅是数字的一个列阵是很重要的.实际上,线性代数的基本规则,如加法法则,数乘、矩阵乘法和(26)到(29)的关系式都是自然地来自于这个认识.进

一步地，这个认识将把线性变换(或算子)理论和矩阵代数理论联系起来，这将得到比后者更为丰富和重要的结论.

令 X 和 Y 是实数域上的两个线性空间.读者可以(这里不失讨论的一般性)假设 $X=R^n$ 和 $Y=R^m$.考虑变换(或映射) T，它将 X 的每个元素 x 和 Y 的某个元素 y 联系起来，即

$$T:X\to Y, T(x)=y$$

变换 T 称为一个**线性变换**，如果它满足以下两个条件：

586 (i) 对所有 $x^1,x^2\in X$, $T(x^1+x^2)=T(x^1)+T(x^2)$，且

(ii) 对所有 $a\in R$ 且 $x\in X$, $T(ax)=aT(x)$

从条件(i)和(ii)，易有

$$T(a_1x^1+a_2x^2+\cdots+a_kx^k)=a_1T(x^1)+a_2T(x^2)+\cdots+a_kT(x^k)$$

对所有 $a_i\in R, x^i\in X, i=1,2,\cdots,k$.例如，$T:R^n\to R^m$ 定义为 $y=T(x)=Ax$ (这里 A 是 $m\times n$ 标量列阵 $[a_{ij}]$)是一个线性变换.[6]

线性变换的基本性质可陈述如下：与任何一个线性变换 $T:X\to Y$ 相联系，存在一个标量列阵 $[a_{ij}]$(我们称为"矩阵")，且此联系是一对一的，这里 X 和 Y 被假定为是有限维的.

为了证明上述结论，令 X 和 Y 分别是 n 维和 m 维的，并且令 $e=\{e^1,e^2,\cdots,e^n\}$ 是 X 的某固定基，$f=\{f^1,f^2,\cdots,f^m\}$ 是 Y 的某固定基.设 $T:X\to Y$ 是一线性变换.既然 Y 中任何向量可被表示为基向量组的线性组合，存在某些数量 a_{ij}，有

$$T(e^j)=a_{1j}f^1+a_{2j}f^2+\cdots+a_{mj}f^m, j=1,2,\cdots,n \tag{30}$$

由此而得的这些系数 $m\times n$ 阵列被称为**与线性变换** T(相对于基 e 和 f)**相关的矩阵**，我们表示为 $A(e,f)$.注意 $A(e,f)$ 与 $m\times n$ 数字列阵 $A=[a_{ij}]$ 是相同的.但是应注意，这个定义没有定义"矩阵"，而是定义了"与线性变换相关的矩阵".另外，注意 $A(e,f)$ 是根据特定的基或**坐标系** e 和 f 来决定的.

587 依据基 e，X 中任意一个向量 x 能被写作

$$\text{对标量 } x_i, x=x_1e^1+x_2e^2+x_3e^3+\cdots+x_ne^n$$

如果 $e^1=(1,0,\cdots,0), e^2=(0,1,0,\cdots,0),\cdots,e^n=(0,0,\cdots,0,1)$，那么 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，x_i 为标量.令 $y=T(x)$，依据 Y 中的基 f，y 可表为

$$y=y_1f^1+y_2f^2+\cdots+y_mf^m$$

那么我们可看到

$$y=\sum_{i=1}^{m}y_if^i=T(x)=T(x_1e^1+\cdots+x_ne^n)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}x_jT(e^j)=\sum_{j=1}^{n}x_j(a_{1j}f^1+\cdots+a_{mj}f^m)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}(a_{i1}x_1+\cdots a_{in}x_n)f^i$$

比较向量 f^i 的系数，我们得

$$y_i=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n,\ i=1,2,\cdots,m$$

这个方程组的系数矩阵就是矩阵 $A(e,f)$. 因此，我们可得出结论，与线性变换 T 相关的矩阵 $A(e,f)$ 完全决定了将 T 施用于 X 中任何一个向量 x 所得到的 $T(x)$.

相反地，给定 $m\times n$ 标量列阵 $[a_{ij}]$（如同以往我们用 A 表示），我们可以定义一个线性变换 $T:X\to Y$，并可进一步证明与 T 相关的矩阵 $A(e,f)$ 正好等于 $[a_{ij}]$，即 $A(e,f)=A$. 为证明这点，给定一个标量列阵 $A=[a_{ij}]$，我们考虑 X 中的一个任意向量 x，存在某些标量 x_i，有

$$x=x_1e^1+x_2e^2+\cdots+x_ne^n$$

并且定义 $T:X\to Y$ 为

$$T(x)=y_1f^1+y_2f^2+\cdots+y_mf^m$$

588 这些系数 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 由式

$$y_i\equiv\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j,\ i=1,2,\cdots,m,\text{即 } y=Ax$$

决定. 易见，这样一个变换是线性的. 进一步，令向量 e^1 有分量 $x_1=1,x_2=0,\cdots,x_n=0$，我们有

$$T(e^1)=a_{11}f^1+a_{21}f^2+\cdots+a_{m1}f^m$$

类似的，我们有

$$T(e^j)=a_{1j}f^1+a_{2j}f^2+\cdots+a_{mj}f^m,\ j=1,2,\cdots,n$$

这与(30)相同，$A=A(e,f)$. 这样，给定 $A=[a_{ij}]$，我们构造一个线性变换 $T:X\to Y$，与 T（或 $A(e,f)$）相关的矩阵被证明等于 A.

作为总结，我们有定理 A.6.

【定理 A.6】 给定 X 的基 $\{e^1,e^2,\cdots,e^n\}$ 和 Y 的基 $\{f^1,f^2,\cdots,f^m\}$，利用(30)或等价地利用 $y=Ax$，在线性变换 $T:X\to Y$ 和 $m\times n$ 标量列阵 $A=[a_{ij}]$ 之间存在对应的关系，并且与 T 相关的矩阵 $A(e,f)$ 等于 A.

这样，在附录开始定义的标量列阵，即矩阵 $A=[a_{ij}]$，可以被看做是一些线性变换的“矩阵表示”. 给定定理 A.6 后，如果我们适当地定义线性变换的加法、数乘、乘积等，从这些定义可得到的后结论与早些时候根据 $[a_{ij}]$（一个标量列阵）得到的结论是完全相同的.[7]

589 定义线性变换的加法、数乘和乘积，$T_1,T_2,T:X\to Y$，为[8]

$$\text{对所有 } x\in X,(T_1+T_2)(x)=T_1(x)+T_2(x) \tag{1'}$$

$$\text{对所有 } x\in X \text{ 和 } \alpha\in R,(\alpha T)(x)=\alpha[T(x)] \tag{2'}$$

对所有 $x \in X, (T_1 \circ T_2) = T_1[T_2(x)]$ (8′)

那么我们可以说$(T_1 + T_2)$,(aT)和$(T_1 \circ T_2)$是从 X 到 Y 的线性交换,(1′),(2′)和(8′)中这些线性变换的矩阵的表示满足早些时候为矩阵(即标量列阵)定义的规则(1),(2)和(8). 同样易知,单位矩阵 I 是由$I(x) = x$ 定义的恒等线性变换 $I: X \to X$ 的矩阵表示,并且阶为 $m \times n$ 的零矩阵是把 X 中每个向量 x 映射到 Y 的零向量的零变换的矩阵表示. 可证当矩阵是关于线性变换(对固定的基向量)的线性表示时,先前建立的所有结论,如从(3)到(7)和从(9)到(12),都成立.

作为总结,我们建立定理 A.6 的一个推论.

推论:一个线性变换 T 和一个矩阵 A(标量列阵$[a_{ij}]$)之间的一一对应性保持加法、数乘、乘积,以及零.

令 $T: X \to X$. T 是 X 到自身的一个线性变换,并且令 $T: X \to X$ 是同一变换. 即对 X 中所有 x, $Ix = x$. 假定存在线性变换 $S, S^*: X \to X$,使得

$$TS = S^* T = I$$

那么我们易证 $S = S^*$,并且 S 是惟一的. 当这样一个 S 存在时,我们说 T 是**可逆的**,并且用 T^{-1}表示 S. 我们然后有

$$TT^{-1} = T^{-1}T = I$$

590 显然,T^{-1}也是从 X 到自身的一个线性变换. 我们也可证明 T 是可逆的,当且仅当它的矩阵表示是非奇异的. 假设 T 是可逆的,T^{-1}的矩阵表示对应于 T 的矩阵表示的逆.

§ A.5 行列式和分块矩阵

A.5.1 行列式、拉普拉斯展开和克莱姆法则

给定任意一个方阵 A,我们可以伴随到称为 A 的行列式的一个**纯数量**,我们记为 det A 或$|A|$. 例如,读者应遇见过

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

为研究这样一个伴随的法规,我们考虑一个 $n \times n$ 矩阵 $A = [a_{ij}]$,并考虑出现在 A 的不同行和不同列的 n 个元素的任何乘积. 这个积只包括每一行和每一列的一个元素(因此在特定积中没有元素会出现两次). 我们可用下列形式写这样一个积:

$$a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n} \tag{31}$$

对于这个积的第一个元素，我们常常选择在 A 的第一列出现的元素. 因此，积的第一个元素能写为 $a_{i_1 1}$. 同样，对于积的第二个元素，我们常常选择在 A 中第二列出现的元素，故它写为 $a_{i_2 2}$. 重复这种方法，我们能以形式(31)写一个标号积. 由于在一个积中没有一个元素中出现两次，整数

$$i_1, i_2, \cdots, i_n$$

必须是不同的，故它们代表了 n 个整数 $1,2,3,\cdots,n$ 的某个排列.[9]例如，

$$\{1,2,4,3\}, \{4,3,1,2\}, \{1,3,2,4\}$$

都是$\{1,2,3,4\}$的排列. 对$\{i_1, i_2, \cdots, i_n\}$中的一个**逆序**，我们意指使得较大标号出现在较小标号之前我们用 $N(i_1, i_2, \cdots, i_n)$表示逆序的个数. 例如，在排列$\{1,2,4,3\}$中，只有一个逆序(4 在 3 前)，在排列$\{4,3,1,2\}$中，有 5 个逆序(4 在 3 前，4 在 1 前，4 在 2 前，3 在 1 前，3 在 2 前). 因此，

$$N(1,2,4,3)=1, N(4,3,1,2)=5$$

如果序列$\{i_1, i_2, \cdots, i_n\}$中逆序的数目是偶数的，我们在积(31)之前加上“+”号；如果数目是奇数的，我们在积之前加上一个“负”号，由此我们重写积为

$$(-1)N(i_1, i_2, \cdots, i_n)(a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}) \tag{31'}$$

对$\{1,2,\cdots,n\}$的所有可能排序(没有重复)取以(31′)形式表示的积的和. 我们有

$$\sum(-1)N(i_1, i_2, \cdots, i_n)(a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}) \tag{32}$$

这样一个和被正式定义为 A 的**行列式**(以$|A|$或 det A 表示). 如我们所知，在这样一个和中有 $n!$ 项. 如果 A 是一个 $n \times n$ 矩阵，称行列式 A 的**阶**为 n，矩阵 A 的元素 a_{ij} 也被称作是行列式 A 的**元素**.

利用行列式的这个定义，我们可以直接得到关于行列式的性质(证明见任何矩阵代数教材)：

$$|A'| = |A| \tag{33}$$

交换 A 的任意两列(或行)改变 A 的行列式的符号 (34)

有两个相同行(或列)的矩阵的行列式等于零 (35)

$$\text{如果 } A \text{ 和 } B \text{ 是方阵，则 } |AB| = |A||B| \tag{36}$$

$$|A^{-1}| = 1 \div |A| \tag{37}$$

如果 A 的一行(或一列)的每一个元素与一个数量 α 相乘得到一个新矩阵 B,则 $|B|=\alpha|A|$ (38)

592 因此,由(38),如果 A 的每一元素都与 α 相乘,那么 $|\alpha A|=\alpha^n|A|$. 注意(33)、(34)、(36)和(38)直接来自于行列式的定义. 结论(35)和(37)分别容易从(34)和(36)得到.

考虑一个 $n\times n$ 矩阵 $A=[a_{ij}]$. 如果我们从 A 中同时删去一行和一列,那么剩下的元素构成阶为 $n-1$ 的矩阵. 这样一个矩阵的行列式称为 A 的一个余子式,如果我们删去第 i 行和第 j 列,由此得到的余子式用 Δ_{ij} 表示. 举个例子,

$$\Delta_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定义 A_{ij} 为

$$A_{ij}\equiv(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$$

则 A_{ij} 称为行列式 $|A|$ 的元素 a_{ij} 的**代数余子式**. 显然我们有

$$A_{11}=\Delta_{11},A_{12}=-\Delta_{12},A_{13}=\Delta_{13},A_{23}=-\Delta_{23}$$

由此,我们可得下面法则,称为**(拉普拉斯)代数余子式展开法则**(或简单地称为**拉普拉斯展开式**). 对于任何 $j=1,2,\cdots,n$,有

$$\begin{aligned}|A| &= a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \\ &= a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\end{aligned} \tag{39}$$

例如,我们有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

从(39)我们易证:任何一行或列加上一个数乘以任意一个其他的行或列,
593 行列式的值不变. 我们还可证明当且仅当 $|A|\neq 0$ 时,矩阵 A 是非奇异的. 假设 A 是非奇异的,从(39)我们也可得矩阵的逆的下一个规则:

$$A^{-1}=\left[\frac{A_{ji}}{|A|}\right]=\frac{1}{|A|}[A_{ji}] \tag{40}$$

矩阵 $[A_{ji}]$ 称为 A 的伴随矩阵. 也就是说,为得到 A 的伴随矩阵,用 a_{ij} 的代数

余子式$[A_{ij}]$代替a_{ij}，形成一个新的矩阵，然后转置这个新矩阵.

【例 A.4】

对于 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$，有

$$A_{11}=4, A_{12}=-3, A_{21}=-2, A_{22}=1$$

$$|A|=1\cdot 4-2\cdot 3=-2,\text{且}$$

$$A^{-1}=\frac{-1}{2}\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

用 $Ax=b$ 表示联立方程组，这里 A 是一个 $n\times n$ 矩阵，b 是 n 维列向量，其第 i 个元素是 b_i. 假定 A 是非奇异的，这个方程组的解可惟一地写为

$$x=A^{-1}b$$

或者

$$x_j=\frac{1}{|A|}(b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj}),j=1,2,\cdots,n$$

这可直接改写成

$$x_j=D_j/|A|,j=1,2,\cdots,n \tag{41}$$

这里 D_j 是用 b 代替 $|A|$ 的第 j 个列向量得到的行列式，即

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

594

$$D_j=\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

(j)

等式(41)便是著名的克莱姆法则.

【定理 A.7】 对于由上定义的行列式，我们有(33)到(38)、代数余子式展开的拉普拉斯法则(39)、逆法则(40)和克莱姆法则(41).

A.5.2 分块矩阵和行列式

由于矩阵是标量的一个矩形列阵，我们可以把它分块为子矩阵.例如，

$$A=\left[\begin{array}{ccc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right]$$

可被分为四个子矩阵：

$$A_{11}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix},A_{12}=\begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \end{bmatrix}$$

$$A_{21}=\begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},A_{22}=\begin{bmatrix} a_{34} \end{bmatrix}$$

并且 A 可写为

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

这些 A_{ij} 不要与代数余子式相混.

加法和乘法的基本规则仍适用于分块矩阵.例如：

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & B_{32} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} \\ A_{31}+B_{31} & A_{32}+B_{32} \end{bmatrix}$$

595 这里 A_{ij} 与对应的 B_{ij} 有相同的阶，且

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11}B_{11} & A_{12}B_{21} \\ A_{21}B_{11} & A_{22}B_{21} \end{bmatrix}$$

这里把 B 的行分为 B_{11} 和 B_{21} 的分法应与 A 的列的分法一致，这样上面等式右面的矩阵相乘就是确定的.

根据这点和拉普拉斯展开法则易得，如果

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \tag{42}$$

并且如果 $A_{12}=0$ 或 $A_{21}=0$，我们有

$$|A|=|A_{11}||A_{22}| \tag{43}$$

这里，A_{11} 和 A_{22} 是方阵(不必是同阶的)，A_{12} 和 A_{21} 是方阵.

令 A 是以(42)形式表示的分块矩阵，假定 A_{11} 和 A_{22} 是非奇异的.那么我们能证明以下有用法则：

$$|A|=|A_{11}||A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|$$

$$= |A_{22}||A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}| \tag{44}$$

显然,(43)是(44)在 $A_{12}=0$ 和/或 $A_{21}=0$ 时的特殊情况.

§ A.6 特征值、特征向量和对称矩阵

令 $A=[a_{ij}]$ 是 $n\times n$ 矩阵,假定存在 $x\in R^n$ 和 $\lambda\in R$,使得

$$Ax=\lambda x, x\neq 0 \tag{45}$$

那么我们说 λ 是 A 的**特征值**或**特征根**(或简称为根). 向量 x 称为(伴随 λ)的**特征向量**.[10]因此,我们可等价地改写 $Ax=\lambda x$ 为

$$(\lambda I - A)x = 0 \tag{45'}$$

596 我们可以立即知道,如果 λ 是一个特征值,那么(45′)有一解 $x\neq 0$,故($I\lambda - A$)必是奇异的,即

$$\phi(\lambda) \equiv |\lambda I - A| = 0 \tag{46}$$

这里,$|\lambda I - A|$ 是($\lambda I - A$)的行列式. 相反地,如果 λ 是(46)的解,则(45′)有一非零解 x. 即(45′)和(46)是等价的. 方程(46)称为 A 的**特征方程**.

【例 A.5】

(i) $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, $\phi=\begin{bmatrix}\lambda-1 & -1\\ -1 & \lambda-1\end{bmatrix}=\lambda(\lambda-2)=0$,故 $\lambda=0$,和 2;

(ii) $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $\phi(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda-1 & 0\\ 0 & \lambda-1\end{bmatrix}=\lambda(\lambda-1)^2=0$,故 $\lambda=1$(双重根).

当 $A=[a_{ij}]$ 是 $n\times n$ 矩阵时,特征方程可等价地写为

$$\phi(\lambda)=\lambda^n+\alpha_1\lambda^{n-1}+\cdots+\alpha_{n-1}\lambda+\alpha_n=0 \tag{47}$$

这里 α_i 是 a_{ij} 的函数. 特征方程是一个多项式. 由**代数基本定理**,n 次多项式有 n 个(不必是不同的)根. 每个根不必是实数,它可以是复数. 因此一个特征向量不必是一个实向量,即它的元素可以是复数. 当 $n=2$ 时,有两个特征值,λ_1,λ_2. 有可能 $\lambda_1=\lambda_2$(二重根),此时我们说根的**重数**等于 2. 一般地,如果 λ_i 是 A 的 m_i 重特征值,且如果 A 一共有 k 个不同的特征值,那么我们有

$$m_1+m_2+\cdots+m_k=n,\ m_1,m_2,\cdots,m_k\leqq n$$

当 A 的某个特征值 λ 的重数是 1 时,那么称 λ 为**单根**.

597 **【例 A.6】** 令 $n=2$. 那么特征方程可写为

$$\lambda^2+\alpha_1\lambda+\alpha_2=0,$$

这里，$a_1 \equiv -(a_{11}+a_{12})$，$a_2 \equiv a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，注意 a_2 是 A 的行列式. 从这个二次方程，可得特征值为

$$\lambda = \frac{1}{2}[-a_1 \pm \sqrt{(a_1^2-4a_2)}]$$

两个特征值写为 λ_1 和 λ_2. 显然 λ_1 和 λ_2 可以是实数(当 $a_1^2-4a_2 \geqq 0$)或复数(当 $a_1^2-4a_2<0$). 当 $a_1^2-4a_2=0$ 时，我们有 $\lambda_1=\lambda_2$(双重根). 注意如果 λ_1 和 λ_2 是复数，它们彼此是复共轭的. 令 a 和 b 是实数，它们可写成

$$\lambda_1 = a+ib, \lambda_2 = a-ib$$

的形式，这里，$i=\sqrt{-1}$. 例 A.6 在第 7 章中具有重要作用.

对特征方程(47)，我们易得

$$a_1 = -(a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{nn}), a_n = |A| \tag{48}$$

这可根据例 A.6 加以验证. 一般地，令 $A=[a_{ij}]$ 是一个 $n\times n$ 矩阵，它的对角线元素的和，$a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{nn}$ 被称为 A 的迹，记为 $\mathrm{tr}\,A$. 从(48)，我们可断言 $(-a_1)$ 是 A 的迹.

注意，如果 $x\neq 0$ 是一个特征向量，也就是如果 $Ax=\lambda x$，则 θx(θ 为任意非零实数)也是一个与相同特征值伴随的特征向量. 更进一步，有可能两个不同的向量 x 和 y，其中对任意 $\theta \in R$，$x\neq \theta y$(一个不是另一个的数量倍)，都是关于一个相同特征值的特征向量. 一般地，一个 $n\times n$ 矩阵或许没有 n 个不同的特征值，但 A 可以有 n 个线性无关的特征向量. 读者可通过检查2×2单位矩阵来验证这个论点的正确性. 另一方面，与不同的特征值对应的特征向量都是不同的.

一些关于特征值和特征向量的有用结论在定理 A.8 中加以总结，注意命题(vi)到(viii)都要求一个特定的矩阵是对称的(即对一切 i 和 j 有 $a_{ij}=a_{ji}$). 定理的命题(v)和(vii)中的 Λ 是对角矩阵，由

$$\Lambda \equiv \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & & & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{49}$$

来定义.

【定理 A.8】 令 A 是个 $n\times n$ 矩阵.

(i) 如果 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的特征值(不必是不同的)，我们有

$$\mathrm{tr}\,A=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n, |A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \tag{50}$$

(ii) A 的非零特征值的数目等于 A 的秩.

(iii) 令 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的特征值(不必是不同的),$x^1,x^2,\cdots,x^n$ 是相应的特征向量.那么 A^k 的特征值(k 为任何或正或负的整数)为 $\lambda_1{}^k,\lambda_2{}^k,\cdots,\lambda_n{}^k$,相应的特征向量是 $x^1,x^2,\cdots,x^n$.特别地,A^{-1} 的特征值为 $1/\lambda_1,\cdots,1/\lambda_n$.

(iv) 如果 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k(k\leqq n)$ 是 A 的不同的特征值,那么这 k 个特征值的相应特征向量 $x^1,x^2,\cdots,x^k$ 是线性无关的.

(v) 如果 A 的 n 个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是不同的,那么 A 可**对角化**为[11]

$$P^{-1}AP=\Lambda \tag{51}$$

这里,$P\equiv[x^1,x^2,\cdots,x^n]$ 是一个 $n\times n$ 矩阵,$x^1,x^2,\cdots,x^n$ 是这些特征值相应的(列)特征向量.[12]

599 (vi) 假如 A 是对称的,那么它的特征值都是实数,进而 A 的特征向量的每个元素都是实数.

(vii) 令 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的特征值(不必是不同的),并且令 $x^1,x^2,\cdots,x^n$ 是其相应的特征向量.那么如果 A 是对称的,我们能选择 $x^1,x^2,\cdots,x^n$ 使 A 可对角化为

$$P'AP=\Lambda^{[13]} \tag{52}$$

这里,$P=[x^1,x^2,\cdots,x^n]$,x^i 是相互正交的,即对一切 $i\neq j$ 有 $x^i\cdot x^j=0$.

(viii) 如果 A 的特征值都是0,并且如果 A 是对称矩阵,则 A 是一个0矩阵.

注:一个方阵 P 被称为是一个正交矩阵,如果

$$P'P(=PP')=I \tag{53}$$

一个正交矩阵总是非奇异的,并且我们有 $P^{-1}=P'$.进一步,正交矩阵的行列式等于1或 -1.[14]定理 A.8(vii) 中的矩阵 P 是一个正交矩阵,因为对所有 $i\neq j$,有 $x^i\cdot x^j=0$,另外我们选择的 x_i 对所有的 i 有 $x^i\cdot x^i=1$.等式(51)和(52)被称为 A 的**谱分解**(spectral decompositions).[15]

§ A.7 负定矩阵或正定矩阵

600 令 $A=[a_{ij}]$ 是一个 $n\times n$ 矩阵(实数域上),不必是对称的,并且令 $x\in R^n$ 是列向量.考虑定义在 R^n 上的一个实值函数 $Q(x)$,则

$$Q(x)\equiv x'Ax\left(=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\right) \tag{54}$$

正如第1章提到的，$Q(x)$称为一个(实)**二次型**.我们重复第1章的下列定义：

【定义】 令 $Q(x)=x'Ax$ 是一个二次型.

(i) A 称为是**正定的**，如果对除 $x=0$ 外的所有 x 都有 $Q(x)>0$；A 称为是**负定的**，如果对除 $x=0$ 外的所有 x 都有 $Q(x)<0$.

(ii) A 称为是**半正定的**，如果对所有 x 都有 $Q(x)\geqq 0$；A 称为是**半负定的**，如果对所有 x 都有 $Q(x)\leqq 0$.

定理A.9将"正定性"或"负定性"的这些概念与特征值相联系，这里的命题(iii)来自于命题(i)和(ii)以及一个非奇异矩阵的特征值中没有一个等于零的事实.

【定理A.9】 令 A 是一个 $n\times n$ 对称矩阵，且 $Q(x)\equiv x'Ax$.

(i) A 是正定的(负定的)，当且仅当 A 的每个特征值是正的(负的).

(ii) A 是**半正定的**(半负定的)，当且仅当 A 的每个特征值是非负的(非正的).

601 (iii) 如果 A 是半正(负)定的，且如果 A 是非奇异的，那么 A 是正(负)定的.

注：如果 A 是正定的或负定的，那么其特征值皆不为0.故由定理A.8的命题(iii)，A 是非奇异的.由定理A.8的(vii)，每个对称矩阵都能对角化为(52).也就是说，存在一个正交矩阵 P，使得 $P'AP=\Lambda$，这里 $P'P=PP'=I$.然后令 $y\equiv Px$(这称为 x 的正交变换)，我们可得

$$x'Ax=(Px)'PAP'(Px)=y'\Lambda y$$

因此，我们可重写 $Q(x)=x'Ax$ 为[16]

$$x'Ax=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$$

从这一点，定理A.9(i)和(ii)立即成立.

【例A.7】 回忆例A.3讨论的成本最小化问题.同以前一样，令 $x^*=x(w,y)$ 是问题的解；$x(w,y)$ 代表要素需求向量函数.令 $S\equiv[\partial x_i/\partial w_j]$ 是 $n\times n$ 替换矩阵.S 对称，且由 $Sw=0$ 知 S 为奇异矩阵，在Samuelson正则规范条件下，S 的秩等于 $n-1$.正如早些时候提到的，这个条件说明对所有"与 w 不成比例的 z"有 $z'Sz<0$.这差不多即断言 S 是负定的，但由于"着重部分"的原因，S 并非是负定的.实际上，S 是奇异的，它不可能是负定的，故 S 是半负定的.因为秩 $S=n-1$，删去第 n 行和第 n 列而得到的 $(n-1)\times(n-1)$ 矩阵，根据定理A.9的(iii)是负定的.用 $\tilde{S}$ 定义这样一个矩阵，则对所有 $(n-1)$ 维非0向量 z，有 $z'\tilde{S}z<0$.令 $x_{ij}\equiv\partial x_i/\partial w_j$，由第1章中的定理1.3的(ii)，我们有

602
$$x_{11}<0,\ \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix}>0,\ \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix}<0,\cdots$$

进一步地，在 $z'\hat{S}z<0$ 中，令 $z'=(0,\cdots,1,\cdots,0)$，即 z 是除第 i 个元素外的元素皆为 0 的 $(n-1)$ 维列向量. 则我们得 $x_{ii}<0$. 既然 i 的选择是任意的，这对所有 $i=1,2,\cdots,n-1$ 成立. 另外，既然把 A 的第 i 行和第 j 列与(比如说)第 1 行和第 1 列相交换不会影响这个讨论(这等于是说重新分配一定数量给一特定商品不会影响讨论)，我们也可断言 $x_{nn}<0$，由此，我们有

$$\text{对所有 } i=1,2,\cdots,n, x_{ii}\equiv \partial x_i/\partial w_i<0$$

对所有 $i=1,2,\cdots,n$，第 i 种要素价格效应总是减少对第 i 种要素的需求，即自我价格效应是负的.

关于二次型不等式的最重要的一个问题是，当 x 由 $Bx=0$ 加以限制时，决定 $Q(x)\equiv x'Ax$ 的符号，这里 B 是一个 $m\times n$ 矩阵. 这样的问题出现在最优化的古典理论中，自从 Hick 的《价值和资本》(1946)和 Samuelson 的《经济分析基础》(1947)以来，这对经济学家来说已变得很熟悉了. 为回答上述问题，假定 $n>m$，对 $k=m+1,m+2,\cdots,n$，定义 A 和 B 的下列子矩阵：

$$A_k\equiv\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}$$

和

$$B_{m,k}\equiv\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ b_{m1} & \cdots & b_{mk} \end{bmatrix}$$

603 注意有 $(n-m)$ 个 A_k 和 $(n-m)$ 个 $B_{m,k}$. 进一步，定义下面的 $n-m$ 加边行列式，C_k(这里 C_k 由 $B_{m,k}$ 加边)为

$$|C_k|\equiv\det\begin{bmatrix} 0 & B_{m,k} \\ B'_{m,k} & A_k \end{bmatrix},\ k=m+1,m+2,\cdots,n.$$

这里 $B'_{m,k}$ 是 $B_{m,k}$ 的转置，0 是所有元素都是 0 的 $m\times m$ 矩阵，$|C_k|$ 是 $(m+k)\times(m+k)$ 行列式. 然后我们有定理 A.10.[17]

【定理 A.10】 令 A 是对称的，$B_{m,m}$ 是非奇异的(rank $B=m$). 那么，

(i) 对所有满足 $x\neq 0$ 且 $Bx=0$，有 $x'Ax<0$，当且仅当 $(-1)^kC_k>0, k=m+1,m+2,\cdots,n$；

(ii) 对所有满足 $x\neq 0$ 且 $Bx=0$，有 $x'Ax>0$，当且仅当 $(-1)^mC_k>0, k=$

$m+1, m+2, \cdots, n$.

▶ 注 释

[1]为避免这样的混淆，一些作者使用像 x^T（而非 x'）这样的记号来表示 x 的转置. 这样一种记号的困难在于，涉及到向量和矩阵的代数操作常与上标相混，看起来很杂乱，我们希望避免这样的混乱.

[2]易验证(20)中的矩阵 A 或 B 的两列（或行）是线性相关的. 这又进而确证了这些矩阵是奇异的.

[3]特别地，如果 A 是一个方阵（$n \times n$ 矩阵），则由定理 A.5，A 是非奇异的，当且仅当 rank $A = n$. 故由(25)，我们可以得出结论，A 是非奇异的，当且仅当 A 的零空间 N 的秩为零，N 只包含零向量.

[4]作为其推论，我们可以断言所有同阶的非奇矩阵有相同的秩. 因为，如果 A 和 B 是同阶矩阵，且秩 $A = n_1$，秩 $B = n_2$，则由(28)，秩 $AB = n_1$，秩 $AB = n_2$，所以 $n_1 = n_2$.

[5]如果读者愿意这样，这部分可跳过. 这里的问题较困难. 关于此问题的较好阐述，见 Shilou(1977，78～82 页)，Halmos(1958，55～68 页).

[6]令 b 是一个非零 n 维向量. 易知 $T(x) = Ax + b$ 不是一个线性变换. $y = Ax + b$ 通常称为"线性函数"，且"函数"和"变换"被当作同义语使用，这是很不幸的.［变换 $T(x) = Ax + b$ 被称为**仿射变换**］. 但如以前提到的，过多纠缠此点是不值得的. 读者易从文章中加以区分. 这里我们只需注意的是，我们使用记号 T 来表示一个线性变换而不是通常的函数记号，如 f, g, ϕ 等.

[7]注意线性变换定义在其上的线性空间 X 和 Y 被假设是有限维的. 当 X 和 Y 是无限维的时候，我们没有一个恰当的矩阵（标量列阵$[a_{ij}]$）概念的类似物. 进一步，关于线性变换的大多数重要结论的证明不需使用矩阵的概念. 因此，矩阵代数理论仅仅成为线性变换（算子）的一种特例，其中 X 和 Y 是有限维. 基于这点，Halmos(1958)撰写了一本有关有限维线性空间上的线性变换理论的教材.

[8]两个线性变换 $T_1, T_2: X \to Y$ 被称为是相等的（写作 $T_1 = T_2$），如果对于 X 中的每个 x，有 $T_1(x) = T_2(x)$. (8′)中的变换 $T_1 \circ T_2$ 是 T_1 和 T_2 的"复合变换". 它与一个复合函数相对应. 既然由(8)定义的矩阵乘法对 T_1, T_2 的矩阵表达式成立，并且当 $(T_1 \circ T_2)$ 由(8′)定义. 由此，定义(8)可看作矩阵是线性变换的一对一表达的这一事实的自然结果.

[9]更准确地，整数 $1, 2, \cdots, n$ 的一个**置换**，我们意指一个一一映射(π)，这个映射将上面整数中的每一个映射到另一个（因此，π 也是映上的）. 说 π 是一一映射，意味着只有 $i = j$ 时，$\pi(i) = \pi(j)$才会发生.

[10]特征向量要求是非零的，因为零向量自然满足等式 $Ax = \lambda x$. 另一方面，一个特征值可能为零.

[11]P 是非奇异的(故 P^{-1}存在),因为 n 个特征值是相异的,由命题(i),相应的特征向量是线性无关的.

[12]注意由定义 $Ax^i=\lambda_i x^i$. 如果令 A 的转置为 A',我们对每个 λ_i, $i=1,2,\cdots,n$,有 $A'y^i=\lambda_i y^i$. 如果 $\lambda_i\neq\lambda_j$,那么我们可证明 $x^i\cdot y^j=y^j\cdot x^i=0$,$(i\neq j)$,同时,$x^i\cdot y^i\neq 0$. 因此,在当前的情况中,如果 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 都是相异的,我们有

$$x^i\cdot y^j=0,\ y^j\cdot x^i=0,\ i\neq j,\ x^i\cdot y^i\neq 0,\ i,j=1,2,\cdots,n$$

[13]如果 A 是对称的,则 $A=A'$. 则 $Ax^i=\lambda_i x^i$ 推出 $A'x^i=\lambda_i x^i$. 故由注释 12,如果 $\lambda_i\neq\lambda_j$,我们有 $x^i\cdot x^j=0$. (对称矩阵的两个相异特征值对应的特征向量相互间总是正交的.)注意(vii)不要求所有特征值是相异的. 特别地,如果 A 的一个特征值,比如 λ,有 $\alpha>1$,则存在 α 个相异的特征向量. 对应于这样一个 λ,在 A 是对称的条件下,它们相互间是正交的.

[14]在 $P'P=I$ 两边右乘 P^{-1},立即有 $P'=P^{-1}$. 在 $P'P=I$ 两边取行列式,联想到(33)和(36),我们易得出结论 $|P|=1$ 或 -1.

[15]我们可分别改写(51)和(52)为

$$A=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x^i\cdot y^i \text{ 和 } A=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x^i\cdot x^i$$

这里 y^i 是 P^{-1}的第 i 个列向量.

[16]如果 A 是正定的,则由定理 4.9 的(i),对所有 i 有 $\lambda_i>0$. 由此,我们可以断言,如果 A 是正定的,则存在一个非奇异 $n\times n$ 矩阵 C,使得

$$z'Az=z_1^2+z_2^2+\cdots+z_n^2$$

这里 $z\equiv Cx$, $z_i=y_i\sqrt{\lambda_i}$. 类似地,我们也可断言,如果 A 是负定的,则存在一个非奇异矩阵 C,使得

$$z'Az=-(z_1^2+z_2^2+\cdots+z_n^2)$$

[17]有关证明,见 Mann(1943)和 Debreu(1952). 在命题(i)中,$|C_k|$的符号依赖于 k;由此(i)说明加边矩阵 C_n 的最后$(n-m)$个连续主于式交替改变符号. 在命题(ii)中,$|C_k|$的符号依赖于 m;故(ii)说明 C_n 的最后$(n-m)$个连续主于式都有相同的符号,$(-1)^m$.

▶ 参考文献

Debreu, G. 1952. "Definite and Semidefinite Quadratic Forms." *Econometrica* 20 (April): 295 - 300.

Gantmacher, F. R. 1959. *The Theory of Matrices*. Trans. from the

Russian original *Theoriya Matrits* by K. A. Hirsch. 2 vols. New York: Chelsea Publishing Co.

Hadley, G. 1969. *Linear Algebra*. Reading, Mass: Addison-Wesley.

Halmos, P. R. 1958. *Finite Dimensional Vector Spaces*. Princeton, N.J.: van Nostrand.

Hicks, J. R. 1946. *Value and Capital*. 2d ed. Oxford: Clarendon Press.

Mann, H. B. 1943. "Quadratic Forms with Linear Constraints." *American Mathematical Monthly* 50 (August-September): 430－33.

Marcus, M. and H. Minc. 1964 *A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities*. Boston: Allyn and Bacon.

Samuelson, P. A. 1947. *Foundations of Economic Analysis*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Shilov, G. E. 1977. *Linear Algebra*. Trans. R. A. Silverman from the Russian original. New York: Dover Publishing.

附录 B　七种类型的凹函数和拟凹规划：对一些结果及扩展的概述

605　有一些研究与凹性的各种概念有关，如 Ponstein(1967)；Mangasarian(1969)；Newman(1969)；以及 Diewert，Avrel 和 Zang(1979)．目前的研究在某种意义上仍沿袭着同一精神．[1]我们提出七种凹性和拟凹性，并说明它们之间的关系．大多数关系是已知的，但我们发现它对于得出我们的关系十分有用．这些关系可使我们正确认识凹性的七个概念．将已知的关系包括进来，为的是使我们的阐释尽可能连贯．对凹性及拟凹性的概念有了正确的认识之后，我们来研究一下拟凹规划问题．这个问题在 Arrow 和 Enthoven(1961)的一本重要著作中论及，后来 Mangasarian(1969)也论及此问题．我们将突出伪凹性在这一研究领域(这来自于 Mangasarian 1969 和 Martos 1975 之后)中的重要性．伪凹性这一概念是由 Mangasarian(1965)引入的．

§B.1　七种凹性[2]

令 f 为一个定义在 R^n 中一个凸集 X 上的实值函数．下述五种类型的凹函

数的定义义是熟知的.

【定义 B.1】 如果由

$$f(x)\geqq f(x^0)$$

606

推出

$$f[\theta x+(1-\theta)x^0]\geqq f(x^0),\forall x,[3]x^0\in X,0\leqq\theta\leqq 1 \tag{1}$$

则称函数 f 称为**拟凹的**.

【定义 B.2】 函数 f 称作显式拟凹函数,如果它是拟凹的,并且 $\forall x$, $x^0\in X,x\neq x^0,0<\theta\leqq 1$. $f(x)>f(x^0)$,推出

$$f[\theta x+(1-\theta)x^0]>f(x^0) \tag{2}$$

【定义 B.3】 如果由

$$f(x)\geqq f(x^0)$$

推出

$$f[\theta x+(1-\theta)x^0]>f(x^0),\forall x,x^0\in X,x\neq x^0,0<\theta<1 \tag{3}$$

则称函数 f 为**严格拟凹函数**.

【定义 B.4】 如果

$$f[\theta x+(1-\theta)x^0]\geqq\theta f(x)+(1-\theta)f(x^0),\forall x,x^0\in X,0\leqq\theta\leqq 1 \tag{4}$$

则称函数 f 为**凹函数**.

【定义 B.5】 如果[4]

$$f[\theta x+(1-\theta)x^0]>\theta f(x)+(1-\theta)f(x^0),$$
$$\forall x,x^0\in X,x\neq x^0,0<\theta<1 \tag{5}$$

则称函数 f 为**严格凹函数**.

关于显式拟凹性,引理 B.1 中的结论来自 Karamardian(1967).

607 【引理 B.1】 如果 f 是上半连续的,[5]则由(2)推出 f 的拟凹性.

证明:见 Karamardian(1967),Mangasarian(1969,139 页),及 Martos(1975, 45~46 页).因此,特别地,如果 f 连续,(2)推出 f 的拟凹性.以下"注"中的结论十分有名,它指出了显式拟凹性和严格拟凹性的重要性.

注:令 S 为 X 的一个凸子集.

(i) 如果 f 是显式拟凹函数,那么 f 在 S 中的每个局部最大都是全局最大.

(ii) 如果 f 是严格拟凹函数,那么 f 在 S 中的每个局部最大都是惟一的

全局最大.

由定义,定理 B.1 和 B.2 的结论显而易见.

【定理 B.1】 每个显式拟凹函数都是拟凹函数,且每个严格拟凹函数都是显式拟凹函数(因此也是拟凹的).逆命题不成立.

【定理 B.2】 每个凹函数都是显式拟凹函数,且每个严格凹函数都是严格拟凹函数(因此也是显式拟凹的).逆命题不成立.

在实际应用中,f 常被假定为一个定义在 R^n 中开凸集 X 上的**可微**函数.我们将主要研究这种情况,用 f_x 来表示 f 的梯度向量,如果 f_x 在某处赋值,比如 x^0,以 $f_x{}^0$ 表示它,即 $f_x{}^0 \equiv f_x(x^0)$.以下可微情况下凹性的两个概念十分重要.

【定义 B.6】 如果由

$$f(x) > f(x^0)$$

推出

$$f_x{}^0 \cdot (x - x^0) > 0, \forall\, x, x^0 \in X, x \neq x^0 \tag{6}$$

608 则称函数 f 为是**伪凹函数**.其中,点(·)表示欧几里得内积.利用(6)式的逆否的叙述方法,可等价地叙述为

$$f_x{}^0 \cdot (x - x^0) \leqq 0$$

推出

$$f(x) \leqq f(x^0), \forall\, x, x^0 \in X, x \neq x^0 \tag{6'}$$

【定义 B.7】 如果由

$$f(x) \geqq f(x^0)$$

推出

$$f_x{}^0 \cdot (x - x^0) > 0, \forall\, x, x^0 \in X, x \neq x^0 \tag{7}$$

则称函数 f 为严格伪凹的.类似地,(7)可等价地表述为

$$f_x{}^0 \cdot (x - x^0) \leqq 0$$

推出

$$f(x) < f(x^0), \forall\, x, x^0 \in X, x \neq x^0 \tag{7'}$$

在可微条件下,引理 B.2 中各种凹性的派生性质已众所周知.

【引理 B.2】

(i) f 是凹函数,当且仅当

$$f_x^0 \cdot (x - x^0) \geqq f(x) - f(x^0), \forall x, x^0 \in X \tag{8}$$

(ii) f 是严格凹函数，当且仅当

$$f_x^0 \cdot (\dot{x} - x^0) > f(x) - f(x^0), \forall x, x^0 \in X, x \neq x^0 \tag{9}$$

(iii) f 是拟凹函数，当且仅当

$$f(x) \geqq f(x^0)$$

推出

$$f_x^0 \cdot (x - x^0) \geqq 0, \forall x, x^0 \in X \tag{10}$$

对于可微的显式拟凹函数，好像还没有像如上所述的根据函数梯度来说明的简单描述(见 Mangasarian，1969，140 页)

609 定理 B.3 将伪凹性的两个概念与凹性的两个概念联系起来. 定理 B.3 中的命题，除涉及严格伪凹性的那条，在 Mangasarian(1969，144～145 页)中说明.

【定理 B.3】

(i) 每个严格凹函数都是严格伪凹函数.

(ii) 每个凹函数都是伪凹函数.

(iii) 命题(i)和(ii)的逆命题不成立.

(iv) 严格伪凹性既不是凹性的必要条件，也不是其充分条件.

证明： 从(6)至(9)显然可得出(i)和(ii). 要证明(iii)，只需给出 Mangasarian(1965，1969，145 页)的以下例子就足够了.

【例 B.1】 令 $f = R \to R$，定义为

$$f(x) = x + x^3$$

显然，对 $x > 0$，f 在 R 上是非凹的. 但它在 R 上是伪凹的，因为 $f'(x) = 1 + 3x^2 > 0$，且

$$f_x^0 (x - x^0) \leqq 0 \Rightarrow x - x^0 \leqq 0 \Rightarrow x^3 \leqq (x^0)^3$$

$$\Rightarrow f(x) \leqq f(x^0)$$

(注意这个函数也是伪凸的.)另一个例子也许有用. 令 $f: R \to R$，定义为

$$\begin{aligned} f(x) &= 0.5x^2 + 0.5, && \text{当 } x \geqq 1 \\ f(x) &= x, && \text{当 } -1 \leqq x \leqq 1 \\ f(x) &= -0.5x^2 - 0.5, && \text{当 } x \leqq -1 \end{aligned} \tag{11}$$

这个函数在 R 上关于 x 连续可微. 容易看出(7)满足，因此 f 是严格伪凹函数(也是伪凹的)，而当 $x > 1$ 时，f 不是凹的. 要说明命题(iv)，只需证明凹性不必推出严格伪凹性. 为此，我们考虑例 B.2.

610 **【例 B.2】** 令 $f:R\to R$,定义为 $f(x)=1,\forall x\in R$. f 显然是凹函数.但是,因为对所有 x,$f'(x)=0$,所以 f 不是严格伪凹函数.

现将伪凹性的两个概念同显式拟凹性和严格拟凹性的两个概念联系起来.

【定理 B.4】[6] 每个伪凹函数都是显式拟凹函数,而逆命题不成立.

证明:为证明是第一个结论,令 $f(x)>f(x^0),x,x^0\in X,x\neq x^0$.假定 f 不是显式拟凹函数.那么由(2)我们有

$$F(\theta)\equiv f[\theta x+(1-\theta)x^0]\leqq f(x^0)=F(0),0\leqq\theta\leqq 1$$

这暗含 $F'(0)\leqq 0$.因为 $F'(0)=f_x^{0\prime}(x-x^0)$,我们有 $f_x^{0\prime}(x-x^0)\leqq 0$.这与 f 是伪凹函数矛盾.要证明逆命题不成立,考虑例 B.3.

【例 B.3】 令 $f:R\to R$ 由 $f(x)=x^3$ 定义.显然,f 是严格拟凹函数,因此也是显式拟凹函数.令 $x^0=0$ 且 $x=1$,易看出 $f_x^{0\prime}(x-x^0)=0$. (证毕)

【定理 B.5】 每个严格伪凹函数都是严格拟凹函数,而逆命题不成立.

证明:与定理 B.4 的证明类似,因此不再赘述.

例 B.3 也为逆命题不成立提供了例子.回想(7),我们可由定理 B.5 得出以下结论:

【推论】 如果(7)成立,则 f 是严格拟凹函数.

这一推论的逆命题不必成立.为证明这个,仍考虑例 B.3,并注意 $f_x(0)=0$.

分别用(C)、(SC)、(PC)、(SPC)、(EQC)、(SQC)和(QC)来表示"凹性"、"严格凹性"、"伪凹性"、"严格伪凹性"、"显式拟凹性"、"严格拟凹性"和"拟凹
611 性",我们可在图 B.1 中将定理 B.1~B.5 中得到的这些概念的逻辑关系系统地表示出来.所有的推出关系由单箭头表示.没用箭头标出的一般不为真.图 B.1 表明,拟凹函数是我们研究的最大的一类,严格凹的函数则是最小的一类.

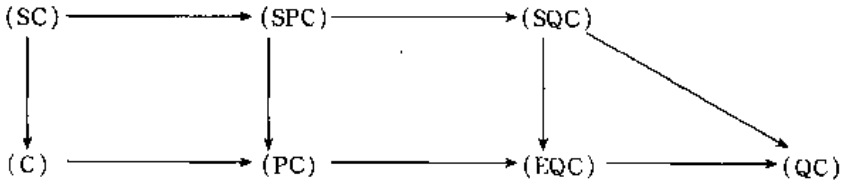


图 B.1 7 种凹性间的逻辑关系

§ B.2 非零梯度的作用

令 $f(x)$为定义在 R^n 中一个开凸集 X 上的连续可微实值函数.令 f_x 为其梯度向量.在这一部分,我们将研究 $f_x\neq 0$ 对凹性不同概念间的关系的含

义.在经济学运用中,如果将 $f(x)$理解为一个人的效用函数,当消费者对至少一种商品不饱和时,条件 $f_x \neq 0$ 是满足的.如果 $f(x)$理解为一个生产函数,那么当至少一种要素的边际生产力为正时条件 $f_x \neq 0$ 满足.因此,在将拟凹规则的结论结合运用到经济学和其他领域中时条件 $f_x \neq 0$ 是十分重要的.

在这一节将得到的一个结论可如定理 B.6 中所述.

【定理 B.6】 假设对 $\forall x \in X, f_x \neq 0$,那么 f 的下面三个性质是等价的:

(i) $f(x)$是拟凹函数;

(ii) $f(x)$是显式拟凹函数;

612 (iii) $f(x)$是伪凹函数.

令 x^0 为 X 中某点,并假定 $f_x^0 \neq 0$.本节的一个关键概念是这样一个集合:

$$P(x^0) \equiv \{x \in X : f_x^{0\cdot}(x - x^0) = 0\} \tag{12}$$

它表示在 x^0 点与上水平集 $L(x^0) \equiv \{x \in X : f(x) \geqq f(x^0)\}$ 相切的超平面.我们首先证明引理 B.3 的结论.

【引理 B.3】 令 $f(x)$为 X 上的一个拟凹函数,假设对某 $x^0 \in X$,有 $f_x^0 \neq 0$.那么我们有

$$\text{对所有 } x \in P(x^0), f(x) \leqq f(x^0) \tag{13}$$

证明:假设结论不成立,即存在一个 $x \in P(x^0)$,使得 $f(x) > f(x^0)$.由于 f 是连续的,我们能选择 $h \in R^n$,使得 $(x + h) \in X$,且

$$f(x + h) \geqq f(x^0) \tag{14}$$

此外,因为 $f_x^0 \neq 0$,我们可选择这样一个 h 以满足 $f_x^{0\cdot} h < 0$.令 $z \equiv x + h$.那么因此我们看到

$$f_x^{0\cdot}(x - x^0) = f_x^{0\cdot}(z - h - x^0) = f_x^{0\cdot}(z - x^0) - f_x^{0\cdot} h = 0$$

因此我们有

$$f_x^{0\cdot}(z - x^0) < 0 \tag{15}$$

因为 f 是拟凹函数,用(10)的逆否叙述形式,(15)推出 $f(z) < f(x^0)$,这与(14)矛盾. (证毕)

使用引理 B.3,我们可证明定理 B.7 中的结论.

【定理 B.7】 令 $f(x)$为 X 上的一个拟凹函数.假设

$$\text{对所有的 } x \in X, f_x \neq 0 \tag{16}$$

那么 f 是伪凹函数.

613 **证明**:假定 f 不是伪凹函数,那么由(6),存在 $x^0, x^1 \in X$,且 $x^0 \neq x^1$,使得

$$f(x^1) > f(x^0) \text{且} \quad f_x^{0\cdot}(x^1 - x^0) = 0 \tag{17}$$

其中，f 的拟凹性排除了 $f_x^{0\cdot}(x^1-x^0)<0$ 的可能性. (17)式表明，$x^1\in P(x^0)$，但 $f(x^1)>f(x^0)$，这与(13)矛盾. （证毕）

注：定理 B.7 的逆定理不成立. 为说明这个，考虑例 B.4.

【例 B.4】 令 $f:R\to R$ 由 $f(x)=-x^2$ 定义. 因为 f 是(严格)凹函数，所以它也是伪凹(也是拟凹)函数. 但是，$f_x(0)=0$.

因为根据定理 B.4 每个伪凹函数都是显式拟凹函数，且因为每个显式拟凹函数都是拟凹函数，所以定理 B.6 立刻由定理 B.7 得出. 定理 B.7 指明了 $f_x\neq 0$ 对拟凹性和伪凹性之间关系的作用. 我们现在将指明 $f_x\neq 0$ 对于严格拟凹性和严格伪凹性关系上的作用. 这一分析与前例相似，是用类似的方法证明与引理 B.3 和定理 B.7 类似的结果. 与(12)中定义的 $P(x^0)$ 相应，我们现定义

$$\bar{P}(x^0)\equiv\{x\in X: f_x^{0\cdot}(x-x^0)=0, x\neq x^0\} \tag{12'}$$

【引理 B.4】 令 $f(x)$ 是 X 上的一个**严格**拟凹函数，且对某 $x^0\in X$，令 $f_x^0\neq 0$. 那么我们有

$$\text{对所有的 } x\in\bar{P}(x^0), f(x)<f(x^0) \tag{13'}$$

证明：假设存在一个 $x\in\bar{P}(x^0)$，使得 $f(x)\geqq f(x^0)$. 因为 f 是严格拟凹函数，由定义，我们有

$$f(x)\geqq f(x^0)$$

推出

$$f(\bar{x})>f(x^0), \forall\, x, x^0\in X, x\neq x^0, 0<\theta<1$$

其中，$\bar{x}\equiv\theta x+(1-\theta)x^0$. 由 $\bar{x}$ 的定义，并注意

$$f_x^{0\cdot}(\bar{x}-x^0)=\theta f_x^{0\cdot}(x-x^0)=0$$

614 我们可得出结论 $\bar{x}\in\bar{P}(x^0)$. 由于 f 是连续的且 $f_x^{0\cdot}\neq 0$，我们可选择 $h\in R^n$，$x+h\in X$，如同引理 B.3 的证明那样，使得

$$f(x+h)\geqq f(x^0), \text{且 } f_x^{0\cdot}h<0 \tag{18}$$

令 $z\equiv\bar{x}+h$，那么可看出

$$0=f_x^{0\cdot}(\bar{x}-x^0)=f_x^{0\cdot}(z-h-x^0)=f_x^{0\cdot}(x-x^0)-f_x^{0\cdot}h$$

因为由(18)有 $f_x^{0\cdot}h<0$，我们有

$$f_x^{0\cdot}(z-x^0)<0$$

因为 f 是拟凹函数，用(10)式的逆否叙述形式，由 $f_x^{0\cdot}(z-x^0)<0$ 推出

$f(z)<f(x^0)$,这与(18)中 $f(z)\leqq f(x^0)$矛盾. (证毕)

由引理B.4,可得定理B.8中的结论.

【定理B.8】 令 $f(x)$为 X 上的一个严格拟凹函数,并假定(16)成立.那么 f 是一个严格伪凹函数.

证明:假设结论不成立,即假定存在 $x^0, x^1 \in X, x^0 \neq x^1$,使得

$$f(x^1)\geqq f(x^0), \text{且} f_x^0(x^1 - x^0) = 0 \tag{17'}$$

其中,f 的拟凹性排除了 $f_x^0(x^1 - x^0)<0$ 的可能性.但因为根据假设(16),f 是一个严格拟凹函数,由引理B.4我们得到(13').这与(17')矛盾. (证毕)

将此与定理B.5结合,我们可以立刻得出以下结论:

推论:给定(16),即对所有 $x \in X, f_x \neq 0$,f 是严格拟凹函数,当且仅当它是严格伪凹函数.

凹性的各个概念都是全局概念.在以后对于拟凹规划的讨论中,定义某些"局部"概念将是很方便的.

【定义B.6'】 函数 f 被认为在 x^0 处是**局部伪凹**,如果 $f_x^0 \neq 0$,且

$$f(x)>f(x^0) \Rightarrow f_x^0(x - x^0)>0, \forall x \in X \text{ 且 } x \neq x^0 \tag{6''}$$

615 **【定义B.7'】** 函数 f 被称为在 x^0 处是**局部严格伪凹**,如果

$$f(x)\geqq f(x^0) \Rightarrow f_x^0(x - x^0)>0, \forall x \in X \text{ 且 } x \neq x^0 \tag{7'}$$

浏览一下定理B.7'和B.8的证明,我们容易看出这些定理可扩展如下:

【定理B.7'】 令 $f(x)$是 X 上的一个拟凹函数,假定

$$\text{对某 } x^0 \in X, f_x^0 \neq 0 \tag{16'}$$

那么 f 在 x^1 处是局部伪凹函数.

【定理B.8'】 令 $f(x)$是 X 上的一个严格拟凹函数,并假定(16').那么 f 在 x^0 处是局部的严格伪凹函数.

§B.3 拟凹规划

令 $f, g_1, g_2, \cdots, g_m$ 是定义在 R^n 中的实数值连续可微的拟凹函数.考虑如下问题:选择 $x \in R^n$,使得

(QCP) Maximize $f(x)$

约束条件为

$$g_1(x)\geqq 0, \cdots, g_m(x)\geqq 0, x \geqq 0$$

这一问题被称为**拟凹规划问题**(QCP),Arrow 和 Enthoven(1961)讨论了这一问题.[7]集合 S 定义为

$$S \equiv \{x \in R^n : g_1 \geqq 0, g_2(x) \geqq 0, \cdots, g_m(x) \geqq 0, x \geqq 0\}$$

它是问题(QCP)的约束集. 令 x^0 为(QCP)的一个解,记作

616 (M) 存在一个 x^0,当 $x \in S$ 时,使得 $f(x)$ 最大

令 $g = (g_1, g_2, \cdots, g_m)$,且 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)$. (按通常方法)定义拉格朗日函数为

$$\Phi(x, \lambda) \equiv f(x) + \lambda \cdot g(x)$$

那么一阶条件(FOC)可写作

(FOC) 存在一个 (x^0, λ^0), $x^0 \geqq 0$, $\lambda^0 \geqq 0$,使得

$$\Phi_x^0 \leqq 0, \Phi_x^0 \cdot x^0 = 0, g(x^0) \geqq 0, \lambda^0 \cdot g(x^0) = 0 \tag{19}$$

其中 Φ_x^0 表示 Φ 关于 x 的在 (x^0, λ^0) 处赋值的梯度向量. 令 g_x^0 为 g 的在 x^0 处赋值的雅可比矩阵,因此 g_x^0 是一个 $m \times n$ 矩阵. 众所周知,我们可以将 $\Phi_x^0 \leqq 0$ 和 $\Phi_x^0 \cdot x^0 = 0$ 分别重写为

$$f_x^0 + \lambda^0 g_x^0 \leqq 0, \text{以及} (f_x^0 + \lambda^0 g_x^0) \cdot x^0 = 0$$

其中 $\lambda^0 g_x^0$ 的乘法规则是不言自明的.

显然,由(FOC)不能推出条件(M). Arrow 和 Enthoven(1961)提出了以下著名结论,这在第 2 章中讨论过:

【定理 B.9】 由条件(FOC)推出条件(M),如果以下任一条件被满足,其中 $f_{x_i}^0 = \partial f(x^0)/\partial x_i$:

(i) 对某 i, $f_{x_i}^0 < 0$;

(ii) 对某个"相关的 i,"有 $f_{x_i}^0 > 0$;

(iii) $f_x^0 \neq 0$,且 f 是二阶连续可微的(即 $f \in C^2$);

(iv) f 是凹函数.

其中,如果约束集 S 中存在一个 $\bar{x}$,使得 $\bar{x}_i > 0$,那么第 i 个坐标变量 x_i 就被称作一个"相关"变量.

注:注意条件(i)、(ii)和(iii)只要求 f 的拟凹性.

617 有人可能会认为 f 的凹性的限制太强,而宁愿接受 f 的拟凹性. 在这部分中,我们将探究我们能走多远. 回想图 B.1,易见仅次于拟凹性的是显式拟凹性或严格拟凹性. 但是,很明显如下述结论说明的,这是不行的.

如果 f 是显式拟凹函数,或如果 f 是严格拟凹函数,由(FOC)不一定推出(M).

为了说明这个问题,给出下面的例子就足够了:

【例 B.5】 令 $f: R \to R$,定义为

$$f(x) = (x-1)^3$$

注意，f 是严格拟凹函数，因此也是显式拟凹函数. 假设没有 g 约束，那么 $x^0=1$ 满足(FOC)，但 $x^0=1$ 不是(QCP)的解.

图 B.1 中仅次于显式拟凹性或严格拟凹性的概念是伪凹性或严格伪凹性，我们现在证明以下结论. 第一条结论由 Mangasarian(1969，151～153 页)得到.

【定理 B.10】 假设 $g_1,\cdots,g_m$ 都是拟凹的.

(i) 如果 f 是伪凹的，那么由(FOC)推出(M).

(ii) 如果 f 是严格伪凹的，那么由(FOC)推出(M)，并且 x^0 是惟一的整体极大解.

证明：遵循 Arrow 和 Enthoven(1961)，我们考虑以下恒等式：

$$f_x^0\cdot(x^1-x^0)=(f_x^0+\lambda^0 g_x^0)\cdot(x^1-x^0)-(\lambda^0 g_x^0)\cdot(x^1-x^0) \tag{20}$$

假定 x^0 满足(FOC)，且 $x^1\in S$，那么 $(f_x^0+\lambda^0 g_x^0)\cdot(x^1-x^0)\leqq 0$. 也就是说，(20)等号右边第一项是非正的. 如果 $\lambda_j^0=0$，那么第二项的第 j 个元素将为 0. 如果 $\lambda_j^0>0$，那么由(FOC)有 $g_j(x^0)=0$. 因为 $x^1\in S$，$g(x^1)\geqq 0$. 因为 $g_j(x)$ 对所有 j 都是拟凹的，根据(10)我们有

$$\text{对所有的 } j,\ g_{jx}^0\cdot(x^1-x^0)\geqq 0 \tag{21}$$

其中 g_{jx}^0 是 g_j 的梯度向量. 因此我们可得 $-(\lambda^0 g_x^0)\cdot(x^1-x^0)\leqq 0$. 等式(20)右边的第二项非正. 因此我们有

$$f_x^0\cdot(x^1-x^0)\leqq 0 \tag{22}$$

因为 f 是伪凹的，从(22)和(6′)我们得到

$$\text{对所有 } x^1\in S,\ f(x^0)\geqq f(x^1) \tag{23}$$

这完成了命题(i)的证明. 为证明(ii)，令 f 是严格伪凹的. 由(7′)，我们可得

$$\text{对所有 } x^1\in S,\ f(x^0)>f(x^1) \tag{24}$$

既然每个严格伪凹函数都是严格拟凹的，由(24)立即得到解的惟一性.[8]

(证毕)

注：$g_1,\cdots,g_m$ 都是拟凹的假设可放松为约束集 S 是凸集的假设. 之所以这样，是因为如果 $S\equiv\{x\in R^n: g_1(x)\geqq 0,\cdots,g_m(x)\geqq 0, x\geqq 0\}$ 是凸集，对所有的 $x\in S$ 和对所有使 $g_j(x^0)=0$ 的约束，我们有

$$g_{jx}\cdot(x-x^0)\geqq 0 \tag{25}$$

这个结论可用来代替以前证明的(21). 要证明(25)，首先注意到 S 是凸集，对于所有的 $x^1\in S$ 和对所有 j，

$$g_j[(1-\theta)x^0+\theta x^1]\geqq 0,\ 0\leqq\theta\leqq 1$$

其中，$g_j(x^1)\geqq g_j(x^0)=0$. 令 $G_j(\theta)\equiv g_j[(1-\theta)x^0+\theta x^1]$，那么 $G_j(\theta)\geqq$

$g_j(x^0)=G_j(0)$. 这样 $G'_j(0)\geqq 0$. 因此对 $G_j(\theta)$ 微分，并令 θ 等于零，对所有 j，我们有

$$\text{对所有 } j, g_j(x)\geqq g_j(x^0)\Rightarrow g^0_{jx}\cdot(x^1-x^0)\geqq 0 \tag{26}$$

最后，我们将 Mangasarian 的定理(定理 B.10)同 Arrow－Enthoven 定理
619 (定理 B.9)联系起来. 因为根据定理 B.3 每个凹函数都是伪凹函数，显然 Mangasarian 定理针对的是 Arrow 和 Enthoven 定理的条件(iv). 这样，要想把定理 B.10 和 B.9 联系起来，我们只需把注意力集中于 Arrow 和 Enthoven 条件(i)至(iii)上. 我们可回想我们在 B.2 部分中得到的结论.

复习一下定理 B.10 的论证，我们易得定理 B.11 中的结论.

【定理 B.11】 假设约束集 S 是凸集. 如果 f 在 x^0 处是局部伪凹函数，那么(FOC)推出(M)，其中(FOC)和(M)都根据 x^0 来定义.

回忆定理 B.7′，这一结论可立即改述为定理 B.12.

【定理 B.12】 假设约束集 S 是凸集. 如果 f 是拟凹函数，且如果条件(16′)成立，则(FOC)推出(M)，其中(FOC)和(M)都根据 x^0 来定义.

条件(16′)，$f_x^0\neq 0$，归纳了 Arrow－Enthoven 定理(定理 B.9)的条件(i)、(ii)和(iii). 特别地，我们可去掉 Arrow－Enthoven 定理中“相关”变量的概念.

▶ 注　释

[1]此附录基于 Ide 和 Takayama(1988)，这里的许多概念都在第 2 章中介绍过.

[2]与此处讨论的七种凹性相对应，还有七种凸性. 只需在相应的凹性函数前加上“－”号即可得到这七种凸性. 对这七种凸函数与此处的凹性函数关系类似的关系也可得到.

[3]符号∀读作“对所有”.

[4]严格凹性的这个定义有别于 Ponstein(1967)所提出的并由 Mangasarian(1969)所讨论的定义. 他的“严格拟凹性”对应于我们的显式拟凹性，而我们的严格拟凹性则对应于他的“无名凹性”. 显式拟凹性的概念(及其命名)是由 Martes(1967)提出并由 Thompson 和 Parke(1973)进一步讨论的. 我们的七种凹性与 Ponstein(1967)讨论的七种凹性相对应，只在显式拟凹性和严格拟凹性的命名上有所不同.

[5]对于上半连续的概念，参见 Takayama(1985，239 页).

[6]这一定理来自 Mangasarian(1965)，我们的证明比他的证明在某种意义上更简单.

[7]Arrow 和 Enthoven 的著作(1961)在一些地方被反复阐释并有新的发展. 如见 Mangasarian(1969，151～152 页)，Murata(1977，317～320 页和 322～

323 页),及 Uekawa 和 Kimura(1987,81－88 页),但是,Arrow 和 Enthoven 著作的基本东西仍然作为标准的参考材料. Mangasarian(1961,151～152 页)根据一个伪凹性目标函数完成了一项重要的总结工作. 仍见 Martos(1975,125～126 页).

[8]假设不是:令 x^0 和 x^* 都满足(FOC),令 $\bar{x}=\theta x^0+(1-\theta)x^*$,$0<\theta<1$,因为 g 都是拟凹函数,所以 S 是凸集. 利用 f 的严格拟凹性,有 $f(\bar{x})>f(x^0)=f(x^*)$,这与(17)矛盾.

▶ 参考文献

Arrow, K. J., and A. C. Enthoven. 1961. "Quasi-Concave Programming." *Econometrica* 29 (October): 779－800.

Diewert, W. E., M. Avrel, and I. Zang. 1979. "Nine Kinds of Quasi-concavity and Concavity." Discussion Paper no. 79－29. University of British Columbia.

Ide, T., and A. Takayama. 1988. "Seven Kinds of Concavity and Quasi-Concave Programming: A Survey of Some Results and Extensions." Discussion Paper Series, no. 88－8. Southern Illinois University at Carbondale.

Karamardian, S. 1967. "Duality in Mathematical Programming." *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 20 (November): 344－58.

Mangasarian, O. E. 1965. "Pseudo-Convex Functions." *SIAM Journal on Control* 3: 281－90.

_____. 1969. *Nonlinear Programming*. New York: McGraw-Hill.

Martos, B. 1967. "The Direct Power of Adjacent Vertex Programming Methods." *Management Science*, ser. A, 12 (November): 241－52.

620 _____. 1975. *Nonlinear programming: Theory and Methods*. Amsterdam: North-Holland.

Murata, Y. 1977. *Mathematics for Stability and Optimization of Economic Systems*. New York: Academic Press.

Newman, P. 1969. "Some Properties of Convex Functions." *Journal of Economic Theory* 1 (October): 291－314.

Ponstein, J. 1967. "Seven Kinds of Convexity." *SIAM Review* 9 (January): 115－99.

Takayama, A. 1985. *Mathematical Economics*. 2d. ed. New York: Cambridge University Press.

Thompson, W. A., Jr. and D. W. Parke. 1973. "Some Properties of Generalized Concave Functions." *Operations Research* 21 (January/February): 305－13.

Uekawa, Y., and Y. Kimura. 1987. *Economic Theory* (in Japanese). Tokyo: Toyo Keizai Shimpo-sha.

附录 C　消费者剩余[1]

§C.1　导言

621　消费者剩余的概念由来已久，并已被广泛运用于应用经济学中.但在理论水平上，经济学家们尚未达成显著一致.[2]有关“马歇尔(Marshall)三角形”的概念产生于 Dupuit(1844)，后由 Marshall(1890,1920)所推广，其中他已适当地意识到收入边际效用不变的重要性(1920,842 页). 在《价值和资本》(1939)中，Hicks 建议用“补偿性变动”来解释消费者剩余. Henderson(1941)指出，除非需求的收入效应可以忽略不计，否则这些标准不同于 Marshall 的概念. Hicks(1941,1942,1943,1945 和 1946)在这一课题上进行了一系列著名的研究，在这些研究中，他认为他的补偿性变动和等价性变动的概念对于衡量一个消费者的福利变化来说十分关键. Hicks(1941,166 页)评论说：“消费者剩余不仅仅是一个经济学玩意儿，或古董般奇怪的东西，它是经济学一个重要分支的基石.”Sono(1943)出版了一部重要著作(虽然实际上在日本之外无人注意)，在书中他适当地强调了 Dupuit 的贡献. Samuelson(1942,1947,195～197 页)根本不喜欢消费者剩余的概念，但这些概念仍不失为应用经济学的重要分析工
622　具.事实上，争论在近来变得更加激烈，特别是在 70 年代之后产生了许多令人

感兴趣的著作.[3]许多著作为这一课题提供了有用的研究，如 Currie, Murphy 和 Schwitz(1971)；Chipman 和 Moore(1976)；Ng(1980，第 4 章)；Just, Hueth 和 Schmitz(1982)；Chipman(1982)；G. McKenzie(1983)；Boadway 和 Bruce(1984)，及 Takayama(1982, 1984 和 1987)[4]. 在讨论过程中，Mohring(1971)和 Silberbeg(1972 和 1990)，在对消费者剩余的研究中，适当强调了线性积分和路径独立的重要性，Hotelling(1938)和 Sono(1943)也意识到了这一点. 具有对线性积分和路径独立更完整讨论的消费者剩余概念的形成是由 Chipman 和 Moore(1976 和 1980)完成的，他们利用 Samuelson(1942)的重要研究，将对相关的线性积分的估计与收入的边际效用的不变性联系了起来.

在这一附录中，我们将系统地、清晰地整理一下对这一课题进行讨论的各种不同思路，以排除对这一课题的一些误解，并获得对分析框架的一个清楚认识. 我们将证明，如果福利测度定义正确，则它总是与路径无关，因此路径独立实际上便不成问题了. 我们将利用收入的边际效用不变来说明其分析方法，并将说明，在这一种条件下，Marshall 标准实际是衡量福利变化的准确尺度. Willig(1976 和 1979)相信，Hicks 的补偿和等价变量测度是正确的测度，并且可由 Marshall 标准近似得到. 我们将证明，Marshall 标准和 Hicks 测度之间差别可以很大(甚至可为无穷大). 此外，Willig 没有就 Hicks 测度为什么是正确尺度这一问题给出一个满意的证明. G. McKenzie(1983)认为等价变动的概念是正确的，我们证明这仍有困难.

马歇尔三角和路径独立

623

在结束导言部分之前，熟悉一下马歇尔三角和路径独立的概念是有益的. 考虑一个消费者选择消费束 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在预算约束 $p\cdot x(\equiv\sum p_i x_i)\leq Y$ 和 $x\geqq 0$ 的约束下，使一个实数值效用函数 $u(x)$ 最大，其中，$Y>0$ 是他或她的(名义)收入，且 $P=(P_1, P_2, \cdots, P_n)$ 是一个名义价格向量. 假定消费者是价格的接受者. 为了简便，我们假定对最优点处的每个 i，都有 $P_i>0$，且 $u_i(=\partial u/\partial x_i)>0$(局部不满足)，并假定 $u(x)$ 二次连续可微. 再假设有一个内部解(即对最优点处的所有 i 有 $x_i>0$)，最优点的一阶条件由

$$u_i(x)=\lambda P_i, i=1,2,\cdots,n, \text{且 } P\cdot x=Y \tag{1}$$

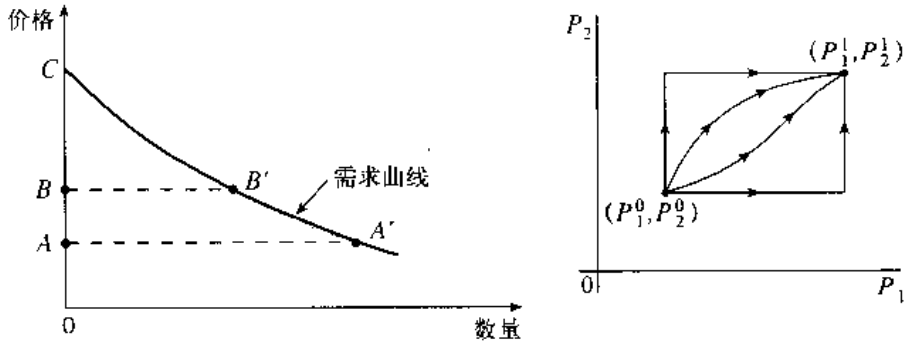
给出. 其中，λ 是拉格朗日乘数. 明显地，在最优点处，$\lambda>0$. 假定 u 是严格拟凹函数，(1)满足取惟一全局最大值的充要条件. (1)中的 $(n+1)$ 个等式决定了 $\lambda(P, Y)$ 和 n 个商品的需求函数.

$$x_i=x_i(P_1, P_2, \cdots, P_n, Y)=x_i(P, Y), i=1,2,\cdots,n$$

这一函数是 P 和 Y 的零次齐次函数. 令 $Q^0=(P^0, Y^0)$ 和 $Q^1=(P^1, Y^1)$ 分别为“开始”和“结束”状态，考虑一个单独的价格变化，即

$$P_1^0 \neq P_1^1, P_i^0 = P_i^1, i = 2,3,\cdots,n, Y^0 - Y^1$$

Marshall 认为这一价格变化对福利的影响可由商品 1 的需求曲线左边的四边(梯形)形来衡量. 这是 Marshall 继 Dupuit 之后提出的著名的消费者剩余概念.[5]在图 C.1(a)中,这条下降的曲线即是商品 1 的需求曲线.[6]



(a) 马希尔三角　　(b) 路径的独立性

图 C.1　消费者剩余

624　当价格是 OA 时,消费者剩余可由 $\Delta AA'C$ 来衡量,[7]如果由于税收等原因使价格升到 OB,那么消费者损失由阴影部分的梯形 $ABB'A'$ 来表示. 类似地,如果价格由 OB 降到 OA,消费者获益显由 $ABB'A'$ 来表示,[8]注意到 $OA = P_1^0$ 且 $OB = P_1^1$,梯形区域 $ABB'A'$ 由 Marshall 三角形决定,它可简单记作

$$T \equiv -\int_{P_1^0}^{P_1^1} x_1(P_1, P_2^0, \cdots, P_n^0, Y^0)\,dP_1 \tag{2}$$

625　这里,加上负号是为了反映出价格上升导致的消费者损失. 我们称(2)为 **Dupuit－Marshall 标准**,或简称 **D－M 标准**.

虽然(2)中定义十分简单,但它带来的问题多于它解答的问题. 一般地,x_1 取决于其他商品价格和收入. 如果收入和其他任何一种商品的价格发生了变化,需求曲线就会变动,T 就不再能准确定义. 在上述研究之后,Hicks 介绍了消费者剩余的四个概念. 这四个概念都与 Dupuit-Marshall 的概念不同,其中的补偿变动和等价变动最引人注目. 正如 Hicks 现在所说的(1981,115 页)那样,提出这四个概念的主要动机是"将分析扩展到可以涵盖一种以上价格变化的情况."[9]另一方面,一个以上的价格变化,就有新问题产生. 这就是,福利尺度,无论其定义如何,是否与一个价格变化的特定途径相独立的问题. 图 C.1b 说明价格可以有(无限)多条途径. 于是我们自然会希望消费者剩余,无论如何定义,不管价格变化的路径如何,能取惟一值. 即使只有一个价格发生变化,只要收入变化(比如,由于所得税),同样的问题也会出现. 这就是路径独立的问题.

Silberberg(1972)沿袭 Dupuit－Marshall 的传统并用以下线性积分(P^0 到 P^1)来定义多个价格变动下的消费者剩余,[10]

$$T=-\int_{P^0}^{P^1}\sum_{i=1}^{n}x_i(P,Y^0)dP_i \tag{2'}$$

当 $P_i^0=P_i^1, i\neq 1$ 时，T 转化为 D－M 标准．后来他发现路径独立条件要求所有的需求函数 x_i 都是位似的．与此结论相对，易证补偿变动和等价变动自动满足路径独立的条件（如 Willig 1979，Suzumura 1985）．此外，虽然这些希
626 克斯测度以序数效用论为基础，却可提供货币衡量尺度（如美元）．它们“简单、清晰，且在帕累托状态下各司其职”．（Mishan，1977，1 页）．我们称这些希克斯标准为 **H 标准**．

§C.2 一些基础知识

这里，我们收集一下以后讨论所需要的资料．所有这些资料都在第三章中讨论过．假定需求函数 $x_i(P,Y), i=1,2,\cdots,n$ 和相关的拉格朗日乘数 $\lambda(P,Y)$，都连续可微．这样，我们得到 Hicks－Slutsky 方程[11]

$$\partial x_i/\partial P_j=S_{ij}-x_j(\partial x_i/\partial Y), i,j=1,2,\cdots,n \tag{3}$$

其中 S_{ij} 是净替代效应．如同在第 3 章中所讨论的那样，$n\times n$ 矩阵 $S\equiv[S_{ij}]$ 称作**净替代矩阵**或 **Slutsky 矩阵**．定义函数

$$U(P,Y)\equiv u[x(P,Y)] \qquad \text{（间接效用函数）}$$

很明显，$U(P,Y)$ 是零次齐次函数．假定它二次连续可微．运用包络线定
627 理，对所有有关的 (P,Y)，易得

$$\partial U(P,Y)/\partial P_i=-\lambda(P,Y)x_i(P,Y)<0, i=1,2,\cdots,n \tag{4a}$$

$$\partial U(P,Y)/\partial Y=\lambda(P,Y)>0, \text{且} \tag{4b}$$

$$\partial U(P,Y)/\partial P_i+x_i\partial U(P,Y)/\partial Y=0, i=1,2,\cdots,n$$

（Roy 恒等式） (4c)

与以上问题相对偶，我们会想到在 $u(x)\geqq u$ 且 $x\geqq 0$ 时，找到一个 x 使得支出 $P\cdot x$ 最小．令 $x^*(P,u)$ 为这一问题（**补偿需求函数**）的解，且令 $e(P,u)=P\cdot x^*(P,u)$（**最低支出函数**）．然后令 $S^*\equiv[x_{ij}^*]\equiv[\partial x_i^*/\partial P_j]$，$S^*$ 是对称的且半负定．

与我们当前课题有关的对偶理论的主要命题有

$$Y=e[P,U(P,Y)], x(P,Y)=x^*[P,U(P,Y)] \tag{5a}$$

$$x[P,e(P,u)]=x^*(P,u), \text{且} \tag{5b}$$

$$U[P,e(P,u)]=u \tag{5c}$$

注意，(5a)之后的(5b)对 P_j 对微分，得到(3)式，其中，$S_{ij}(P, Y) \equiv x_{ij}^*[P, U(P, Y)]$. 这样，我们可以推断，矩阵 S 也是对称的和半负定的. 另外，有 $\partial e / \partial P_j = x_j^*(P, u)$，Shephard 引理.

§ C.3 计算 Hicks 标准

我们将讨论 H 标准，补偿性和等值性变动. 根据 Hicks(如 1956，177 页)及 Willig(1976，590 页)的观点，**补偿性变动**是指一个人在物价变动之后，为使其福利状况与原来保持相同所需增加(或减少)的收入. 我们用 C 来表示补偿变动，它可用以下符号定义：

$$U(P^0, Y^0) = U(P^1, Y^0 + C) \tag{6}$$

或由(5c)定义为 $C = e[P^1, U(P^0, Y^0)] - Y^0$. 给定 P^0 和 P^1，当且仅当 $Y^1 - Y^0 > C$ 时，个人生活水平才比原来有所改善. 另一方面，**等值变动**定义为：与价格变化对一个人的效用影响有相同效应的一个收入变化量. 用 E 来表示等价变量，它可由下式定义为

628

$$U(P^1, Y^0) = U(P^0, Y^0 - E) \tag{7}$$

或由(5c)定义为 $E = Y^0 - e[P^0, u(P^1, Y^0)]$. 我们可将 C 和 E 图解为图 C.2 中所示，其中将 P_i 假定为除 $i = 1$ 外皆为常数.

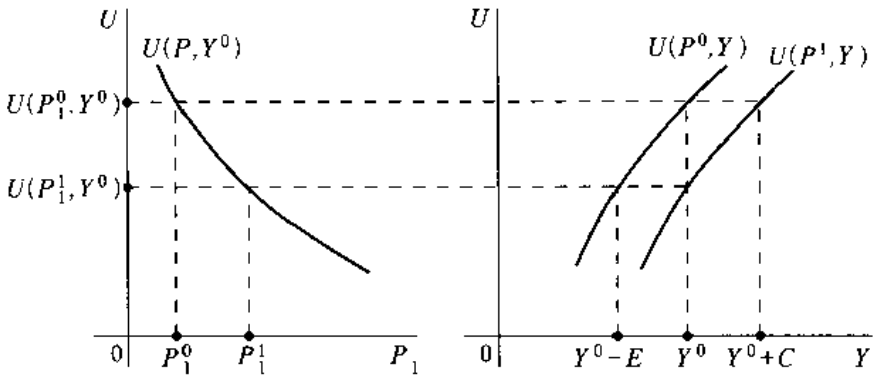


图 C.2 补偿和等值变动

H 标准一个明显的困难是，由于 U 不可观察，H 标准无法从经验数据中计算出来. 为克服这一困难，Willig(1976)认为，在一定的假设下，D－M 标准可作为 H 标准的近似值. 他认为 H 标准是“正确”的福利标准. Seade(1978)直接假设所有的 Engel 曲线都是线性的(这与 Gorman 的拟位似性相符)，由此得到“可运用的”公式来计算 H 标准. Hausman(1981)放弃了这样的假设，并且试图通过假定观察到的需求函数为线性或对数线性来得到计算 H 标准的准确

公式.但是 G. McKenzie 和 Pearce(1976 和 1982)及 G. McKenzie(1983)建议用另一种方法来计算 H 标准,在这一方法中,收入边际效用的泰勒展开式起重要作用.

629 Vartia(1983)也提出了计算 H 标准的一个聪明方法.根据前面已得到的 Shephard 引理和(5b),我们可得

$$\text{由于}\frac{de(P,u^0)}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial e}{\partial P_i}\frac{dP_i}{dt},\quad \text{则}\frac{de}{dt}=\sum_{i=1}^{n}x_i[P(t),e]\frac{dP_i(t)}{dt}$$

这可被视为一个常微分方程,其中 $e(t)$ 是未知函数. Vartia 提出了三种算法来得到这一微分方程的数值解.他的"主算法"与 Harberger(1971)的福利指标有关. Nagatani(1984)指出,Vartia 的其中两个方法本质上与 Houthakker 的关于显示偏好的著名研究(1950)相同,且他的"主算法"并不比其他两个算法好.

如前所述,H 标准近来的普及,似乎是建立在序数主义革命的基础之上,对此 Hicks(1946,18 页)写道,"效用的数量概念对于解释市场现象并不是必须的.因此,根据 Occam 刀刃原则,最好不使用这些概念."但是,如同 Pareto 所认识的那样,这并不表明效用不能是基数的(见 Chipman 1976).在承受风险的情况下,Von Neumann 和 Morgenstern(1953)的文章动摇了序数主义的立场.继 Georgescu－Roegen(1952)之后,Chipman(1976,76 页)也比喻道,"任何科学原则都不能仅仅因为桌子的平衡由三条腿决定,就要求我们假设实际中的桌子只有三条腿,特别是当我们直接观察到它有四条腿时."[12]

不管采取哪种态度,我们都可看到 H 标准另外一个重要缺陷.在文献中,我们既找不到任何有力的论述来证实这些标准是"正确的"福利标准,也找不到一个有关在 H 标准差别很大时,应选择哪个的清楚论述.此外,H 标准假定

630 消费者收入不变.现在的问题是,我们该怎样修改 H 标准,使之包含收入变化的情况.这可不是轻而易举的.

在讨论消费者剩余时,我们是指单独一个消费者.现假定包括一个以上的人.在即将结束这个部分时,我们要问:是否可以使用补偿变量之和(ΣC)作为整个一群人获益或损失的衡量标准?这个问题可以叙述如下,"是否可以说,当 $\Sigma C>0$ 时,受益者就会至少抵消损失者的数量,并且价格变化至少可以导致一个潜在的帕累托改善?"Boadway(1974)发现,这个问题的答案是否定的.由于给予上述问题以肯定的回答极具诱惑,故 Ng(1980,96 页)称 Boadway 的发现为 **Boadway 悖论**.

§C.4 正确的福利标准

要找到 Q^0 到 Q^1 的变化对福利的影响,其中 $Q\equiv(P,Y)$.我们先观察以下一个明显的关系:

$$dU=\sum_{i=1}^{n}U_i dP_i+U_Y dY,\ U_i\equiv\partial U/\partial P_i,\ U_Y\equiv\partial U/\partial Y$$

自然地，应根据以下**线性积分**来定义价格和收入变化对福利的影响（用 ΔU 表示）：

$$\Delta U\equiv\int_{Q^0}^{Q^1}\left(\sum_{i=1}^{n}U_i dP_i+U_Y dY\right) \tag{8}$$

这里的一个重要问题是：我们怎么知道(8)等号右边的线性积分独立于从 Q^0 到 Q^1 的路径？但是，回想以下著名的数学结论[如，Apostol(1957)，280～281页和292页]，这问题便很容易解决了.

【引理C.1】 设 $f(x)$ 为欧几里得空间 R^n 中的一个开凸子集 D 上的连续可微函数.那么线性积分

$$I=\int_A^B f_1(x)dx_1+\cdots+f_n(x)dx_n,\ f_i=\partial f/\partial x_i \tag{9}$$

631 通过一条逐段光滑曲线[13]将 D 中的每对点 A 和 B 连接起来，它独立于路径，有惟一值，且 $I=f(B)-f(A)$.

将此用于(8)中，我们能立即推出 ΔU 是惟一的，即

$$\Delta U=U(Q^1)-U(Q^0) \tag{10}$$

且(8)中通过一条逐段光滑曲线连结每个端点 Q^0 和 Q^1 的线性积分独立于路径.此外，ΔU 是 $Q\equiv(P,Y)$ 的零次齐次式，因此 ΔU 不随 Q 的计量单位的变化而变化.

此外，根据一个著名的数学结论(如，Apostol 1957，293页)，(8)中的线性积分的独立性推出对于一切 P 和 Y，

$$\frac{\partial}{\partial P_j}\frac{\partial U}{\partial P_i}=\frac{\partial}{\partial P_i}\frac{\partial U}{\partial P_j}$$

且

$$\frac{\partial}{\partial P_i}\frac{\partial U}{\partial Y}=\frac{\partial}{\partial Y}\frac{\partial U}{\partial P_i},\ i,j=1,2,\cdots,n \tag{11}$$

因为 U 二次连续可微(因此它的海赛矩阵是对称的)，这是满足的.我们可以断定(11)是(8)中线性积分路径独立的充分(也是必要)条件.[14]

632 为得到(11)的经济解释，我们由(3)和(4)可得

$$\frac{\partial x_j}{\partial P_i}+x_j\frac{\partial x_j}{\partial Y}=\frac{\partial x_j}{\partial P_i}+x_i\frac{\partial x_j}{\partial Y},\ i,j=1,2,\cdots,n \tag{12}$$

考虑到(3)，这个条件很明显与 $S_{ij}=S_{ji}$，即 Slutsky 矩阵的对称条件等价.另外注意，这个条件为需求函数的可积分提供了条件.[15]这样，一个效用函数的存在，无论是基数的还是序数的，几乎都暗含了我们的福利标准的路径独立，反
633 之，路径独立条件也要求可积分条件，这同样保证了效用函数可以复原.总结

一下，我们有：

【定理 C.1】 (8)中的线性积分独立于路径，而且(作为结果)我们有 $\Delta U = U(Q^1) - U(Q^0)$. ΔU 标准取惟一值，仅取决于(Q^1)和(Q^0)，并且它不随 P_i 和 Y 的计量单位的变化而变化.

现在开始进行我们的分析. 将(4a)和(4b)代入(8)中，可得以下基本公式：

$$\Delta U = \int_{Q^0}^{Q^1} \sum_{i=1}^{n} (-\lambda x_i) dP_i + \lambda dY \tag{13}$$

由此可见，ΔU 取决于 λ，其中，$\lambda = \partial U / \partial Y$ 表示**收入边际效用**(MUI). 因为 λ 一般由 P 和 Y 二者来确定，所以我们需要一些假设，例如 λ 为"常数"，以进行(13)中的积分并得出有用的结论. 事实上马歇尔(1920，842 页)清楚地知道 MUI 不变这一假设的重要性. Marshall 还意识到 λ 不是严格的常数，而只是一个近似的常数.[16]但是，不幸的是，MUI 的不变有不同的解释.[17]

一个自然的解释是指 MUI 对于所有的 P、Y 值都不变. 但这是不可能的，因为 U_Y 是 P 和 Y 的 (-1)次齐次函数[参见 Samuelson(1942)].[18]如同 Samuelson(1942)也指出的那样，MUI 的不变尚有其他两个重要解释. 一个解
634 释是，它不随任何价格的变动而变动，即，对于一切 P 和 Y，

$$U_Y(P, Y) = \gamma(Y) \tag{14}$$

根据 Samuelson(1942)的观点，这一假设被 Marshall 隐含化了.

因为(14)暗含需求函数是位似的，所以，我们可随 Chipman 和 Moore (1976)称(14)反映的这一含义为**位似需求情况**. 第二个重要解释是，MUI 独立于收入和除一种商品(标准商品)以外所有商品的价格，也就是说，

$$U_Y(P, Y) = \gamma^*(Y) \tag{15}$$

我们称这种情况为**垂直 Engel 曲线情况**，其原因将在以后解释. Hicks(1941，1946，1956 等)将 Marshall 的 MUI 不变的假设解释为(15)，这种定义在文献中也广泛使用.[19]

现在我们利用涉及 MUI"不变"的两种解释，借助(13)来说明我们自己的不变方法，其中，Roy 恒等式在说明引理 C.2 和 C.3 时很有用.

635 **(a)位似需求情况：(14)的解释**

因为线性积分(13)独立于路径，我们可以选择出一条积分路径，使得在对 P_i 的积分中，Y 在 Y^0 处保持恒定. 再利用(14)，我们可将(13)改写为

$$\Delta U \equiv -\gamma^0 \int_{P^0}^{P^1} \sum_{i=1}^{n} x_i(P, Y^0) dP_i + \int_{Y^0}^{Y^1} \gamma(Y) dY \tag{16}$$

其中，$\gamma^0 \equiv \gamma(Y^0)$. 另外，如果对除 $i=1$ 以外的所有 i，P_i 恒定且收入保持不变($Y^0 = Y^1$)，那么(16)变为

$$\Delta U \equiv -\gamma^0 \int_{P_1^0}^{P_1^1} x_1(P_1, P_2^0, \cdots, P_n^0, Y^0) dP_1 = \gamma^0 T \tag{16'}$$

其中 T 由(2)式定义.方程(16′)说明一种价格变化的 ΔU 等于马歇尔梯形定义的区域的 γ^0 倍.恰当选择 Y^0 的计量单位,我们可令 $\gamma^0=\gamma(Y^0)=1$.这样,我们就得到了 Dupuit－Marshall 标准的一种证明方法.另外当收入保持不变时,(16)化为(2′),其中 $\gamma^0=1$,这样也证明了 Silberberg(1972)标准.

此处的困难是,ΔU 将因此而决定于收入的单位,而根据定理 C.1,(16)式中的 ΔU 应与其无关.为解决这一问题,以下结论很重要.

【引理 C.2】(Samuelson,1942)[20] (14)意义上的 MUI 不变暗含

$$\gamma(Y)=a/Y,\text{其中 } a\equiv\gamma(1) \tag{17}$$

并且,每个需求函数都是**位似的**,即 $x_i(P,Y)=\xi_i(P)Y$.进一步来说,当且仅当 $u(x)$可写作以下形式时,(14)成立:

636

$$u(x)=C_1\log\phi(x)+C_2 \tag{18}$$

其中,$\phi(x)$是一次齐次函数,且 C_1,C_2 都是某常数($C_1=a$).

注意,(18)中的 $u(x)$不是序数的,因为它不能由任何它本身的严格递增变变换形式所代替.[21]利用(16)、(17)和 $x_i=\xi_i(P)Y$,易得

$$\Delta U=a\log Y^1/Y^0-a\int_{P^0}^{P^1}\sum_{i=1}^{n}\xi_i(P)dP_i \tag{19}$$

其中 $a\equiv\gamma(1)$是个纯粹的常数.(19)式简化了 Katzner(1970)与 Chipman 和 Moore(1976)得到的公式.由(19)式我们可推出若不计自身的递增线性变换,U 是惟一的,因此 U 是基数的,[22]从而 ΔU 也是基数的,其中 $\gamma(1)$作为基数的"衡量尺度".

当收入和价格(P_1 除外)保持不变时,(19)式可化为

$$\Delta U=-\int_{P_1^0}^{P_1^1}\xi_1(P_1,P_2^0,\cdots,P_n^0)dP_1 \tag{19′}$$

这里,我们通过选择适当单位,令 $\gamma(1)=1$.上式与 D－M 标准是相一致的,只是 x_1 由 ξ_1 代替.现用定理 C.2 来总结以上结论.

【定理 C.2】 如果(14)式意义上的收入边际效用恒定,那么 ΔU 应由(19)式来衡量,其中可令 $a=\gamma(1)=1$.效用标准 ΔU 是基数的,其中 $\gamma(1)$是

637 "衡量尺度",且 ΔU 与 P_i 和 Y 计量单位的选择无关.

位似需求是指 Engel 曲线全都是原点出发的直线.有许多预算研究否定了这一推断(至少是总体上地),并且这常常被用来拒绝(14)所解释的 MUI 恒定.但是,在价格—收入从(P^0, Y^0)到(P^1, Y^1)的变化范围内,也许可以假设(14)中的位似需求为真正需求函数的一个局部近似,这是一个经得起检验的假设,我们可称之为**局部位似**.[23]在我们日常生活中,经常听到这样的话"Jones 先生花了 3%的收入支付电力单据,5%买汽油,20%买食品,……"这种说法常常(含蓄地)预先假定局部位似.

为防止误解,我们需指出虽然(14)推出位似偏好,逆命题却未必成立.换言之,(14)只描绘了位似偏好的一个特殊部分,这一点可从(18)式清楚地看

出.为说明这一点,考虑两种商品的效用函数 $u(x_1,x_2)$. 如果 $u(x_1,x_2)=\log x_1x_2$,那么,我们可得 $\lambda=2/Y$,这时(14)式满足. 另一方面,如果 $u(x_1,x_2)=x_1x_2$,那么可得 $\lambda=Y/(2P_1P_2)$,从而(14)式不满足.这两个需求函数 $\log x_1x_2$ 和 x_1x_2 都是位似的,且生成的是同一个消费函数 $x_i=Y/2P_i$, $i=1,2$.注意,$u=\log x_1x_2=2\log x_1^{1/2}x_1^{1/2}$ 满足(18),而 $u=x_1x_2$ 不满足.从基数论者的角度来看,这一例子并不使人惊奇.而且,这表明定理 C.2 有更深的含义,即,它为一个科学合理的可测效用理论提供了基础.

638 **【例 C.1】** 假定效用函数由(18)式给出,其中

$$\varphi(x)=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n};\text{且对于所有的 } i,\text{有 } \alpha_i>0;\text{此外}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$$

在这种情况下,需求函数是位似的,得到为

$$x_i=\alpha_iY/P_i,\ i=1,2,\cdots,n$$

因此,$\xi_i(P)=\alpha_i/P_i$.设想一家水电大坝的建成使电价由 P_1^0 降至 P_1^1,假设这个工程集资是通过征收一定数量的税赋而完成的,税赋使消费者的收入由 Y^0 美元降至 Y^1 美元.为简便起见,假设其他所有价格不变,利用(19)式,可计算这一工程对消费者福利的影响为

$$\Delta U=\log Y^1/Y^0-\alpha_1\log P_1^1/P_1^0$$

其中,通过单位选择令 $\gamma(1)=1$.这样,当且仅当 $Y^1/Y^0>(P_1^1/P_1^0)^{\alpha_1}$ 时 $\Delta u>0$.例如,如果 P_1 下降了 10%,使得 $P_1^1/P_1^0=0.9$,且在 $\alpha_1=0.03$ 时消费者的收入是16 000美元,那么消费者愿意为这项工程所支出的最大数目可计算为[24]

$$Y^0-Y^1=[1-(0.9)^{0.3}]Y^0=50.49\text{ 美元}$$

(b)垂直 Engel 曲线情况:对(15)的解释

【引理 C.3(Samuelson(1942))】 在条件(15)下,我们有[25]

639

$$\gamma^*(P^n)=b/P_n,\text{其中 } b\equiv\gamma^*(1),\text{且} \tag{20a}$$

$$\partial x_i(P,Y)/\partial Y=0,\ i=1,2,\cdots,n-1 \tag{20b}$$

进一步地,当且仅当 $u(x)$可写成为以下形式时,(15)成立:[26]

$$u(x)=c_1\bar{\psi}(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})+(c_1x_n+c_2) \tag{21}$$

其中,c_1 和 c_2 是常数($c_1=b>0$),可参见 Sono(1943,94 页).

方程(20b)意味着收入 Y 的变化不影响除一种商品 n 外的任何商品的需求.当 $n=2$ 时,恩格尔曲线是与标准商品(商品 2)轴平行的直线.因此,(15)的情况称为垂直 Engel 曲线的情况,其中商品 2 由纵轴衡量.这种情况由希克斯(1946,38~41 页)所推广,在该书中,除商品 1 以外的所有商品都归为一组,作为一个单独的"商品".垂直 Engel 曲线的假设常被认为是对一种商品,

如茶或盐，而言的，而一个人在这种商品上的消费仅是他或她全部收入的一小部分.

令 $P_n=1$，继续我们的分析. 设 p_i 为商品 i 的标准化价格且 $p=(p_1, p_2, \cdots, p_{n-1})$. 由(20b)，我们有

$$x_i=h_i(p), i=1,2,\cdots,n-1 \tag{22a}$$

$$x_n=h_n(p,y)=y-\sum_{i=1}^{n-1} p_i h_i(p) \tag{22b}$$

其中 y 是就商品 n 来说的收入. 结合(13)，(20a)和(22)，可得

$$\Delta U = b(y^1-y^0)-b\int_{p^0}^{p^1}\sum_{i=1}^{n-1} h_i(p)dp_i \tag{23}$$

显然，(23)中的 ΔU 与度量 Q 的单位选择无关. 与(19)一样，效用度量 U 和 ΔU 也是基数的，这里 $b=\gamma^*(1)$，而非 $a\equiv\gamma(1)$，是基数性的"衡量尺度".

640 如果 $n=2$，通过单位选择令 $b=1$，(23)可简化为

$$\Delta U=(y^1-y^0)-\int_{p_1^0}^{p_1^1} h_1(p)dp_1 \tag{23′}$$

这与 Sono(1943，95 页)得到的公式相符. 如果收入不变，(23′)可进一步简化为

$$\Delta U=\int_{p_1^0}^{p_1^1} h_1(p)dp_1 \tag{23″}$$

这与 D - M 标准相符，只是 x_1, P_1 分别由 h_1 和 p_1 所代替. 总结一下，我们有：

【定理 C.3】 在垂直 Engel 曲线的假设(15)下，ΔU 用(23)式来衡量，且 ΔU 是基数的，并与 P 和 Y 计量单位的选择无关. 基数性的"衡量尺度"是 $\gamma^*(1)$.

§ C.5 收入边际效用不变情况下的 Hicks 标准

现将(6)式和(7)式中定义的 Hicks 福利标准的两个概念 C 和 E 与 MUI 恒定性联系起来. 如果(14)式定义的 λ 是常数，可得到公式(19)，然后，用以下式子定义 A 和 τ：

$$A\equiv\int_{p^0}^{p^1}\sum_{i=1}^{n} x_i(P,Y^0)dP_i=Y^0\int_{p^0}^{p^1}\sum_{i=1}^{n}\xi_i(P)dP_i \tag{24a}$$

$$\tau\equiv A/Y^0 \tag{24b}$$

我们易得[27]

$$C\equiv Y^0(e^{\tau}-1) \tag{25}$$

注意，如果除 P_1 外所有的价格保持不变，(24)式定义的 A 恰等于由 Marshall

梯形区域定义的熟悉区域面积

$$A=\int_{P_1}^{P_1^1}\xi_1(P_1^0,P_2^0,\cdots,P_n^0)\,Y^0dP_1 \tag{24'}$$

641 类似地，可由(19)和(27)得到等值变化[28]

$$E=Y^0(1-e^{-\tau}) \tag{26}$$

然后，对于 $P^0\neq P^1$，我们可以明确得到不等式[29]

$$E<A<C \tag{27}$$

【例 C.2】 使用与例 C.1 相同的效用函数，假设除商品 1 以外的所有价格是固定不变的，且收入 Y 恒定. 令 $Z\equiv\Delta P_1/P_1^0$，其中 $\Delta P_1\equiv P_1^1-P_1^0$，可以计算如下[30]：

$$\bar{C}=(1+z)^{\alpha_1}-1 \tag{28a}$$

$$\tau=\alpha_1\log(1+z) \tag{28b}$$

$$\bar{E}=1-(1+z)^{\alpha_1} \tag{28c}$$

其中 $\bar{C}\equiv C/Y^0$，$\tau\equiv A/Y^0$，且 $\bar{E}=E/Y^0$.

这一例子也说明，如果 z 充分地接近零，我们可由(28)式看出，C，A 和 E 都近似地等于 $\alpha_1 zY^0$. 另一方面，如果 z 不能充分地接近于零，那么这三个标准之间的差别将很大，特别地，如果如同在 Marshall 三角中那样，$P_1^1\to\infty$，那么由(28)[31]式易得

$$E\to Y^0,\ A\to\infty,\ C/A\to\infty$$

也就是说，当 z 变大时，E，A，C 之间的差别将变得很大.[32]这样，即使是在加上(14)的限制状况下，如果承认 C 和 E 是正确的标准(如在 Willig
642 1976，Hausman 1981 和其他书中)，那么我们就将被迫面对正确标准之间差别无穷大的窘境.

现以定理 C.4 对以上一些结论作总结.

【定理 C.4】 如果(14)式中定义的收入边际效用不变，则 $-A/Y^0$ 可以衡量收入不变时由价格变化引起的真实的福利变化，并且总有 $E<A<C$. 当 $|A|$ 充分小时，C 和 E 高于或低于 A 的误差为二阶无穷小. 另一方面，如果 $|A|$ 很大，那么 E 和 C 都不能很好地近似 A，它们的差别可以很大.

为进一步说明 Hicks 标准的不足. 设想一个(单独的)价格从 P_1^0 升为 P_1^1，在这种情况下，图 C.3 中的 $P_1^0AB'P_1^1$ 可用来说明补偿变动. 其中 DD' 是普通的需求曲线，且 AB' 是被补偿的部分(经过 A 点). 注意，只要收入效用是正的(如在当时情况下)，DD' 就比 AB' 更平. 现假定价格上升分两步走，从 P_1^0 到 P'_1 到 P_1^1. 那么补偿变动将是图 C.3 中的阴影区域 $P_1^0AC'P'_1$ 加上 $P'_1CB'P_1^1$. 这样，它依赖于某特定价格变动所走的步数. 类似地，等值变动也依赖于某特

定价格变化的步数.[33] 另一方面，如果将从 P_1^0 到 P_1^1 的价格上升看做是由许多步组成的，补偿和等值变动都将接近于 D－M 标准，$P_1^0ABP_1^1$. 由于我们希望福利标准不受步骤数影响，上述讨论指出了 H 标准的不足.[34]

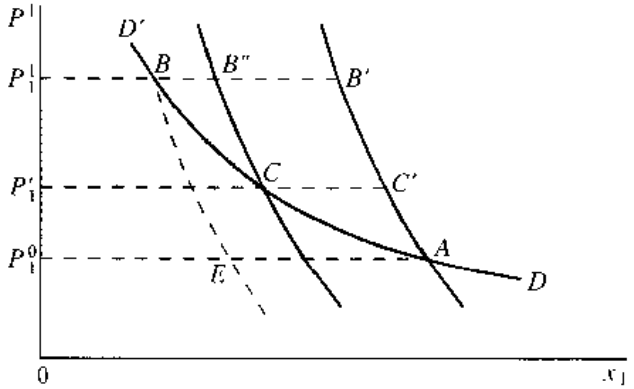


图 C.3　Dupuit－Marshall 标准和补偿运动

最后，如果以(15)来解释 MUI 恒定，则易得以下著名结论：[35]

$$E = A = C$$

643

也就是说，在垂直 Engel 曲线情况下，这三个福利标准正好相同，这一结果一点也不奇怪，因为在这种情况下，收入的影响为零，这使得被补偿的和未被补偿的需求曲线重合. 我们可以回忆一下图 C.3.

▶ 结束语

需求函数中如果有收入影响的存在，H 标准一般不能成为正确的福利标准，而 D－M 标准(适当修改后)可成为在 MUI 近似不变假设下单独价格变化的正确福利标准. 同样，在 MUI 恒定时，(间接)效用可为基数，这与 Marshall 的基数主义者立场相符.

但是，仍要指出，会出现其他一些令人感兴趣的情况. 在这些情况下，我们不必假设 MUI 不变(这对一些读者来说可能是过于严格的一个假设)，就可进行福利标准公式(13)的计算. 这里我们仅讨论了历史上几种重要的情况下的计算方法.[36]

▶ 注　释

[1]此附录基于 Takayama(1982，1984 和 1987).

[2]假设消费者是相似的，且其效用可以累加，Marshall 将一个市场中的单个消费者剩余累加起来，得到一个总的福利标准. 并且，在概念的实际应用中，他在(消费者剩余)Consumers' surplus 的 s 后加上了撇. 随着新福利经济学的产生和对个人间效用互相比较的放弃，人们越来越多地根据单个消费者来讨论消费者剩余. 但是，即使是局限于单个消费者，这一概念仍引起了巨大的争议. 这里，我们仅讨论限于单个消费者的情况，以获得对这一著述的正确看法.

[3]例如 Katzner(1970，152～155 页)；Harberger(1971)；Mohring(1971)；Silberberg(1972；1978，350～356 页)；Burns(1973)；Bergson(1975)；Hause(1975)；Cicchetti，Fisher 和 Smith(1976)；McKenzie 和 Pearce(1976 和 1982)；Seade(1978)；Willig(1976，和 1979)；Hausman(1981)；Morey(1984)，G. McKenzie(1983)及 Takayama(1984).

[4]Suzumura(1985)引用了 181 个关于此问题的参考.

[5]消费者剩余这一概念不是由 Marshall 最先提出的，很明显他是在 1868 年左右读过 A. A. Cournot 的文章之后发展这一概念的，并且，他对 Dupuit 的至今仍著名的论述(1844)亦有所知，参见 Dooley(1983)和 Whitaker(1975).

[6]毋庸讳言，商品 1 是任意选择的，即我们关注下的任何商品都可称为“商品 1”.

[7]Marshall(1920，124 页)写道：“消费者为某种东西实际支付的价格与他宁愿支付而不愿得不到这东西的价格之间的差额，是衡量剩余满意程度的经济尺度. 它便是消费者剩余”. 接下去，他又说，“来自一些商品的消费者剩余显然要比另一些商品大些……如火柴，盐，一张一便士的报纸或一张邮票，都是很好的例子”.

[8]如果需求曲线与价格轴没有一个有限的交点(即，如果 OC 是无限的)，那么三角形区域可能就无限大. 如 Cobb－Douglas 形式给出的效用函数就是这种情形，Marshall(1920，841～842 页)对此亦有所知. 即使在这种情况下，梯形区域 $ABB'A'$，也是有限的. 我们还注意到，如果其他任何价格或消费者收入发生变化，梯形 $ABB'A'$ 便不能衡量福利变化了，因为这样的变化改变了需求曲线，Marshall 对此深有感知. 另一方面，Walras(1954)正是由于这个面对此概念持批判态度，他举例说：“不幸的是，所有这些论述都是错误的，并且 Dupuit 并未在 J. B. Say 的理论上有所提高…一般地，一个消费者为获得一单位产品而愿在金钱上付出的最大代价不仅取决于相关产品的效用，还取决于市场上所有其他产品的效用，并且最终取决于消费者的效用均值…，因此我们可以肯定地抛弃 Dupuit 研究报告中的所有论述”.(1954，445～446 页).

[9]此处承 Hicks 教授对我指明这点.

[10]线性积分的快速阐释如下：令 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 为 R^2 上的实值函数，考虑一条由 $y=\phi(x)$，$a=\phi(A)$ 和 $b=\phi(B)$ 定义的曲线，由此可得下述线性积分：

$$\int_A^B f(x,y)dx+g(x,y)dy=\int_A^B f[x,\phi(x)]dx+g[x,\phi(x)]\phi'(x)dx$$

一般来说，这个积分的值取决于某一路径 $\phi(x)$，在这种情况下，线性积分被认为是**路径决定的**. 如果积分与特定路径无关，那么就叫做**路径独立**. 路径独立的充要条件是

$$\text{对所有 } x \text{ 和 } y, \partial f(x,y)/\partial y = \partial g(x,y)/\partial x$$

大多数高等微积分教科书中都论及线性积分和路径独立. Apostol(1957)不失为一个好的阐释.

[11]在这种情况下，以下 Dooley(1983,29～30 页)的一番评论可能会使人感兴趣："如同 E. Slutsky…大度认可的好样，Pareto 的推导在数学上与 Slutsky 方程相同. Pareto 和 Slutsky 都在当时最重要的杂志之一《Gionale degli economisti》上发表过文章. Pareto 的研究对 Hicks 的价值理论有着独到的影响……虽然 Hicks 没有认识到 Pareto 的解答与 Slutsky 方程等同". Hicks－Slutsky 方程含意之一是需求曲线无需为向下倾斜的. 关于这个，Dooley(1983，第 30 页)写道："Pareto 的著作由 Sanger(1895)在《经济学杂志》上加以评论……Marshall……在关于 Giffen 商品的新部分的脚注中引用了 Sanger 的看法，这加在 Marshall'原理'的第三版之中. 虽然 Marshall 认为面包的需求曲线斜率可为正的功劳归于 Giffen，却没有人认为 Giffen 的观察丝毫比得上 G. J. Stigler."

[12]在这时回想一下萨缪尔森的思想演进是很有用的. 他从早期的坚定的序数主义者转变为稍后的勉强的基数主义者，一直到"最近这个基数主义标准在某些良好定义的使用中被接受为有效规则的时期". 见 Chipman(1982,32 页和 59～63 页). 在这种情况下，特别限制于消费者剩余的情况，Bergson 拒绝使用 Occam 刀刃原则，这是值得注意的，他在书中写道："这里我敢冒昧地说……Occam 刀刃原则的进一步应用是不正确的". Pareto 与 Hicks 及其他许多近期的序数主义者的主张十分不同. 虽然他清楚，效用的量度或效用的基数性对解释经济均衡并不重要，但他继续相信效用原则上是可测量的. 见 Chipman(1976,76～80 页).

[13]一般地，我们有以下定义. 令 $x(t)=[x_1(t),\cdots,x_n(t)]$ 为一个定义在闭区间 $[a,b]$ 上的向量值的连续函数. 在 $x(t)$ 下 $[a,b]$ 的象被称为是由 x 所描绘的一条**曲线**. 如果 $x(a)=x(b)$，这条曲线就叫做**封闭的**，如果 $x(a)\neq x(b)$，则它被称为是一个**弧**. 如果 $x(t)$ 是连续可微的，曲线被称为是**光滑的**. 如果曲线本身不是光滑的，而是由有限个弧构成的，而每个弧是光滑的，则它被称为是**逐段光滑的**. 如果 $x(t)$ 是一一对应的函数，那么这条曲线就叫做**简单(曲线)**. 也就是说，简单曲线是指，在一个半开半闭区间 $[a,b)$ 上永不交叉的曲线. 逐段平滑曲线总是简单曲线.

[14]一般地，我们可以推出以下数学结论. 令 $h_i(x), i=1,2,\cdots,n$，为定义在欧几里得空间 R^n 中一个开凸子集 D 上的连续可微的实值函数，那么线性积分

$$I \equiv \int_A^B h_1(x)dx_1 + h_2(x)dx_2 + \cdots + h_n(x)dx_n$$

用 D 中一条逐段光滑的简单曲线将 D 中每对端点 A、B 连接起来，它独立于

路径，当且仅当

$$(*) \qquad \partial h_i(x)/\partial x_j = \partial h_j(x)/x_i, i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, n$$

根据这一定理，我们还可以推断 U 的二次连续可微是路径独立的充分（也是必要）条件. 这一定理中路径独立条件（*）的必要性不难证明（如，Apostol，1957，定理 10.38 和 10.45），其中 D 是否凸没有要求. 它的充分性需要一个额外的限制条件，如 D 的简单连通性或凸性. 大多数高等微积分教科书证明充分性时假设 $n=2$. Apostol（1957，定理 10.48）也证明了充分性，但未要求 $n=2$，而是要求 D 是一个开区间（这对我们的证明是真正充分的）. 当 D 没有限制为一个开区间时，证明变得困难得多，需要 Green（或 Stokes）定理的一个 n 维扩展.

[15] 关于（局部）可积分问题见 Samuelson（1950），Antonelli（1971）和 Hurwicz（1971）. Hicks - Slutsky 矩阵 $[S_{ij}]$ 的对称条件提供了“数学可积分”，这一可积分条件，如同 Hurwicz（1971）指出的那样，它应明显区别于“经济可积分”的条件. 再具体一些，Sz 的对称性是数学可积分的充要条件. 而 S_{ij} 的半负定性是经济可积分的充分条件. 在此，回想一下 Samuelson 关于这个的思想演变是有意义的. 众所周知，Samuelson 在早期抛弃了效用的概念（1938）. 他的《Weak Axiom of revealed preference》（显示偏好的弱公理）一书意欲从需求和价格—收入对的关系的观察中直接建立起需求理论，这样就“摒弃了效用分析最后的尊严”（Samuelson 1938，662 页）. 这是因为 Samuelson 不能找到一个令人信服的经济解释来说明 Hicks - slutsky 矩阵的对称性，弱公理只能证明 $[S_{ij}]$ 是半负定的，而不能保证是对称的. Houthakker 的具有里程碑意义的著作（1950）改变了整个情景. 对称性被证明来自他的强公理，而这一公理又赋予了对称性一定的经济含义. 这些都促进了 Samuelson（1950）在可积分性方面的工作，在这项工作中，他意欲研究从观察到的需求函数中复原效用函数的问题，这与 Samuelson 的早期著作有着鲜明的对比（Samuelson1938，68 页），Samuelson 在该书中写道，“关于可积分问题，我没什么可讲的，我不认为它真的是个重要问题”. 后来人们认为，强公理与偏好假说等价（如 Richter 1966）. 并且，Hurwicz 和 Richter（1971）证明了“Ville 公理”恰好提供了在弱公理基础上产生强公理（它等同于 Slutsky 对称条件）所需的东西. 而这同样又提供了久为寻找的对称条件的经济含义（见 Chipman，1982，32～49 页）.

[16] Marshall（1920，132 页，脚注 1）说，“用数学语言来说，被忽略的元素一般属于二阶数量……”，也可参见 Marshall（1920，842 页）.

[17] 收入（或货币）的边际效用不变导致了一个很大的矛盾：Dooley（1983，30 页）说到“Marshall 把货币的边际效用视作常数，这所产生的争论比他的任何一个特别假设所产生的争论都多.”Dooley 于是描述了这一矛盾并认为，Marshall 在这一问题上是糊涂的.

[18] 令 $f(x)$ 为 R^n 上的一个 m 次齐次函数. 那么每个 $f_i(\equiv \frac{\partial f}{\partial x_i})$ 都是 $(m-1)$ 齐次的. 这来自齐次函数的欧拉定理（定理 1.7）. 因为由（4b）

$\lambda(P,Y)=\partial U(P,Y)/\partial Y$，且 U 是零次齐次的，故 λ 是 -1 次齐次的．为说明 $U_Y=\lambda(P,Y)$不能是常数，假设反面，即假定 $\lambda(P,Y)=a$，其中 a 是一个独立于 P 和 Y 的实数，然后利用 λ 是 -1 次的事实，我们有

$$\text{对任何 } \alpha,\ a=\lambda(\alpha P,\alpha Y)=\lambda(P,Y)/\alpha=a/\alpha$$

满足该等式的 a 只有 0，它与 $\lambda>0$ 矛盾．

[19]另一种解释仍由 Pareto 提出，他认为，Marshall 关于 MUI 恒定的假设等于是说所讨论的商品的价格弹性为 1(Dooley,1983,32 页)．虽然 Pareto 表面上让步说，这一假设对于如豆蔻那样的小商品是正确的，然后他却以其不合事实而拒绝了恒定假设．从 Pareto 写于 1907 年 9 月 15 日的一封信中可以看出，他深信 MUI 不是恒定的，这封信由 Georgescu－Roegen(1968,176 页)提供：

人们无法认为钱财是恒定的．让我们回到通常的限制：在那种方式中，人们不考虑现象的独立性．Marshall 和 Edgeworth 论者固执地坚持谬误，不承认在与 Walras 的论战中他们是错的．那些英国绅士认为在英德以外的地方只有蠢材．我却要说英国主张货币(边际)效用恒定才是蠢举．这一主张是一项根本的主张．如果 Marshall 和 Co．是对的，我就是错的，反之亦然．对于那些坚持说这些无能的话的人我不想再费口舌，我已经说得再清楚不过了．

[20]方程(17)由 U_Y 的(-1)次齐次性立即得出．在 *Roy* 恒等式(4c)中对 Y 微分，再利用(16)式，得出想要的 Euler 方程，即可证明位似性．要证明(18)是(14)的充分条件，只需如下推导：

$$\begin{aligned}Y&=\sum P_i x_i=\sum(u_i/\lambda)x_i=\sum(C_1\phi_i/\lambda\phi)x_i\\&=(C_1/\lambda\phi)\sum\phi_i x_i=C_1\phi/\lambda\phi=C_1/\lambda\end{aligned}$$

因此，$\lambda=C_1/Y$，其中 $\phi_i\equiv\partial\phi/\partial x_i$，且 $u_i=\lambda P_i$．此处的证明比文献中的证明要简单得多．

[21]如果 $u(x)=\phi(x)$，我们有

$$Y=\sum P_i x_i=\sum(u_i/\lambda)x_i=\sum(\phi_i x_i)/\lambda=\phi/\lambda=u/\lambda$$

由此可得 $\lambda=U(P,Y)/Y$．根据这一关系和(4b)，我们可得$\partial\lambda/\partial Y=0$，这是不可能的．

[22]也就是，如果 a_1 和 a_2 是 $\gamma(1)$的两个常数值，那么显然用 a_1 表示的 ΔU 是用 a_2 表示的 ΔU 的常数倍．这表明若不计自身的递增线性变换，U 是惟一的，因此 U 是基数的．这类似于说明由于华氏度是摄氏度的一个递增线性变换 $F=(9/5)C+32$，因此温度是基数的．

[23]局部位似所暗含的 ΔU 的基数性令人眼界十分开阔，因为它为可测效用有一个科学合理的理论打下了基础，也就是说，如果收人的边际效用独立于价格，即如果在观察值附近(14)成立，则 ΔU 就是基数的．以下引自 Chipman(1982,51 页)的一段话可能与此相关：

一个总的观点更为重要，即存在关于消费者行为的限制性假设……可

作为计量效用的基础，这与物理学家发现限制性假设对于计量温度十分方便的情况相似.

如 Chipman 接下去论述的那样，收入边际效用独立于价格的假设是一个“关于消费者偏好的具有巨大实用含义的观点，可以通过市场需求行为的观察来证实或反驳这一观点.”(1982,52 页)

[24]只需令 $\Delta U=0$. 这个数目(50.49 美元)与 Hicks 补偿变量相符. 1977 年美国中等家庭的收入为16 009美元. 美国家庭收入预算中平均 3% 的部分用来购买电力. 如果 A 先生花费他大约 3% 的收入来支付电费(这是一个局部位似)，并且如果他的收入是16 000美元，那么你可能会算出，这个消费者由于他的电力开支减少了 10% 而节省了大约$16\,000\times0.03\times0.01=48$ 美元. 这个数字与以上得到的 50.49 美元相差不远.

[25]方程(20a)得自于 U_Y 的 (-1) 次齐次性，再在 Roy 恒等式(4c)中对 Y 微分，易证方程(20b).

[26]要证明(21)推出(15)，只需回想 $u_n=\lambda P_n$，且注意，由(21)可得 $u_n=c_1$. 然后我们有 $P_n=c_1$，因此(15)式成立. 注意，$c_1=b\equiv\gamma^*(1)$.

[27]见 Takayama(1984,616 页).

[28]见 Takayama(1984,617 页).

[29]Chipman 和 Moore(1980,945 页)通过加上一定的严格限制性假设得到了一个类似的关系. 这里所讨论的是这一限制可以完全省掉.(见 Takayama 1984,617～618 页).

[30]见 Takayama(1984,619 页).

[31]要证明当 $z\to\infty$ 时，$C/A\to\infty$，只需在 $C/A=[(a+Z)^{a_1}-1]/[a_1\log(1+z)]$ 中运用 L'Hospital 规则即可.

[32]但是，对于 P_1 如此大的变化，我们关于位似需求为一个局部近似的假设将不再成立.

[33]对一个从 P_1^0 到 P_1^1 价格的上升，等值变动由 $P_1^1BE\,P_1^0$ 来衡量，其中 BE 是经过 B 点的补偿需求曲线.

[34]这里的图解是由 Mishan(1977,14～18 页)得到的，由 Ng(1980,90～92 页)重述. Hause(1975)和 G. McKenzie(1983)偏爱于使用等值性变动. 但是，即使只通过图 C.3 的讨论，我们可推断这是错误的.

[35]参见 Takayama(1984,621 页).

[36]还要注意，消费者剩余理论和指数论的关系密切(如，见 Rader 1976, Bruce 1977, Vartia 1983, 和 Suzumara 1985)，虽然在这一领域仍有许多工作尚未完成，但两个课题的并行研究已颇具成果.

▶ 参考文献

644 Apostol, T. M. 1957. *Mathematical Analysis*. Reading, Mass.: Addison-

Wesley.

Antonelli, G. B. 1971. "On the Mathematical Theory of Political Economy." Trans. from the Italian original by J. S. Chipman and A. P. Kirman. In Chipman et al. 1971, 333－60.

Bergson, A. 1975. "A Note on Consumer's Surplus." *Journal of Economic Literature* 13 (March): 38－44.

Boadway, R. W. 1974. "The Welfare Foundation of Cost-Benefit Analysis." *Economic Journal* 84 (December): 926－39.

Boadway, R., and N. Bruce. 1984. *Welfare Economics*. Oxford: Basil Blackwell.

Bruce, N. 1977. "A Note on Consumer's Surplus, the Divisia Index, and the Measurement of Welfare Change." *Econometrica* 45 May: 1033－38.

Burns, M. E. 1973. "A Note on the Concept and Measure of Consumer's Surplus." *American Economic Review* 63 (June): 335－44.

Chichetti, C. J., A. C. Fisher, and V. K. Smith. 1976. "An Economic Evaluation of a Generalized Consumer Surplus Measure: The Mineral King Controversy." *Econometrica* 64 (November): 1259－76.

Chipman, J. S. 1976. "The Paretian Heritage." *Cahiers Vilfredo Pareto, Revue europenne des sciences sociales* 14: 65－171.

_____. 1982. "Samuelson and Consumption Theory." In *Samuelson and Neoclassical Economics*, ed. G. R. Feiwel. Boston: Kluweiz Nijhof.

Chipman, J. S., L. Hurwicz, M. K. Richter, and H. F. Sonnenschein, eds. 1971, *Preferences, Utility, and Demand*. New York: Harcourt, Brace and Jovanovich.

Chipman, J. S., and J. C. Moore. 1976. "The Scope of Consumer's Surplus Arguments." In *Evolution, Welfare and Time in Economics: Essays in Honor of Nicholas Georgescu-Roegen*, ed. A. M. Tang, F. M. Westfield, and J. S. Worley, 69－123, Lexington, Mass.: D. C. Heath.

_____. 1980. "Compensating Variation, Consumer's Surplus and Welfare." *American Economic Review* 70 (December): 933－49.

Currie, J. H., J. A. Murphy, and A. Schwitz. 1971. "The Concept of Economic Surplus and Its Use in Economic Analysis." *Economic Journal* 81 (December): 741－99.

Dixit, A., and P. A. Weller. 1979. "The Three Consumer's Surpluses." *Economica*, n.s. 66 (May): 121－29.

Dooley, P. C. 1983. "Consumer's Surplus: Marshall and His Critics." *Canadian Journal of Economics* 16 (February): 26－38.

645 Dupuit, J. 1844 [1969]. "On the Measurement of the Utility of Public Works." Trans. R. H. Barback. In *Readings in Welfare Economics*, ed. K. J. Arrow and T. Satovsky, 255:83, Homewood, Ill.: Richard D. Irwin.

Georgescu-Roegen, N. 1952. "A Diagrammatic Analysis of Complementarity." *Southern Economic Journal* 19 (July): 1 – 20.

_____. 1968. "Revisiting Marshall's Constancy of Marginal Utility of Money." *Southern Economic Journal* 35 (October): 176 – 81.

Harberger, A. C. 1971. "Three Basic Postulates for Applied Welfare Economics: an Interpretative Essay." *Journal of Economic Literature* 9 (September): 785 – 87.

Hause, J. C. 1975. "The Theory of Welfare Cost Measurement." *Journal of Political Economy* 83 (December): 1145 – 82.

Hausman, J. A. 1981. "Exact Consumer's Surplus and Deadweight Loss." *American Economic Review* 71 (September): 662 – 76.

Henderson, a. 1941. "Consumer's Surplus and the Compensating Variation." *Review of Economic Studies* 8 (February): 117 – 21.

Hicks, J. R. 1939. *Value and Capital*. 1st ed. Oxford: Clarendon Press, (2d ed. 1946).

_____. 1941. "The Rehabilitation of Consumer's Surplus." *Review of Economic Studies* 8 (February): 108 – 16.

_____. 1942. "Consumer's Surplus and Index Numbers." *Review of Economic Studies* 9 (Summer): 126 – 37.

_____. 1943. "The Four Consumer's Surpluses." *Review of Economic Studies* 11 (Winter): 31 – 41.

_____. 1945 – 46. "The Generalized Theory of Consumer's Surplus." *Review of Economic Studies* 13: 68 – 74.

_____. 1956. *A Revision of Demand Theory*. Oxford: Clarendon Press.

_____. 1981. "The Four Consumer's Surpluses." In *Wealth and Welfare: Collected Essays on Economic Theory*, 1: 114 – 32, Oxford: Basil Blackwell.

Hicks, J. R., and R. G. D. Allen. 1934. "A Reconsideration of the Theory of Value." *Econometrica* 1 (February and May): 52 – 76, 196 – 219.

Hotelling, H. 1938. "The General Welfare in Relation to the Problems of Taxation and of Railway and Utility Rates." *Econometrica* 6 (April): 242 – 69.

Houthakker, H. S. 1950. "Revealed Preferences and the Utility Function." *Economica* 17 (May): 159 – 74.

Hurwicz, L. 1971. "On the Problem of Integrability of Demand Functions." In Chipman et al., 1971, 174—214.

Hurwicz, L., and M. K. Richter. 1971. "Ville Axiom and Consumer Theory." *Econometrica* 47 (May): 603 – 19.

Just, R. E., D. L. Hueth, and A. Schmitz. 1982, *Applied Welfare Economics and Public Policy*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.

646 Katzner, D. W. 1970. *Static Demand Theory*. New York: Macmillan.

McKenzie, G. W. 1979. "Consumer's Surplus Without Apology: Comment." *American Economic review* 69 (June): 465 – 74.

_____. 1983. *Measuring Economic Welfare*. New York: Cambridge University Press.

McKenzie, G. W., and I. F. Pearce. 1976. "A New Operational Procedure for Evaluating Economic Policies." *Review of Economic Studies* 43 (October0: 465 – 68.

_____. 1982. "Welfare Measurement—A Synthesis." *American Economic Review* 72 (September): 669 – 82.

Marshall, A. 1920. *Principles of Economics*. 8th ed. London: Macmillan. (1st ed. 1890).

Mishan, E. J. 1960. "A Survey of Welfare Economics, 1939 – 1959." *Economic Journal* 70 (June): 197 – 265.

_____. 1977. "The Plain Truth about Consumer Surplus." *Zeitschrift für Nationalökonomie* 37: 1 – 24.

Mohring, H. 1971. "Alternative Welfare and Loss Measures." *Western Economic Journal* 9 (December): 349 – 68.

Morey, E. R. 1984. "Confuser Surplus." *American Economic Review*. 74 (March): 163 – 73.

Nagatani, H. 1984. "Algorithms for the Hicksian Measures of Consumer's Surplus: Professor Houthakker Reevaluated" (in Japanese). *Osaka University Economics* (*Osaka Daigaku Keizaigaku*) 34: 135 – 46.

Ng, Y. K. 1980. *Welfare Economics*. New York: Wiley.

Rader, T. 1976. "Equivalence of Consumer Surplus, the Divisia Index of Output, and Eisenberg's Addilog Social Utility." *Journal of Economic Theory* 13 (August): 58 – 66.

Richter, M. K. 1966. "Revealed Preference Theory." *Econometrica* 34 (July): 635 – 45.

Samuelson, P. A. 1938. "A Note on the Pure Theory of Consumer's Behavior." *Economica*, n.s. 5 (February): 61 – 71.

_____. 1942. "Constance of the Marginal Utility of Income." In *studies in Mathematical Economics and Econometrics*: *In Memory of Henry Schultz*, ed. O. Lange, F. McIntyre, and T. O. Yatema, 75 – 91, Chicago: University of Chicago Press.

_____. 1947. *Foundations of Economic Analysis*. Cambridge, Mass: Harvard University Press (enlarged ed., 1983).

_____. 1950. "Tbe Problem of Integrability in Utility Theory." *Economica*, n.s. 17 (November): 355 – 85.

Seade, J. K. 1978. "Consumer's Surplus and Linearity of Engel Curves." *Economic Journal* 88 (September): 479 – 96.

Silberberg, E. 1972. "Duality and the Many Consumer's Surpluses." *American Economic Review* 62 (December): 942 – 52.

_____. 1990. *The Structure of Economics*. 2d ed. New York: McGraw-Hill (1st ed. 1978).

Sono, M. 1943. "On Dupuit's Relative Utility from the Point of View of Choice Theory" (in Japanese). *Economic Essays* (*Keizai Ronso*) 57: 88 – 97.

Suzumura, K. 1985. "Consumer's Surplus and Welfare Evaluation" (in Japanese) *Economic Review* (*Keizai Kenkyu*) 36 (January): 53 – 66

Takayama, A. 1982. "On Consumer's Surplus." *Economic Letters* 10: 35 – 42.

_____. 1984. "Consumer's Surplus, Path Independence, Compensating and Equivalent Variations." *Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft* 140 (Dezember): 594 – 625.

_____. 1987. "Consumer Surplus." In *The New Palgrave*, ed. J. Eatwell, M. Milgate, and P. Newman, 1: 607 – 13. London: Macmillan.

Vartia, Y. O. 1983. "Efficient Methods of Measuring Welfare Change and Compensated Income in Terms of Ordinary Demand Functions." *Econometrica* 51 (January): 79 – 98.

von Neumann, J., and O. Morgenstern. 1953. *Theory of Games and Economic Behavior*. 3rd ed. Princeton, N.J.: Princeton University Press. (1st. ed. 1944, 2nd ed. 1949).

Walras, L. 1954. *Elements of Pure Economics*. Trans. from the 1926 version by W. Jaffé. Homewood, Ill.: Richard D. Irwin.

Whitaker, J. K., ed. 1975. *The Early Economic Writings of Alfred Marshall, 1867 – 1890*. Vol. 2. New York: Free Press.

Willig, R. D. 1976. "Consumer's Surplus Without Apology." *American Economic Review* 66 (September): 589 – 97.

_____. 1979. "Consumer's Surplus Without Apology, Reply." *American Economic Review* 69 (June): 469 – 74.

索 引

A

平均成本
AC(*see* Average cost)
平均成本曲线
AC-curve(*see* Average cost curve)
加速论者
Accelerationists 363
物质资产的积累方程
Accumulation equation of physical assets 427,527,547,548
精算的公平保费
Actuarially fair premium 285,310
适应性预期
Adaptive expectations 359, 363, 364, 432, 433,434,437
调节机制
Adjustment mechanism(*see* Adjustment process)
调节过程
Adjustment process 351-355
可接受控制函数
Admissable control function 453
收入逆效应
Adverse income effect 210
逆向选择
Adverse selection 306,312-315
  信贷配给中的逆向选择
  in credit rationing 313-315
仿射变换(见线性仿射变换)
Affine transformation(*see* Linear affine transformation)
总需求曲线
Aggregate demand curve 367
总生产函数
Aggregate production function 356
Allais 悖论
Allais's paradox 269
Allen 要素替代偏弹性(见替代弹性)
Allen partial elasticity of factor substitution(*see* Elasticity of substitution)
动物血气

Animal spirit 521
弧
Arc 631
Arrow 不可能定理
Arrow's impossibility theorem 197
Arrow-Enthoven 条件
Arrow-Enthoven condition 107
Arrow-Enthoven 定理
Arrow-Enthoven theorem 95-96, 102, 174, 618-619
Arrow-Hurwicz-Uzawa 条件
Arrow-Hurwicz-Uzawa condition 94,106
Arrow-Hurwicz-Uzawa 定理
Arrow-Hurwicz-Uzawa theorem 93, 97, 102,117,174,224
秩条件
rank condition in 94
Anow-Pratt 风险厌恶度量(见风险厌恶系数)
Arrow-Pratt measure of risk aversion (*see* Coefficient of risk aversion)
信息不对称
Asymmetry of information
Lemon 法则中的信息不对称
in lemon principle 305-307
保险中的信息不对称
in insurance 307-312
信贷配给中的信息不对称
in credit rationing 313-315
委托人—代理人问题中的信息不对称
in principal-agent problem 315
辅助变量(见最优控制理论中的乘数)
Auxiliary variables (*see* Multipliers in optimal control theory)
平均成本
Average cost 126,201,202,203,204,205
平均成本曲线
Average cost curve 126, 143, 158, 187, 194,195,196,200,201,202,203,204,205
单调递减
monotone decreasing 204
U 型
U-shaped 143,158,194,196,201,202, 203,204
平均消费倾向
Average propensity to consume 504
Averch-Johnson 效应
Averch-Johnson effect 212,217,219,234
扩张公理
Axiom of extension 5
分类公理
Axiom of specification 4

B

均衡增长路径
Balanced growth path 357,483
Bang-bang 控制
Bang-bang control 458
Bang-coast 控制
Bang-coast control 458
浴盆水管问题
Bathtub problem 452
面对风险的行为
Behavior toward risk generally 271-273
风险厌恶
risk averse 271-275, 280, 282-283, 285, 287,288,289,290,292,293,294,295
风险爱好者
risk lover 271,282,289
风险中性
risk neutral 271,282,289,306
遗赠函数
Bequest function 548
遗赠动机
Bequest motive 550,552,553
二元关系
Binary relation
完备的
complete 258-259
序

ordering 259
偏拟序
partial quasi-ordering 259
自反的
reflexive 258
全
total 259
传递的
transitive 258,263
Boadway 悖论
Boadway paradox 630
加边行列式
Bordered determinant 603
加边海赛矩阵条件
Bordered Hessian condition 116, 118-120, 129
加边海赛行列式
Bordered Hessian determinant 64
加边海赛矩阵
Bordered Hessian matrix 64,98,116,117, 128,130,170,188,193,195
边界曲线
Boundary curve 487-488
有界的
Bounded 13
上有界
Bounded above 13
下有界
Bounded below 13
有界状态变量约束
Bounded state variable constraints 546
预算线
Budget line 63,99
预算集
Budget set 82

C

变分法
Calculus of variations 451,452,468-472
资本风险
Capital risk 303,305
资本劳动替代
Capital-labor substitution 219
Carathéodory-Samuelson 定理
Carathéodory-Samuelson theorem 130
基数效用
Cardinal utility 267,636,637,639,640,643
笛卡尔内积
Cartesian product 6,53
柯西序列
Cauchy sequence 27
Cauchy-Peano 定理
Cauchy-Peano theorem 299,453
Carchy-Schwartz 不等式
Cauchy-Schwartz inequality 22-23
中心
Center 383,402
风险下的确定性等价
Certainty equivalent under risk 273
风险下的确定性线
Certainty line under risk 292
CES 函数
CES function 152,153,156
锁链法则
Chain rule 45
特征方程
Characteristic equation 386,393,394,433, 596,597
特征根
Characteristic root(*see* Eigenvalue)
特征值
Characteristic value(*see* Eigenvalue)
特征向量
Characteristic vector(*see* Eigenvector)
一阶条件下的最优特征
Characterization of optimum by first-order condition 85-103
鞍点条件下的最优特征
Characterization of optimum by saddle-point

condition 103-111
类(见集合)
Class(*see* Set)
古典最优理论
Classical optimization theory generally 111-120
与非线性规划的比较
comparison to nonlinear programming 117-120
有效约束
effective constraints in 113-114
等式约束
equality constraints in 111
一阶条件
first-order condition in 112-115,117-119
拉格朗日函数
Lagrangian in 112,117
局部最大化条件
local maximum condition in 111-115,117
秩条件
rank condition in 113-117,128,130
二阶必要条件
second-order necessary condition in 114-115,117,128
二阶充分条件
second-order sufficient condition in 114-117,120,128-130
闭区间
Closed interval 7
科斯定理
Coase theorem generally 235-247,245
柯布一道布拉斯函数
Cobb-Douglas function 31, 60, 62, 151, 153,154,214,624
风险厌恶系数
Coefficient of risk aversion generally 273-278,316
绝对风险厌恶
absolute risk aversion 274,276-277,281, 301
相对风险厌恶
relative risk aversion 274,276-277
代数余子式
Cofactor 592,593,594
集(见集合)
Collection(*see* Set)
比较优势
Comparative advantage 202
比较动态学
Comparative dynamics 125
比较静态学
Comparative statics 125-131
收入补偿变化
Compensated change in income 146
补偿需求曲线
Compensated demand function 143,627
补偿价格效应
Compensated price effect 210
补偿性变动
Compensating variations 621, 627, 630, 638,642
竞争性均衡
Competitive equilibrium 235, 345, 347, 349,373,374
……的存在
existence of 374
价格向量
price vector 346,349,371
……的惟一性
uniqueness of 374
竞争性产业
Competitive industry 200
互补
Complements
商品互补
of goods 146,372
投入互补
of inputs 142,157
完全垄断
Complete monopoly 196

复线性空间(见复数域线性空间)
Complex linear space (*see* Linear space with complex field)
复合函数定理
Composite function theorem 45
复合彩票
Compound lottery 258-260
复合预期(见复合彩票)
Compound prospect(*see* Compound lottery)
凹函数
Concave function 52-60,53,87,92,93,94,95,96,212,215,266,496,515,516,545,558,606,607,608,609,610,611,613,616,617,618
严格凹函数
strictly 53-56,58-60,87,96,174,271,272,275,277,282,468,508,548,558,606,607,608,609,610,611,613
凹性条件
Concavity condition 107
条件(A-E)(见 Arrow-Enthoven 条件)
Condition(A-E)(*see* Arrow-Enthoven condition)
条件(A-H-U)(见 Arrow Hurwicz-Uzawa 条件)
Condition (A-H-U) (*see* Arrow-Hurwicz-Uzawa condition)
条件(B-H-C)(见加边海赛矩阵条件)
Condition (BHC) (*see* Bordered Hessian condition)
条件(Conc)(见凹性条件)
Condition(Conc)(*see* Concavity condition)
条件(Conv)(见凸性条件)
Condition(Conv)(*see* Convexity condition)
条件(FOC)(见一阶条件)
Condition(FOC)(*see* First-order condition)
条件(LM)(见局部最大化条件)
Condition(LM)(*see* Local maximum condition)
条件(lm)(见局部最小化条件)
Condition(lm)(*see* Local minimum condition)
条件(M)(见全局最大化条件)
Condition(M)(*see* Global maximum condition)
条件(m)(见全局最小化条件)
Condition(m)(*see* Global minimum condition)
条件(R)(见古典最优化理论的秩条件)
Condition(R)(*see* Rank condition in classical optimization theory)
条件(RC)(见正则条件)
Condition(RC)(*see* Regularity condition)
条件(S)(见 Slater 条件)
Condition(S)(*see* Slater's condition)
条件(SONC)(见古典最优化理论中的二阶必要条件)
Condition(SONC)(*see* Second-order necessary condition in classical optimization theory)
条件(SOSC)(见古典最优化理论中的二阶充分条件)
Condition(SOSC)(*see* Second-order sufficiency condition on classical optimization theory)
条件(SP)(见鞍点条件)
Condition(SP)(*see* Saddle-point condition)
规模收益不变
Constant returns to scale 49,143,150,158,159-161,204,289,290,356,523
约束合格
Constraint qualifications 93
消费者预算约束
Consumer's budget constraint 542
消费者选择
Consumer's choice 78,82,98-101,143-147,171,176
消费者需求函数
Consumer's demand function 172
消费者跨时选择
Consumer's intertemporal choice 212
消费者终生分配过程
Consumer's lifetime allocation process 541,547-553
消费者终生效用
Consumer's lifetime utility 548
消费者剩余
Consumer's surplus 198,221-222,567,621-647

连续函数
Continuous function 29-31, 35-36, 76-77, 83,266,329,412,607,612,614
分段连续函数
piecewise 454,458
一致连续函数
uniformly 29
上半连续函数
upper-semi 607
控制函数
Control function 331
控制域
Control region 454
控制变量
control variable 453,459,548,558
凸组合
Convex combination 52,83
凸函数
Convex function 52-60,54,94,523
严格凸函数
strictly 54-55,57,59-60,271,275,281, 282
凸性条件
Convexity condition 106-107
坐标
Coordinate 7
坐标系
Coordinate system 586
边角解
Corner solution 89,99,101,012
三角函数中的余弦定律
Cosine law in trigonometry 21
成本函数
Cost function 112,135,140,176,178,188, 197
成本函数的凹性
concavity of 140,164
一次齐次成本函数
homogeneity of degree one 140,154
成本最小化
Cost minimization 78, 101-103, 125-126, 134-135, 140-143, 151, 157, 164, 173, 176,178,189,190,197,217,584-585,601
成本最小化中的拉格朗日乘数
Lagrangian multiplier in 135,164
共态变量(见最优控制理论中的乘数)
Costate variables (*see* Multipliers in optimal control theory)
克莱姆法则
Cramer's rule 594
固定规模报酬
CRS(*see* Constant returns to scale)
曲线
Curve 631,632
闭曲线
closed 402,631
逐段光滑曲线
piecewise smooth 631
简单曲线
simple 631
光滑曲线
smooth 631

D

D-M 标准(见 Dupuit-Marshall 标准)
D-M measure(*see* Dupuit-Marshall measure)
Daeyang 奖
Daeyang Prize 201
非中央集权货币经济
Decentralized monetary economy 498
递减的绝对风险厌恶
Decreasing absolute risk aversion(hypothesis A) 275,277,295,301,310
递减规模报酬
Decreasing returns to scale 150, 158, 159-161,202,204
需求函数
Demand function 623, 625, 627, 634, 636, 637,638

补偿需求函数
compensated 627
位似需求函数
homothetic 625,634,637,638
导数
Derivative 40-44,42
一阶导数
first-order 49,51
k 阶导数
k^{th} order 49
左导数
left-hand 41
偏导数
partial 43
右导数
right-hand 41
二阶导数
second-order 49,51
二阶偏导数
second-order partial 50
行列式
Determinant 340,341,590-595,591,592,596,597,599,603
行列式的阶
order of 591
行列式的元素
elements of 591
可微函数
Differentiable function 40-44,42,57,607
连续可微函数
continuously 44,46,48,85,89,132,176,189,329,330,333,408,414,458,493,543,609,611,626,631
k 次可微函数
k times 50
三次连续可微函数
three-times continuously 278
二次可微函数
twice 50
二次连续可微函数
twice continuously 50,59,65,95,135,153,191,273,277,477,616,623,626,631,632
微分方程(组)
Differential equation(s) generally 325-418
殆线性系
almost-linear system 409
(渐近)全局稳定
(asymptotically) globally stable 335-336,338-339,341-342,348,351,354,357,370,372,395,399,405-406,412-413,420,422,433,446
(渐近)局部稳定
(asymptotically) locally stable 335-336,339,341,344,347-349,410,414
微分方程(组)的自控系
autonomous system of 328,411,462,466-467
解的定义域
domain of the solution 362
均衡
equilibrium 334-342,347,349,351,353-355,371,395-414
解的存在性
existence of solution 325,329-331
一阶微分方程(组)
first-order 328
微分方程(组)的通解
general solution of 332,385,388,390,392,394-395,402-404
齐次微分方程组
homogeneous system of 331,336,338,383
初始条件
initial condition 326,327,329,332,347,383,388,395,414
初值问题
initial-value problem 327
微分方程(组)的均衡的不稳定性
instability of equilibrium in 335

孤立均衡
isolated equilibrium 334, 336, 337, 341, 347,371,408
Liapunov稳定微分方程(组)
Liapunov stable 335
线性微分方程(组)
linear 331
线性系(组)
linear system 331, 336-337, 338, 342, 343,344,405,406,409,410414
线性独立解
linearly independent solutions 384, 392, 393
非自控微分方程组
nonautonomous system of 411,462,464-466
解的不存在性
nonexistence of solution 330,335
非齐次微分方程组
nonhomogeneous system of 337
非线性微分方程(组)
nonlinear 331,332
非线性系
nonlinear system 331, 338, 341, 342, 344,351,375,407-414
解的不惟一性
nonuniqueness of solution 330,336
常微分方程(组)
ordinary 328
偏微分方程(组)
partial 328
微分方程(组)的特解
particular solution of 332,385,388
周期运动
periodic motion 402
二阶微分方程(组)
second-order 328
微分方程(组)的解
solution of 325-327, 329-334, 384, 385, 386,387,388,390,391,393,394,395,396
调节速度
speed of adjustment 347
稳定性条件
stability condition 410-411
微分方程(组)的平凡解
trivial solution of 384,386
微分方程组的非耦合系统
uncoupled system of 394
解的惟一性
uniqueness of solution 329, 331-332, 337,339,357
微分
Differentiation
内积的微分
of inner product 52
积分的微分
of integrals 198,200,287
二次型的微分
of quadratic forms 52
不连续函数
Discontinuous function 29-30
Dirichlet不连续函数
Dirichlet's 30
第一类不连续函数
of the first kind 30,454
可支配收入
Disposable income 426-427,437
距离函数
Distance function 138
点积(见笛卡尔内积)
Dot product(*see* Euclidean inner product)
货币工资率的下降刚性
Downward rigidity of money wage rate 366
递减规模报酬
DRS(*see* Decreasing returns to scale)
对偶性
Duality 137-139
对偶关系
Duality relations 137
对偶定理

Duality theorem 137
倾销
Dumping 561-562,567
Dupuit-Marshall 标准
Dupuit-Marshall measure 622, 625, 628, 635,640,642,643
平面解的动态行为
Dynamic behavior of the solution on the plane generally 395-407
复数根(非纯虚数)
complex roots(not pure imaginary) 398-402,410
复数根(纯虚数)
complex roots(pure imaginary) 402-403, 405,410,411
等根
equal roots 403-405,410,411
异号实根
real roots of opposite signs 397-398,406, 410
同号不等实根
unequal real roots of same sign 395-397, 406,410

E

信息经济学
Economics of information 305-316
不确定性经济学
Economics of uncertainty 257-321
连续性公理
continuity axiom 259,263,267
独立性公理
independence axiom 261-262, 263, 268-270
线性性质
linearity property 265
单调性
monotonicity property 262,263,264
保序性
order-preserving property 265-266
作为信号的教育
Education as signal 306
有效利率
Effective rate of interest 304
本征方程(见特征方程)
Eigen equation(*see* Characteristic equation)
本征值
Eigenvalue 343, 386-387, 395, 399, 400, 405-406,407,433,595-600
本征值的重数
multiplicity of 596,599
简单根
simple root 596
本征向量
Eigenvector 387,595-600
需求弹性
Elasticity of demand 193, 231, 232, 559, 560,561,565,566
固定需求弹性
constant 560,566
递减需求弹性
decreasing 561
递增需求弹性
increasing 561
要素替代弹性
Elasticity of factor substitution 151-157, 178,181
边际消费效用弹性
Elasticity of marginal utility of consumption 508,509
恩格尔曲线(另见垂直恩格尔曲线)
Engel curve 628 (*see* also Vertical Engle curve)
包络线定理
Envelope theorem 131-137, 132, 164, 188, 626
包络线定理中的最大值函数
maximum value function in 132
等价性变动

Equivalent variations 621,628,641,642
欧几里得距离
Euclidean distance 19
欧几里得内积
Euclidean inner product 18,577,578,608
欧几里得范数
Euclidian norm 20
欧几里得空间
Euclidian space 13-24
欧拉方程
Euler equation
齐次函数的欧拉方程
for homogenous functions 49, 289, 371, 585
变分法中的欧拉方程
in calculus of variations 469-470, 472, 635
欧拉-拉格朗日定理
Euler-Lagrange theorem 112-113
联系指数函数和三角函数的欧拉公式
Euler's formula connecting the exponential and trigonometric functions 389,391
齐次函数欧拉定理
Euler's theorem for homogeneous functions 48
估价向量
Evaluating vector 108
产品耗尽问题
Exhaustion of product problem 49
扩张效应(见规模效应)
Expansion effect(*see* Scale effect)
扩张路径
Expansion path 133,161,162,163,177
预期资本报酬率
Expected rate of return on capital 521
期望效用
Expected utility 270, 271, 280, 282, 283, 286,289,291,299,308,309,315
期望效用假设
Expected utility hypothesis generally 257-270
期望效用性质
Expected utility property 265
期望效用定理
Expected utility theorem 264
要素支出弹性
Expenditure elasticity of a factor 195
支出函数
Expenditure function 143-144,627
支出函数的凹性
concavity of 144
一次齐次支出函数
homogeneity of degree one 144
支出最小化问题
Expenditure minimization problem 143
指数函数
Exponential function 389
外部不经济
External diseconomies 235
外部经济
External economies 235
外在性
Externalities 235,237-242
要素需求函数
Factor demand function 103,153,192

F

生产要素
Factors of Production
E-K 互补性
E-K complementarity 156
E-L 替代性
E-L substitutability 156
公平博弈
Fair gamble 285
公平收益率约束
Fair-rate-of-return constraint 212
公平收益率规制
Fair-rate-of-return regulation 218,234

族(见集合)
Family(*see* Set)
一阶条件(见最优值)
First-order condition(for optimum) 85-103, 88, 91-100, 101-102, 104, 106-108, 112-119, 130, 174, 196, 198, 213, 215, 224, 230, 238-241, 283, 287, 289, 291, 292, 298, 303, 309, 311, 312, 616, 617, 618, 619, 623
Fisher 法则
Fisher's law 297-299
Fisher 法则的不确定性版本
uncertainty version of 299
固定系数技术
Fixed coefficient technology 234
固定成本
Fixed costs 205
资本的固定性
Fixity of capital 521, 522, 533
灵活泛函形式
Flexible functional forms 152
强制函数(见控制函数)
Forcing function(*see* Control function)
自由竞争
Free competition 240
完全资本能力
Full capacity 225-228
充分就业
Full employment 351, 356, 362, 370, 424
函数
Function 10-12
双射(见一一对应)
bijection(*see* one-to-one correspndence)
复合函数
composite 12
常数函数
constant 11
函数的定义域
domain of 10
函数的图
graph of 11
函数的映像
image of 10, 12
单射
injection(*see* one-to-one)
反函数
inverse 11, 48
函数的反象
inverse image of 12, 35
单调递增函数
monotone increasing 275, 548
多值函数
multivalued 11
处处不连续函数
nowhere continuous 30
处处不可微函数
nowhere differentiable 42
C^{k+1}类函数
of class C^{k+1} 50
一对一
one-to-one 11, 590
一一对应
one-to-one correspondence 11
映上
onto 10
函数的值域
range of 10
实值函数
real-valued 10
集值函数
set-valued 11
单值函数
single-valued 11
函数的可解性
solvability of 47
函数值
value of 10
价值理论中的基本方程(见 Hicks-Slutsky 方程)
Fundamental equation in value theory(*see* Hicks-Slutsky equation)

比较静态学的基本方程
Fundamental equation of comparative statics 128
基本矩阵
Fundamental matrix 385
代数学基本定理
Fundamental theorem of algebra 596

G

g 约束
g-constraint 489,541,546
几何滞后
Geometric lag 360
迅速致富效应
Get-rich-quick effect 270
吉芬商品
Giffen good 146,626
吉芬投入
Giffen input 190,192
吉芬悖论
Giffen paradox 146,188
全局最大值
Global maximum 86-88, 119, 174, 286, 292,297,298,299,303,607,617
全局惟一最大值
unique 116,286,292,297,298,299,303, 607,617
全局最大化条件
Global maximum condition 86-89, 91-93, 97-98,104-108,616,617,618,619
全局最小值
Global minimum 86
全局最小化条件
Global minimum condition 86
黄金律路径
Golden-rule path 444,482,483,487,502
修正黄金律路径
modified 482,487,502
黄金时代路径(见均衡增长路径)
Golden-age path(*see* Balanced growth path)
Goldman-Tucker 定理
Goldman-Tucker theorem 110
商品市场均衡
Goods market equilibrium 445
最大下界(见下确界)
Greatest lower bound(*see* Infimum)
Green 定理
Green's theorem 632
总可替代性
Gross substitutability 349-350, 370, 371, 372,373,374
全局总可替代性
global 349,372
局部总可替代性
local 349

H

H 标准(见 Hick 标准)
H measure(*see* Hicksian measure)
Hamilton 函数
Hamiltonian 455,457,460,469,495,497, 500,507,516,523,528,544,546,548,550, 554,558,562,564
现值 Hamilton 函数
current value 495, 497, 500, 507, 516, 523,528,550
广义 Hamilton 函数
generalized 544,554
Hamilton 方程组
Hamiltonian system 454-455, 463, 464, 465,467,472,478,495
Hayashi 齐次性假设
Hayashi's homogeneity assumption 482, 530,531
投资理论中的 Hayashi 定理
Hayashi's theorem in investment theory 530,532
海赛矩阵

Hessian matrix 51, 58, 96, 117, 128, 135, 154, 165, 168, 174, 224, 631
负定海赛矩阵
negative definite 174, 224
半负定海赛矩阵
negative semidefinite 164, 168
海赛矩阵的对称性
symmetry of 135, 154, 631
Hestenes 定理
Hestenes's theorem 543
Hicks-Slutsky 方程
Hicks-Slutsky equation 131, 144-145, 175, 206, 209, 212, 348, 372, 626
Hicks-Slutsky 矩阵(见消费替代矩阵)
Hicks-Slutsky matrix(*see* Substitution matrix in consumption)
Hicks 需求函数(见补偿需求函数)
Hicksian demand function (*see* Compensated demand function)
福利变化的 Hicks 标准
Hicksian measure of welfare change 622, 625-626, 627-630, 640-643
福利变化的 Hicks 标准的计算
computation of 627-630
H 标准(见福利变化的 Hicks 标准)
H measure (*see* Hicksian measure of welfare change)
隐藏行为
Hidden action 311
在一般平面上的齐次线性方程组
Homogeneous linear system on the plane generally 385-394
相异复根 distinct complex roots 389-392
相异实根 distinct real roots 388-389
相等实根 equal real roots 392-394
齐次函数
Homogeneous function 49, 144, 150, 210, 214, 289, 371, 425, 476, 499, 523, 528, 532, 585, 623, 631, 634, 635, 639
m 次齐次函数
of degree m 49, 633
-1 次齐次函数
of degree-1 633, 635, 638
一次齐次函数
of degree one 144, 150, 214, 425, 476, 499, 523, 528, 532
零次齐次函数
of degree zero 584, 623, 626, 631, 633
位似需求
Homothetic demand 634, 635-638, 641
位似函数
Homothetic function 147-151, 155, 161, 177, 625, 634, 636, 638
位似偏好
Homothetic preferences 154, 637
Hotelling 引理
Hotelling's lemma 136, 137
Hotelling 对称关系
Hotelling's symmetry relation 136, 37
超平面
Hyperplane 612

I

隐函数定理
Implicit function theorem 46-47, 99, 127
非正常结点(见结点)
Improper node(*see* Node)
收入效应
Income effect 145, 642, 643
消费收入弹性
Income elasticity of consumption 512
收入风险
Income risk 298-300, 303, 305
收入—闲暇选择
Income-leisure choice 206-212
收入—闲暇选择中的预算条件
budget condition in 206
递增相对风险厌恶(假设 B)

Increasing relative risk aversion (hypothesis B) 277,295
递增规模收益
Increasing returns to scale 150, 157, 158, 159-162,202,204
递增规模收益的局部标准
local measure of 162-163
无差异曲线
Indifference curve 56, 62-63, 64, 81, 82, 98,99
风险下的无差异曲线
under risk 280-281,284
无差异平面(见无差异曲线)
Indifference surface(*see* Indifference curve)
间接效用函数
Indirect utility function 133,172,176
间接效用函数的对数和形式
addilog form of 172
劣等商品
Inferior good 146,209
劣等投入
Inferior input 146,190-191,193,196
下确界
Infimum 13
反射点
Inflection point 92
内积(见欧几里得内积)
Inner product(*see* Euclidean inner product)
内积空间
Inner product space 18
保险
Insurance 281-290,292,307-313
保险金额
Insurance coverage 282, 283, 284, 285, 307,308,310,311,312
全保险
full coverage 285,308,312
保险费
Insurance premium 282, 284, 285, 309, 310,311,312
可积性
Integrability
经济可积性
economic 632
数学可积性
mathematica 632
数学可积性的充要条件
necessary and sufficient condition for mathematica integrability 632
经济可积性的充分条件
sufficient condition for economic integrability 632
积分约束
Integral constraints 542,553
跨时套利选择
Intertemporal arbitrage condition 519-520, 549
跨时预算条件
Intertemporal budget condition 509
公司跨时决策过程
Intertemporal decision-making process of a firm 533
反需求函数
Inverse demand function 213,565
反函数定理
Inverse function theorem 48
投资
Investment generally 514-535
调节成本法
adjustment cost approach 522-525
投资的不可逆性
irreversibility of 487,517,527
新古典理论
neoclassical theory 515-522
被动投资
passive 425,440
递增规模收益
IRS(*see* Increasing returns to scale)
Irving Fisher 图
Irving Fisher diagram 511

IS曲线
IS curve 350,420,422
IS—LM
LS—LM 350
IS—LM宏观均衡
LS—LM macroequilibrium 350,365
等弹性效用函数
Isoelastic utility function 510
等周长问题
Isoperimetric problem 541,553-556

J

雅可比定理
Jacobi's theorem 170
雅可比行列式条件
Jacobian determinant condition 341
雅可比矩阵
Jacobian matrix 45, 47-48, 95, 112, 132, 170,341,351,352,430,442
雅可比矩阵的非奇异性
nonsingularity of 42-43,48
Jensen不等式
Jensen's inequality 272
联合利润最大化
Joint profit maximization 239

K

Keynes-Ramsey法则
Keynes-Ramsey rule 481,501,503
Kenynes体系
Keynesian 422,423
刀刃情况
Knife-edge case 336,348,422
Knigbt不确定性
Knightian uncertainy 521
库恩—塔克—拉格朗日条件
Kuhn-Tucker-Lagrange condition 106

L

L'Hospital法则
L'Hopital's rule 641
劳动力供给曲线
Labor supply curve generally 206-212
后弯的劳动力供给曲线
backward-bending 207-208,210-211
向上倾斜的劳动力供给曲线
upward-sloping 207,210-211
拉格朗日函数
Lagrangian 84,88,90,91,92,96,98,101, 104, 109, 112, 117, 127, 130-131, 133, 136, 224,230,238,297,452,456,616
拉格朗日乘数
Lagrangian multiplier 88, 109, 132, 134, 164,167,188,212,224,623,626
拉格郎日乘数的解释
interpretation of 134
Landau的o符号
Landau's o-symbol 43,409
拉普拉斯展开
Laplace expansion 592,594,595
系数展开的拉普拉斯法则(见拉普拉斯展开)
Laplace rule of expansion of cofactors (*see* Laplace expansion)
需求法则
Law of demand 146
LAS(见线性近似系统)
LAS(*see* Linear approximation system)
Le Châtelier-Samuelson原理
Le Châtelier-Samuelson principle 163-171
最小上界(见上确界)
Least upper bound(*see* Supremum)
Lemon法则
Lemon principle 306,313,314
LeS原理(见Le châtelier-Samuelson原理)
LeS principle (*see* Le Châtelier-Samuelson principle)

水平集(见无差异曲线)
Level set(*see* Indifference curve)
Liapunov 函数
Liapunov function 412-413
Liapunov 直接法
Liapunov's direct method 411-414
Liapunov 定理
Liapunov's theorem 338,414
Liapunov 第二方法(见 Liapunov 直接法)
Liapunov's second method(*see* Liapunov's direct method)
生命周期假设
Life-cycle hypothesis 504,506
终身预算条件
Lifetime budget condition 551
终身收入
Lifetime income 551
函数的极限
Limit of a function 28
函数的左极限
left-hand 29
函数的右极限
right-hand 29
线性积分
Line integral 625,630,631,633
线性仿射(见线性仿射变换)
Linear affine(*see* Linear affine transformation)
线性仿射变换
Linear affine transformation 266-267,586
线性代数
Linear algebra 573-604
线性近似稳定
Linear approximation stable 339
线性近似系统
Linear approximation system 338, 370, 411,420-421,433,442,446
平面线性微分方程
Linear differential equation on the plane 383-418,419
线性齐次函数(见一次齐次函数)
Linear homogeneous function(*see* Homogeneous functon of degree one)
线性规划
Linear programming 79,83,108-111
对偶定理
duality theorem 110
线性规划中的对偶问题
dual problem in 110
线性空间
Linear space 14-18,15,582,585
线性空间的结合律
associative law in 14
线性空间的基
basis for 16-17,582
线性空间的交换律
commutative law in 14
线性空间的维
dimension of 17,583,584
线性空间的分配律
distributive laws in 14
有限维线性空间
finite dimensional 17
无限维线性空间
infinite dimensional 17
线性空间的原点
origin of 15
线性空间的正交基
orthogonal basis for 24
复数域线性空间
with complex field 16
线性子空间
Linear subspace 582-583
平凡线性子空间
trivial 582
线性变换
Linear transformation 585-590,636
线性变换的和
addition of 588
线性变换的相等
equality of 589

不可逆线性变换
invertible 589,590
线性变换的积
product of 588-589
线性变换的数乘
scalar multiplication of 588
线性化
Linearization 409-410
流动性陷阱
Liquidity trap 420,422
Livingston 数据
Livingston data 361
LM 曲线
LM curve 350,420,422
信贷资金
Loanable funds 313,354
信贷资金理论
Loanable funds theory 352,354
局部位似性
Local homotheticity 637
局部最大值
Local maximum 86-88,111,117,118,119,607
局部最大值条件
Local maximum condition 86-89,91-95,97,106-108,111-115,116,128
局部最小值
Local minimum 86
局部最小值条件
Local minimum condition 86
局部不满足
Local nonsatiation 98
逻辑命题
Logical statement 8-10
逻辑命题的推论
conclusion 8
逆否
contrapositive 9
逆否命题
contrapositive argument 9
逆
converse 9
假设
hypothesis 8
逻辑修饰量词
logical quantifier 10
(逻辑)等价命题
(logically)equivalent statements 9
充要条件
necessary and sufficient condition 9
必要条件
necessary condition 9
否命题
negation 10
修饰量词
quantifier 10
充分条件
sufficient condition 9
无意义真命题
vacuously ture statement 8
七种凹性的逻辑关系
Logical connections among seven kinds of concavity 611
长期需要的资本存量
Long-run desired stock of capital 525
长期边际成本
Long-run marginal cost 164
变动需求的长期价格弹性
Long-run price elasticity of variable demands 167
长期失业率
Long-run rate of unemployment 361
长期供给弹性
Long-run supply elasticity 167
长期总成本
Long-run total cost 165
损失法则(à la C. Menger)
Loss principal(à la C. Menger) 134
下界
Lower bound 13

M

宏观调节过程
Macro adjustment processes 350-355, 49-423
宏观理性预期假设
Macro rational expectation hypothesis 363, 364
宏观均衡
Macroequilibrium
凯恩斯体系
Keynesian system 350-351
新古典体系
neoclassical system 351-355
Mangasarian 定理
Mangasarian's theorem 618-619
映射(见函数)
Mapping(*see* Function)
投资边际调节成本
Marginal adjustment cost of investment 534
边际成本
Marginal cost 126,135,142,157,169,187, 188,193, 196, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204,205,229,231,559,564,565,568
边际成本曲线
Marginal cost curve 126, 187, 188, 192, 194,195,199,200,201,202,203,204
边际成本定价
Marginal cost pricing 196-201,1'99,229, 287,563,564,567
边际资本效率
Marginal efficiency of capital 517, 525, 533,535
边际产品
Marginal product 58
边际生产力法则
Marginal productivity rules 518
边际消费倾向
Marginal propensity to consume 504
边际储蓄倾向
Marginal propensity to save 305
边际替代率
Marginal rate of substitution 177,207-208, 283
边际时间偏好率
Marginal tate of time preference 297,299, 304
资本风险下的边际时间偏好率
under capital risk 304
收入风险下的边际时间偏好率
under income risk 300
边际收益
Marginal revenue 196,231,559,560,565
边际收益产品
Marginal revenue product 214,218
边际收益产品曲线
Marginal revenue product curve 218
边际消费效用
Marginal utility of consumption 58, 99, 481,549
负边际消费效用
negative 99
收入边际效用
Marginal utility of income 133, 621, 622, 628,633-643
收入边际效用的不变性
constancy of 621,622,633-637,640-643
货币边际效用(见收入边际效用)
Marginal utility of money(*see* Marginal utility of income)
市场失效
Market failure 236,240
市场解决
Market solution 204
马歇尔调节
Marshallian adjustment 366
马歇尔需求函数
Marshallian demand function 99
福利变化的马歇尔标准(见 Dupuit-Marshall 标

准)
Marshallian measure of welfare change (*see* Dupuit-Marshall measure)
马歇尔稳定性
Marshallian stability 345,366
马歇尔梯形
Marshallian trapezoid 635,640
马歇尔三角
Marshallian triangle 621,623-626,641
矩阵
Matrix(ces) 45,573-603
矩阵的和
addition of 573,574
伴随矩阵
adjoint of 593
作为线性变换的矩阵
as linear transformations 585-590,586
结合律
associative law 574,576
矩阵的列秩
column rank of 581
交换律
commutative law 574
可交换的
commuting 576
对角矩阵
diagonal 576,582,598
矩阵的对角化
diagonalization of 598
分配律
distributive law 574,576
矩阵相等
equality of 573
矩阵满秩
full rank of 581
单位矩阵
identity 576,580,589,597
逆矩阵
inverse 579,580,581,582,590
矩阵中的线性相关列
linearly dependent columns in 580
矩阵中的线性相关行
linearly dependent rows in 580
矩阵的余子式
minor of 592
数阵的乘法
multiplication of 575-576,595
非奇异矩阵
nonsingular 84,129,340,384,385,395,407,414,579,580,581,582,584,585,590,593,595,598,599,600,601,603
矩阵的零空间
null space of 583,585
正交矩阵
orthogonal 599
可交换的
permutable 576
后乘数
post multiplier in 576
前乘数
premultiplier in 576
矩阵的秩
rank of 581-584,585
矩阵的秩定理
rank theorem of 581
矩阵的行秩
row rank of 581
矩阵逆的法则
rule of the inversion of 593
矩阵的数乘
scalar multiplication of 574
奇异矩阵
singular 387,580,585,601
谱分解
spectral decomposition 600
方阵
square 573, 574, 576, 579, 581, 582, 583,590,591,595,599
矩阵的和(见矩阵的加法)
summation of(*see* addition of)

对称矩阵
symmetric 130,135,146,154,342,576,597,599,600,601,603,627,631,632
矩阵的迹
trace of 340,341,597
矩阵的转置
transpose of 576, 577, 578, 579, 581, 593,598,603
单位矩阵
unit 576
零矩阵
zero 574,582,589
矩阵代数(见线性代数)
Matrix algebra(*see* Linear algebra)
最大元素
Maximum element 13
最大原理(见 Pontryagin 最大原理)
Maximum principle(*see* Pontryagin's maximum principle)
MC(见边际成本)
MC(*see* Marginal cost)
MC 曲线(见边际成本曲线)
MC-curve(*see* Marginal cost curve)
均值方法
Mean-value aproach 290
规模收益标准
Measure for returns-to-scale 150
基数性的衡量尺度
Measuring stick for cardinality 636, 637, 640
度量
Metric 19
度量空间
Metric space 19
度量空间中的三角不等式
triangular inequality in 19
度量空间中的对称
symmetry in 19
工厂价
Mill price 563,564,568
工厂价定价
Mill pricing 563,568
最小成本函数(见成本函数)
Minimum cost function(*see* Cost function)
最短距离问题
Minimum distance problem 471-472
最小元素
Minimum element 13
最小支出函数
Minimum expenditure function(*see* Expenditure function)
最少工资法规
Minimum wage legislation 219
货币主义 I
Monetarism mark I 364
货币主义 II
Monetarism mark II 364
货币主义者
Monetarists 422
货币均衡
Monetary equilibrium 368, 424, 426, 434, 440,445,446
货币政策
Monetary policy
通货紧缩货币政策
deflationary 438
通货膨胀货币政策
inflationary 438
货币
Money 350,365,366,368,419,423,425,426,428,429,430,438,498,499,503
货币的中性
neutrality of 429
货币的超中性
superneutrality of 430
货币和增长模型
Money and growth model 423-447
货币和增长模型的 Drabicki-Takayama 扩展
Drabicki-Takayama's extension of 436-447

Tobin 的货币和增长模型
Tobin's 423-436
垄断竞争公司
Monopolistic competitive firm 557
垄断
Monoply 196,565
垄断者
Monopsony 223
道德风险
Moral hazard 307,311,313
摩门教徒
Mormons 100
MUI(见边际收入效用)
MUI(*see* Marginal utility of income)
最优控制理论中的乘数
Multipliers in optimal control theroy 456, 478, 479, 493, 494, 495, 497, 499, 500, 507, 523,533,544,545,551,554,558,562,564
缺乏远见的完善预测
Myopic perfect foresight
424,436,439

N

最优控制的充要条件
Necessary and sufficient condition for optimal control 468, 470, 479, 497, 500, 507-508, 516,523,528,545,548
非线性规划中的充要条件
Necessary and sufficient condition in nonlinear programming 89, 92-93, 95, 97, 98, 102, 109
非线性规划的必要条件
Necessary condition in nonlinear programming (*see* First-order condition)
最优控制的必要条件
Necessary condition for optimal control 454,457,465,467,468,469,470, 478,493,495,507,516,528,545,548,555,558
负定
Negative definite 37-40,59,129,174,224, 342,600,601,602
半负定
Negative semidefinite 37-40, 58-59, 129, 130,164,168,600,601,602
点的邻域
Neighborhood of a point 34,86
新古典增长模型
Neoclassical growth model 356-358, 419-448,475,476,496,498
新古典技术
Neoclassical technology 234
净替代
Net substitution 145
净替代矩阵(见替代矩阵)
Net substitution matrix(*see* Substitution matrix)
新古典宏观经济学(见宏观理性预期假设)
New classical macroeconomics(*see* Macro rational expectation hypothesis)
牛顿力学
Newtonian mechanics 455
NM 效用函数
NM utility function 264, 266, 267, 271, 274,275,277,286
NM 效用函数的例子
examples of 278-281
结点
Node 375,383,396,404,407,422,433
实物资产的名义收益率
Nominal rate of return on physical assets 424,436
非人类工作者
Nonhuman workers 212
非线性规划
Nonlinear programming generally 75-120, 78
选择变量(见决策变量)
choice variable(*see* decision variable)
约束函数
constraint function 77,83,96

约束集
constraint set 75,77,80-81,86-87,93
决策变量
decision variable 75,80,119
有效约束
effective constraints 82
等式约束
equality constraint 84-85
可行解(见约束集)
feasible set(*see* constraint set)
不相容约束
inconsistent constraints 80
无效约束
ineffective constraints 82
不等式约束
inequality constraint 85
内解
interior solution 99,102,113,208
最大化函数
maximand function 75,89,96
混合约束
mixed constraints 85
非负约束
nonnegative constraint 77,84,119
目标函数(见最大化函数)
objective function(*see* maximand function)
最优点(见解)
optimum point(*see* solution)
秩条件
rank condition 94-95
解
solution 75-76,81-84
惟一解
unique solution 75,84,87
预算条件中的非线性
Nonlinearities on the budget condition 212
经济主体的非市场依存(见外在性)
Non-market interdependence of economic agents(*see* Externalities)
非货币中央集权经济
Nonmonetary centralized economy 498
非负象限
Nonnegative orthant 80,104
非满足
Nonsatiation 208,298
不可储存商品
Nonstorable good 219
拟凹规划中不同时为0的梯度向量
Nonvanishing gradients in quasi-concave programming 611-615
正常商品
Normal good 209
正常收入假设
Normal income hypothesis 505
正常投入
Normal input 190-191,196
标准化价格
Normalized price 639
赋范线性空间
Normed linear space 20
赋范线性空间中的不等式
triangular inequality in 20
赋范向量空间(见赋范线性空间)
Normed vector space(*see* Normed linear space)
等价物
Numéraire 346,634,639

O

Occam的剃刀
Occam's razor 629
Olech定理
Olech's theorem 341-342, 354, 355, 370, 422
开球
Open ball 34
开球的半径
radius of 34
开区间
Open interval 7

运算符(见函数)
Operator(*see* Function)
机会成本
Opportunity cost 134,224
累积的机会成本
Opportunity cost of accumulation 480,481,549
风险下的机会线
Opportunity line under risk 284,292
最优控制理论
Optimal control theory generally 451-569
解的存在性
existence of solution 453
无限期界
infinite horizon generally 493-540
不同时为0
not vanishing simultaneously 454, 463, 464,465,469
最优控制
optimal control 456
最优对
optimal pair 456
最优控制论的秩条件
rank condition in 543,547
解对(见最优对)
solution pair(*see* optimal pair)
解的惟一性
uniqueness of solution 453
最优增长路径
Optimal growth path 487,503
最优增长问题
Optimal growth problem 475-489, 496-498,542
可达路径
attainable path 476
可行条件
feasible condition for 476,487
纯积累路径
path of pure accumulation 478
两部门
two-sector 484
最优货币政策
Optimal monetary policy 498-504
最优定价政策
Optimal pricing policy 233-234
后果
Outcomes(in a prospect) 258,259,264,268
要素需求的产出弹性
Output elasticity of the demand for a factor 193,195
过度保险
Over-insurance 310
交叠世代模型
Overlapping generation model 506
自我价格效应
Own-price effect 602

P

帕累托最优
Pareto optimum 235, 239-242, 244-245, 247
分块矩阵
Partitioned matrices 594-595
Passus系数(见规模弹性)
Passus coefficient(*see* Scale elasticity)
路径(见轨道)
Path(*see* Trajectory)
路径独立
Path independence 623-626,625,631,632, 633
满负荷问题
Peak-load problem 219-235
稳固高峰情况
firm-peak case 227-229,233
利润最大化的垄断者
profit-maximizing monopoly 230-234
移动高峰情形
shifting-peak case 226,228-229,232
福利最大化的垄断者

welfare-maximizing monopoly 221-229
完善的资本市场
Perfect capital market 515,520
完善的缺乏远见的预测(见缺乏远见的完善预测)
Perfect myopic foresight (*see* Myopic perfect foresight)
完美的稳定性
Perfect stability 348
持久收入
Permanent income 509,512,514
持久收入假设
Permanent income hypothesis 504-514
排列
Permutation 590-591
逆排列
inversion in 591
相图
Phase diagram 336,357,361,486
相图技术
Phase diagram technique 370, 375, 419, 430,482
相平面
Phase plane 395
菲利普斯曲线
Phillips curve 358-365,367
附加预期的菲利普斯曲线
expectation augmented 360-365
庇古解
Pigouvian solution 236
庇古的税收—补贴方案
Pigouvian tax-cum-subsidy scheme 237,240
计划投资
Planned investment 437
计划储蓄
Planned savings 437
计划模型
Planning model 78
Poincare 定理
Poincaré's theorem 375-376,410,419,422
极坐标
Polar coordinates 401
Pontryagin 乘数(见最优控制理论中的乘数)
Pontryagin multipliers(*see* Multipliers in optimal control theory)
Pontryagin 最大化原理
Pontryagin's maximum principle 451-461, 456,471
Pontryagin 定理
Pontryagin's theorem 467
资产组合选择
Portfolio choice 290-296,439
资产组合转移
Portfolio shift 354
资产组合转换
Portfolio switching 429
正定
Positive definite 37-40,59,412,600,601
半正定
semidefinite 37-40,59,600,601
正定函数
Positive definite function 412
Pratt 定理
Pratt's theorem 274
偏好排序
Preference ordering 258-259
风险下的预防行为
Preventive activity under risk 307-312
价格歧视
Price discrimination 560,561,562,566
委托人
Principal 315
委托人—代理人问题
Principal-agent problem 315
私人利润最大化
Private profit maximization 240
概率密度函数
Probability density function 286
生产外生性
Production externality 237

生产函数
Production function 57-58,213
生产函数的凹性
concavity of 58
生产等产量线
Production isoquant 56
利润最大化
Profit maximization 135-137,188,190,217
利润最大化中的拉格朗日函数
Lagrangian in 136
利润最大化条件
Profit maximization condition 241,243,565
利润最大化公司
Profit maximizing firm 562,567
储蓄倾向
Propensity to save 512
正常结点
Proper node 396,405
比例假设
Proportionality hypothesis 505
预期
Prospect 258,259,272
伪凹函数
Pseudo concave function 607, 609, 610, 611,612,613,615,617,618,619
局部伪凹函数
locally 614,615,619
局部严格伪凹函数
locally strictly 615,619
严格伪凹函数
strictly 608, 609, 610, 611, 613, 614, 617,618
纯交换经济
Pure exchange economy 348

Q

二次型
Quadratic form 36-40,37,180,600,602
货币数量论
Quantity theory of money 352
拟凹函数
Quasi-concave function 60-65, 60, 80-81, 87-88, 95, 102, 118, 119, 544, 605, 606, 607, 608,611,612,613,614,615,616,617,618,619
显式拟凹函数
explicitly 61-64,606,607,608,610,611, 613,617
严格拟凹函数
strictly 60-65,93,96-98,118,119,606, 607,610,611,613,614,615,617,618,623
拟凹规划
Quasi-concave programming 95-98,615-619
拟凸函数
Quasi-convex function 60,81
显式拟凸函数
explicitly 60
严格拟凸函数
strictly 60
拟固定要素
Quasi-fixed factor 150,164,167,170
拟排序
Quasi-ordering
完备拟排序
complete 259
局部拟排序
partial 259
完全拟排序
total 259
拟鞍点条件
Quasi-saddle-point condition 106

R

Ramsey-Cass-Koopmans 法则（见 Keynes-Ramsey 法则）
Ramsey-Cass-Koopmans rule (*see* Keynes-Ramsey rule)
折旧率
Rate of depreciation 476,515,519,525

通胀率
Rate of inflation 358, 359, 361, 364, 370, 433-434, 436, 439, 440
实际通胀率
actual 359, 433
预期通胀率
expected 358, 359, 433, 434
利率
Rate of interest 296, 297, 299, 304, 305, 352, 365, 419, 439, 440, 506, 547
名义利率
nominal 366, 439, 440, 506
真实利率
real 296, 297, 299, 304, 305, 506, 548
真实利率的稳定性
stability of real rate 513
时间偏好率
Rate of time preferences 508
失业率
Rate of unemployment 358, 360, 361, 362, 363, 364
长期失业率
long-run 361
自然失业率
natural 361-362, 363, 365
理性预期
Rational expectations 363, 364, 424, 432, 436, 499
理性数字
Rational number 8
配给
Rationing 170-171
货币实际收益率
Real rate of return on money 425, 429
投资区域分配
Regional allocation of investment 458-461
退化要素(见劣等投入)
Regressive factor(*see* Inferior input)
后悔理论
Regret theory 268
正则条件
Regularity condition 138-139, 147
规则约束
Regulatory constraints 212-219
规则约束下的公司行为
behavior of the firm under 212-219
相对风险保费
Relative risk premium 277
相关变量
Relevant variable 95, 616, 619
规模收益,它的概念
Returns to scale, its concept 150, 157-163
显示偏好
Revealed preference
显示偏好的强公理
strong axiom of 632, 633
显示偏好的弱公理
weak axiom of 632
风险厌恶函数
Risk aversion function 296
风险承担费
Risk-bearing fee 289, 304
风险补充性
Risk complementarity 302
风险保费
Risk premium 272, 273, 281
风险资产
Risky asset 291-295
风险证券
Risky security 296
根(见本征值)
Root(*see* Eigenvalue)
Routh-Hurwitz 条件
Routh-Hurwitz condition 343-345, 368
Routh-Hurwitz 定理
Routh-Hurwitz theorem 343, 365-370
Routh-Hunwitz 定理的应用
aplication of 365-370
Roy 恒等式
Roy's identity 134, 137, 172, 176, 627,

634,635,638

S

非线性规划中的鞍点
Saddle point in nonlinear programming 103-111
鞍点特征
saddle-point characterization 83,137
鞍点条件
saddle-point condition 85,104-108,105
微分方程中的鞍点
Saddle point in differential equations 383,398,405,407,422,430,432,443,482,485
安全资产
Safe asset 291,293
Samuelson 互反关系
Samuelson's reciprocity relation 135
Samuelson 正则条件
Samuelson's regularity condition 141,166,169,189,585,601
储蓄—投资均衡
Saving-investment equilibrium 440
储蓄决策
Sevings decisions
无风险的储蓄决策
under no risk 296-299
资本风险下的储蓄决策
under capital risk 302-304,305
收入风险下的储蓄决策
under income risk 299-302,304-305
标量
Scalar 14
规模系数
Scale coefficient 159
规模不经济
Scale diseconomies 204
规模经济
Scale economies 204-205
规模效应
Scale effect 189-190,192
规模弹性
Scale elasticity 159
规模因子(见规模系数)
Scale factor(*see* Scale coefficient)
(最优)二阶条件
Second-order condition (for optimum) 98,99,287,309
二阶可微
Second-order differentiable
二阶近似
approximation 153
表面上不相关回归
Seemingly unrelated regression 181
自我实现预期
Self-fulfilling expectations 363,424
自我选择
Self-selection 306
敏感性分析
Sensitivity analysis 125-181
可分成本函数
Separable cost function 147,155,176
可分特性
Separation property 296
可分定理
Separation theorem 290
序列
Sequence 25-29,36
有界序列
bounded 26
柯西序列
Cauchy 27
收敛序列
convergent 25-28
收敛子序列
convergent subsequence 36
序列的下极限
limit inferior of 27
序列的极限
limit of 25,28,36

序列的极限点
limit point of 26,28
序列的上极限
limit superior of 27
实数序列
of real numbers 26
序列的子序列
subsequence of 26,36
序列的项
terms of 25
序列的值
values of 25
级数
Series 27-28
绝对收敛级数
absolutely convergent 28
无限级数
infinite 28
级数的部分和
partial sum of 28
集合
Set 4-8
集合的边界
boundary of 34
集合的边界点
boundary point of 34
有界集合
bounded 35-36
闭集
closed 32-33,36
紧集
compact 35,76,83
补集
complement of 6
连通集
connected 454
凸集
convex 52-53,54,55,56-58,80-81,87,95,605,607,611,618,619,631
坐标集
coordinate 7
导出集
derived 34
集合之间的差
difference between 5
不相连集合
disjoint 5
集合的元素
element of 4
空集
empty 5
集合的相等
equality of 5
有限集合
finite 4
指标集
index 7
无限集合
infinite 4
集合的内部
interior of 34
集合的内点
interior point of 34
集合的交
intersection of 5
集合的线性总和
linear sum of 53
不相交集合(见不相连集合)
nonintersecting(*see* disjoint)
所有有序 n 元实数组的集合
of all ordered n-tuples of real number 14
开集
open 32-33,57-58,611,631
集合的开核(见集合的内部)
open kernel of(*see* interior of)
真子集
proper subset 5
集合的列紧性
sequential compactness of 36
子集

subset 5
并集
union of 5
可接受集合
Set of admissable controls 453
七种凹性(全局概念)
Seven kinds of concavity (global concepts) 605-611
影子价格(见机会成本)
Shadow price(*see* Opportunity cost)
资本的影子需求价格
Shadow demand price of capital 518
Shephard(-Mckenzie)引理(见 Shephard 引理)
Shephard 对偶性
Shephard duality 138,153
Shephard 对偶定理
Shephard duality theorem 138-139
Shephard 引理
Shephard's lemma 135-136,137,148,153,155,156,174,177,180,188,192,193,194,195,196,627
Shephard-Samuelson 定理
Shephard-Samuelson theorem 143,160,174
可变投入需求的短期价格弹性
Short-run price elasticity of variable input demands 167
短期供给弹性
Short-run supply elasticity 167
短期总成本
Short-run total costs 165
Sidrauski 定理
Sidrauski's theorem 433
信号
Signals 306-307
外部提供的信号
endogenously supplied 306
内部提供的信号
exogenously supplied 306
就业市场的信号显示
job market signaling 306
信号显示成本
signaling costs 307
信号显示均衡
signaling equilibrium 307
简单彩票
Simple lottery 260
单纯形方法
Simplex method 83
Slater 条件
Slater's condition 92-94,97,102,105
Slater 反例
Slater's counterexample 91-92
滞钝调节
Sluggish adjustment 432
滞钝预期
Sluggish expectations 433,437
Slutsky 方程(见 Hicks-Slutsky 方程)
Slutsky equation(*see* Hicks-Slutsky equation)
Slutsky 矩阵(见消费替代矩阵)
Slutsky matrix (*see* Substitution matrix in consumption)
Slutsky 对称条件
Slutsky symmetry condition 632
社会贴现率
Social discount rate 223
社会最优(见帕累托最优)
Social optimum(*see* Pareto optimum)
社会福利
Social welfare 197,230,562,567
Solow-Swan 条件
Solow-Swan condition 357,444
Solow-Swan 增长模型(见新古典增长模型)
Solow-Swan growth model (*see* Neoclassical growth model)
Solow-Swan 路径
Solow-Swan path 357
Solow-Swan 定理
Solow-Swan theorem 357
解对(见最优对)
Solution pair(*see* Optimal pair)

不稳定性的来源
Source of instability 434-436
稳定性的来源
Source of stability 444-445
非空间垄断
Spaceless monopoly 559,563,567
空间垄断
Spatial monopoly 559,561,562
空间定价问题
Spatial pricing problem generally 557-568
空间定价问题和非线性规划
spatial pricing problem and nonlinear programming 564-568
空间定价问题和最优控制论
spatial pricing problem and optimal control theory 557-564
螺线极点
Spiral point 383,400,422
Srinivasan 定理
Srinivasan theorem 485
(鞍状路径的)的稳定分支
Stable branch (of saddle like paths) 397, 407,432,437,484,485,487,488
竞争均衡的稳定性
Stability of competitive equilibrium
竞争均衡的一般公式
general formulation of 345-350
三种商品情况
three-commodity case 370-376
宏观均衡的稳定性
Stability of macroeconomic equilibrium
轨道的动态行为
dynamic behavior of trajectories 419-423
凯恩斯体系
Keynesian system 350-351
新古典体系
neoclassical system 351-355
状态变量
State variable 453,454,459,461,548
状态(见自然态)
States(*see* States of nature)
自然态
States of nature 257
世界态(见自然态)
States of the world(*see* States of nature)
静态需求理论
Static demand theory 514
静态宏观均衡
Static Macroequilibrium 419-423
稳态
Steady state 356, 427-433, 437, 441, 442, 443,444,482,485,502,503
渐近全局稳定性
asymptotically global stability 444
惟一稳态
unique 444
星形结点(见正常结点)
Stellar node(*see* Proper node)
存量和流量
Stocks and flows 352
Stoke 定理(见 Green 定理)
Stoke's theorem(*see* Green's theorem)
主观贴现率
Subjective rate of discount 550
替代
Substiutes
商品替代
of goods 146
投入替代
of inputs 142,151,157
生产中的替代效应
Substitution effect in production 189-190, 192
消费替代矩阵
Substitution matrix in consumption 131, 138,146,164,175,209,601,626,627,632
消费替代矩阵的半负定性
negative semidefiniteness of 146, 175, 209,627,632
奇异性

singularity 601
消费替代矩阵的对称
symmetry of 146,601,627,632
生产替代矩阵
Substitution matrix in production 140-141
生产替代矩阵的半负定性
negative semidefiniteness of 141
生产替代矩阵的对称
symmetry of 140-141
逐次主子式
Successive principle minors 39,116,603
非线性规划的充分条件
Sufficient condition in nonlinear programming 95,116,224
最优控制的充分条件
Sufficient condition for optimal control 468,470,479,508,516,528,545,548
优等投入
Superior input 195-196
资本资产的供给价格
Supply price of capital asset 521,530,533,535
上确界
Supremum 13
上确界原理
Supremum principle 13
联立方程组
System of simultaneous equations 578,580,593

T

探索
Tatonnement 347,349
同时探索
simultaneous 347
瓦尔拉斯探索
Walrasian 349
泰勒展开
Taylor's expansion 338,628
泰勒展开式
Taylor's expansion formula 50
交换理论
Theory of exchange 366
生产理论
Theory of production 366
风险下的公司理论
Theory of the firm under risk 286-290
三种资产经济
Three-asset economy 436,438
Tobin 的 q
Tobin's q 525-535
平均 q
average q 525,530-531,534
边际 q
marginal q 525-526,529-531,534
拓扑空间
Topological space 33
拓扑学
Topology 33-34
离散拓扑学
discrete 34
非离散拓扑学
indiscrete 34
总成本
Total cost 221-222
总利润
Total profit 232-233
总收益
Total revenue 198,221-222
总收益函数
Total revenue function 197
总社会收益
Total social benefit 223
迹条件
Trace condition 341
价格稳定和低就业之间的权衡
Trade-off between price stability and a low employment 358

轨道
Trajectory 395, 396, 397, 399, 400, 402, 403, 404, 405, 406, 408, 420, 421, 431, 432, 433, 435, 451, 456, 474, 481, 543
最优轨道
optimal 451, 456, 474, 543
超越对数函数(见超对数函数)
Transcendental logarithmic function (*see* Translog function)
变换(另见函数)
Transformation 8(*see* also Function)
复合变换
composite 589
单调变换
monotonic 266
正交变换
orthogonal 601
瞬时消费
Transitory consumption 505
超越对数成本函数
Translog cost function 153-154, 178
超越对数互反效用函数
Translog reciprocal utility function 173
横截条件
Transversality condition 455, 460, 467, 479, 481, 484, 485, 494, 496, 498, 524, 544, 546, 555, 559
三角函数
Trigonometric function 55, 389
高速公路理论
Turnpike theory 477
两种资产经济
Two-asset economy 436, 437

U

无界的
Unbounded 13
不确定性
Uncertainty 258, 364
上界
Upper bound 13
上围道集(见上水平集)
Upper contour set(*see* Upper level set)
上水平集
Upper level set 56, 612
资本的使用者成本
User cost of capital 519-521
效用函数
Utility function 63, 98-99, 126, 144, 637, 638
位似效用函数
homothetic 637
效用最大化
Utility maximization 126-131, 144
效用最大化中的消费者选择
consumer's choice in 126
效用最大化中的一阶条件
first-order condition in 127, 130, 133
效用最大化的拉格朗日函数
Lagrangian in 127, 130, 133
效用最大化的拉格朗日乘数
Lagrangian multiplier in 133

V

公司的价值
Value of the firm 525, 529, 533, 535
Pontragin 最大化原理的各种情况
Various cases of Pontragin's maximum principle 461-463
末端点固定,最终时间开放(自控系统)
final time open with fixed end-points (autonomous system) 466-467
末端点固定,最终时间开放(非自控系统)
final time open with fixed end-points (non-autonomous system) 464-465
末端点固定,时间固定
fixed time with fixed end-points 463-464
右端点变动,时间固定
fixed time with variable right-hand end-

points 467-468
时间最优问题
time optimal problem 461,465-466
向量
Vectors 13-24,44,577
向量加法
addition of 14
向量间的角度
angle between 22
列向量
column 577,578,593,600,602
向量差
difference of 14
向量的维数
dimension of 14
梯度向量
gradient 44,132,545,611,616
向量线性组合
linear combination of 16,582,586
向量的线性相关
linear dependence of 16,581
向量的线性无关
linear independence of 16,581,583
向量的第 i 个坐标
i^{th} coordinate of 14
向量的正交性
orthogonality of 23
行向量
row 577,578
向量的数乘
scalar multiplication of 14
零向量
zero 15,595
向量不等式
Vector inequalities 85
向量空间(见线性空间)
Vector space(*see* Linear space)
垂直恩格尔曲线
Vertical Engel curve 634,638-640,643
Ville 公理
Ville's axiom 632
vNM 效用函数(见 NM 效用函数)
vNM utility function(*see* NM utility function)
von Neumann-Morgen Stern 公理
von Neumann-Morgenstern axioms 364
von Neumann-Morgenstern 定理
von Neumann-Morgenstern theorem 262-264
von Neumann-Morgenstern 效用函数(见 NM 效用函数)
von Neumann-Morgenstern utility function(*see* NM utility function)

W

瓦尔拉斯法则
Walras's law 346,371
Tobin 的瓦尔拉斯—凯恩斯—菲利普斯模型
Walras-Keynes-Phillips model aà la Tobin 365-370,367
瓦尔拉斯调节
Walrasian adjustment 366
瓦尔拉斯稳定性
Walrasian stability 345,366
瓦尔拉斯稳定性问题
Walrasian stability problem 346-347
Weierstrass 定理
Weierstrass theorem 36,76,83
福利最大化公司
Welfare maximizing firm 563,564,567,568
福利最大化垄断者
Welfare maximizing monopoly 567
Wicksell 效应
Wicksell effect 436,445
Wicksell 的累积过程
Wicksellian cumulative process 436
WKP 模型(见 Walras-Keynes-Phillips 模型)
WKP model(*see* Walras-Keynes-Phillips model)
Wronski 行列式
Wronskian 385
Young 定理
Young's theorem 52